# Rachunek lambda w kategoriach kartezjańsko zamkniętych

Krzysiek Kapulkin

semestr letni 2009/10

## 1 Kategorie, funktory i naturalne transformacje

**Definicja 1.** *Kategorię* $\mathbb{C}$ tworzą klasa *obiektów* $\mathrm{ob}(\mathbb{C})$ i klasa *morfizmów* $\mathrm{mor}(\mathbb{C})$, przy czym zakładamy, że:

1. Każdy morfizm $f \in \mathrm{mor}(\mathbb{C})$ posiada *dziedzinę* $\mathrm{dom}(f) \in \mathrm{ob}(\mathbb{C})$ oraz *przeciwdziedzinę* $\mathrm{cod}(f) \in \mathrm{ob}(\mathbb{C})$. Jeśli $X = \mathrm{dom}(f)$, $Y = \mathrm{cod}(f)$, to piszemy $f\colon X \longrightarrow Y$. Rodzinę wszystkich morfizmów o dziedzinie $X$ i przeciwdziedzinie $Y$ oznaczamy $\hom_{\mathbb{C}}(X, Y)$. Jeśli $f$ i $g$ są dwoma morfizmami takimi, że $\mathrm{cod}(f) = \mathrm{dom}(g)$, to istnieje morfizm $h$ taki, że $\mathrm{dom}(h) = \mathrm{dom}(f)$ oraz $\mathrm{cod}(h) = \mathrm{cod}(g)$ nazywany *złożeniem* $h = g \circ f$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & C \\ & B \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

2. Dla każdego $X \in \mathrm{ob}(\mathbb{C})$ istnieje morfizm *identycznościowy* $id_X \in \hom_{\mathbb{C}}(X, X)$.
3. jeśli $f\colon X \longrightarrow Y$, to $id_Y \circ f = f \circ id_X = f$.
4. jeśli $f\colon X \longrightarrow Y$, $g\colon Y \longrightarrow Z$ i $h\colon Z \longrightarrow T$, to

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

**Przykłady 1.**

- **0** to kategoria pusta ($\mathrm{ob}(\mathbb{C}) = \mathrm{mor}(\mathbb{C}) = \emptyset$).
- **1** to kategoria z jednym obiektem $*$ i jednym morfizmem $id_*$.
- **2** to kategoria z dwoma obiektami i jednym morfizmem nieidentycznościowym między nimi.
- **Sets** to kategoria, której obiektami są zbiory, a morfizmami funkcje.
- **Grp** to kategoria, której obiektami są grupy, a morfizmami homomorfizmy grup.
- **Monoids** to kategoria, której obiektami są monoidy, a morfizmami homomorfizmy monoidów.
- Powyższe dwa przykłady można uogólnić: niech $\mathbb{T}$ – teoria równościowa. Wówczas przez $\mathbf{Alg}(\mathbb{T})$ będziemy oznaczać kategorię $\mathbb{T}$-algebr i ich homomorfizmów.

- Niech $M$ (odp. $G$) będzie monoidem (odp. grupą). Wówczas $M$ (odp. $G$) możemy traktować jako kategorię z jednym obiektem $*$, w której morfizmami są elementy monoidu (odp. grupy). Element neutralny pełni rolę identyczności, zaś mnożenie w monoidzie (odp. grupie) jest składaniem morfizmów.

- $\mathbf{Vect_k}$ to kategoria przestrzeni liniowych nad ustalonym ciałem $\mathbf{k}$, w której morfizmami są przekształcenia liniowe.

- **Grph** to kategoria grafów. Przez graf rozumiemy tu czwórkę

  $$(O, A, d\colon A \longrightarrow O, c\colon A \longrightarrow O),$$

  gdzie $O$ jest zbiorem wierzchołków, $A$ zbiorem krawędzi, funkcja $d$ przyporządkowuje krawędzi jej dziedzinę, zaś $c$ jej przeciwdziedzinę. Morfizmem w kategorii grafów nazywamy takie przekształcenie

  $$f\colon (O,\ A,\ d\colon A \longrightarrow O,\ c\colon A \longrightarrow O) \longrightarrow (O',\ A',\ d'\colon A' \longrightarrow O',\ c'\colon A' \longrightarrow O'),$$

  że $d'(f(a)) = f(d(a))$ oraz $c'(f(a)) = f(c(a))$.

- **Top** to kategoria, której obiektami są przestrzenie topologiczne, a morfizmami przekształcenia ciągłe.

- Zbiór częściowo uporządkowany $\langle P, \leq \rangle$ możemy traktować jako kategorię. Jej obiektami są elementy $P$. Ponadto:

  $$\hom_{\mathbb{C}}(p, p') = \begin{cases} \{*\} & \text{jeśli } p \leq p' \\ \emptyset & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

- **Posets** to kategoria, w której obiektami są zbiory częściowo uporządkowane, zaś morfizmami funkcje monotoniczne (zachowujące porządek).

- **CPO** to kategoria, w której obiektami są zupełne porządki częściowe, zaś morfizmami funkcje ciągłe (w sensie Scotta).

- Niech $\mathbb{C}$ będzie kategorią. Kategorią *dualną* do $\mathbb{C}$ nazywamy kategorię $\mathbb{C}^{\mathrm{op}}$ zdefiniowaną następująco: $\mathrm{ob}(\mathbb{C}^{\mathrm{op}}) = \mathrm{ob}(\mathbb{C})$, zaś $\hom_{\mathbb{C}^{\mathrm{op}}}(X, Y) = \hom_{\mathbb{C}}(Y, X)$.

Powiemy, że kategoria $\mathbb{C}$ jest *mała*, jeśli $\mathrm{ob}(\mathbb{C})$ i $\mathrm{mor}(\mathbb{C})$ są zbiorami.

**Przykłady 2.**

- Kategorie $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$ i $\mathbf{2}$ to kategorie małe.

- Grupa $G$ rozważana jako kategoria jest kategorią małą.

- Zbiór uporządkowany $\langle P, \leq \rangle$ rozważany jako kategoria jest kategorią małą.

**Definicja 2.** Niech $\mathbb{C}$ i $\mathbb{D}$ będą kategoriami. *Funktorem* $F\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{D}$ nazywamy parę przekształceń przyporządkowujących obiektom $\mathbb{C}$ obiekty $\mathbb{D}$, a morfizmom $\mathbb{C}$ morfizmy $\mathbb{D}$ spełniającą warunki:

1. Jeśli $f \in \mathrm{mor}(\mathbb{C})$, to $F(\mathrm{dom}(f)) = \mathrm{dom}(F(f))$ oraz $F(\mathrm{cod}(f)) = \mathrm{cod}(F(f))$.

2. Dla każdego $X \in \mathrm{ob}(\mathbb{C})$ zachodzi $F(id_X) = id_{F(X)}$.

3. Dladowolnej składalnej pary morfizmów $f, g \in \mathrm{mor}(\mathbb{C})$ zachodzi $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

**Przykłady 3.**

- $U\colon \mathbf{Grp} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ to funktor „zapominania”. Grupie $\langle G, e, \circ\rangle$ przyporządkowujemy jej uniwersum $G$, a homomorfizmowi grup $f\colon \langle G, e, \circ\rangle \longrightarrow \langle G', e', \circ'\rangle$ funkcję $f\colon G \longrightarrow G'$.

- $U\colon \mathbf{CRng} \longrightarrow \mathbf{Ab}$ to funktor częściowego zapominania z kategorii pierścieni w kategorię grup abelowych. Pierścieniowi $\langle R, 0, +, \cdot\rangle$ przyporządkowujemy jego grupę addytywną $\langle R, 0, +\rangle$.

- $ab\colon \mathbf{Grp} \longrightarrow \mathbf{Ab}$ to funktor abelianizacji przyporządkowujący grupie jej abelianizację.

- $i\colon \mathbf{Grp} \longrightarrow \mathbf{Monoids}$ to włożenie kategorii grup w kategorię monoidów.

- $i\colon \mathbf{Sets}_{fin} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ to włożenie kategorii zbiorów skończonych w kategorię wszystkich zbiorów.

- $F\colon \mathbf{Sets} \longrightarrow \mathbf{Grp}$ to funktor przyporządkowujący zbiorowi $X$ grupę wolną na zbiorze wolnych generatorów $X$. Z definicji grupy wolnej (przez własność uniwersalną) mamy, że wówczas każda funkcja $f\colon X \longrightarrow Y$ rozszerza się jednoznacznie do homomorfizmu grup $F(f)\colon F(X) \longrightarrow F(Y)$.

- $X \times (-)\colon \mathbf{Sets} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ to funktor mnożenia kartezjańskiego przez ustalony zbiór $X \in \mathbf{Sets}$. Obiektowi $A \in \mathbf{Sets}$ przyporządkowujemy zbiór $X \times A$, zaś funkcji $f\colon A \longrightarrow B$ funkcję $(id_X, f)\colon X \times A \longrightarrow X \times B$ taką, że $(id_X, f)(x, a) = (x, f(a))$.

- $U\colon \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ to funktor zapominania przypisujący przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{O}(X))$ zbiór $X$, a przekształceniu ciągłemu $f\colon (X, \mathcal{O}(X)) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}(Y))$ funkcję $f\colon X \longrightarrow Y$.

- $D\colon \mathbf{Sets} \longrightarrow \mathbf{Top}$ to funktor przyporządkowujący zbiorowi $X$ przestrzeń topologiczną $(X, \mathcal{O}(X))$, gdzie $\mathcal{O}(X)$ jest topologią dyskretną na $X$ tj. każdy zbiór jest otwarty. Wówczas każda funkcja $f\colon X \longrightarrow Y$ może być traktowana jako przekształcenie ciągłe $f\colon (X, \mathcal{O}(X)) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}(Y))$.

Funktor z kategorii $\mathbb{C}^{\mathrm{op}}$ do kategorii $\mathbb{D}$ nazywamy często *funktorem kontrawariantnym* z $\mathbb{C}$ do $\mathbb{D}$. Wtedy o „zwykłym” funktorze mówimy, że jest *kowariantny*.

- $\mathcal{P}\colon \mathbf{Sets} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ funktor zbioru potęgowego jest funktorem kontrawariantnym. Przyporządkowuje on zbiorowi $X \in \mathbf{Sets}$ jego zbiór potęgowy $\mathcal{P}(X)$. Niech $f\colon X \longrightarrow Y$ będzie funkcją. Wówczas $\mathcal{P}(f)\colon \mathcal{P}(Y) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ jest funkcją przeciwobrazu, tj. dla $A \in \mathcal{P}(Y)$ mamy: $\mathcal{P}(f)(A) = f^{-1}(A)$.

Możemy zdefiniować kategorię **Cat** następująco:

- jej obiektami będą wszystkie małe kategorie.

- jej morfizmami będą funktory.

**Definicja 3.** Niech $\mathbb{C}, \mathbb{D}$ będą kategoriami, zaś $F, G\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{D}$ funktorami. *Naturalną transformacją* $\tau\colon F \longrightarrow G$ nazywamy rodzinę morfizmów w $\mathbb{D}$ indeksowaną obiektami $\mathbb{C}$ tj.

$$\tau = \{\tau_C\colon F(C) \longrightarrow G(C)\}_{C \in \mathrm{ob}(\mathbb{C})}$$

taką, że dla dowolnego morfizmu $f\colon C \longrightarrow D$ kwadrat

$$\begin{tikzcd} F(C) \arrow[r, "\tau_C"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(C) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(D) \arrow[r, "\tau_D"'] & G(D) \end{tikzcd}$$

jest przemienny.

**Przykłady 4.**

- Niech $F\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{D}$ będzie funktorem. Definiujemy transformację identycznościową $id_F\colon F \longrightarrow F$ jako $id_F = \{id_{F(C)}\colon F(C) \longrightarrow F(C)\}_{C \in \mathrm{ob}(\mathbb{C})}$. Przemienność kwadratu:

$$\begin{tikzcd} F(C) \arrow[r, "id_{F(C)}"] \arrow[d, "F(f)"'] & F(C) \arrow[d, "F(f)"] \\ F(D) \arrow[r, "id_{F(D)}"'] & F(D) \end{tikzcd}$$

  wynika bezpośrednio z definicji kategorii.

- Niech $X \times (-), Y \times (-)\colon \mathbf{Sets} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ będą funktorami mnożenia kartezjańskiego. Wówczas dowolna funkcja $f\colon X \longrightarrow Y$ indukuje naturalną transformację $\tau_f$ tych funktorów. Mamy bowiem $\tau_f = \{\tau_A\colon X \times A \longrightarrow Y \times A\}_{A \in \mathbf{Sets}}$, gdzie $\tau_A = f \times id_A$. Niech $a\colon A \longrightarrow B$ będzie funkcją. Wówczas przemienność kwadratu:

$$\begin{tikzcd} X \times A \arrow[r, "f \times id_A"] \arrow[d, "id_X \times a"'] & Y \times A \arrow[d, "id_Y \times a"] \\ X \times B \arrow[r, "f \times id_B"'] & Y \times B \end{tikzcd}$$

  jest oczywista.

- Niech $1_{\mathbf{Sets}}\colon \mathbf{Sets} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ to funktor identycznościowy, zaś $\mathcal{P}\colon \mathbf{Sets} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ niech będzie funktorem potęgowym. Określamy wówczas naturalną transformację $\tau\colon 1_{\mathbf{Sets}} \longrightarrow \mathcal{P}$ jako $\tau = \{\tau_X\colon X \longrightarrow \mathcal{P}(X)\}_{X \in \mathbf{Sets}}$, gdzie $\tau_X(x) = \{x\}$.

- Niech $id_{\mathbf{Vect_k}}, (-)^{**}\colon \mathbf{Vect_k} \longrightarrow \mathbf{Vect_k}$ będą odpowiednio funktorem identycznościowym i funktorem przyporządkowującym przestrzeni liniowej jej drugą przestrzeń sprzężoną (tj. $V^{**} = \hom(\hom(V, \mathbf{k}), \mathbf{k})$). Określamy naturalną transformację $\mathrm{ev}\colon id_{\mathbf{Vect_k}} \longrightarrow (-)^{**}$ jako: $\mathrm{ev} = \{\mathrm{ev}_V\colon V \longrightarrow V^{**}\}_{V \in \mathbf{Vect_k}}$, gdzie $\mathrm{ev}_V(v)(f) = f(v)$ dla $v \in V$ i $f \in \hom(V, \mathbf{k})$.

## 2 Własności morfizmów

Niech $f\colon C \longrightarrow D$ będzie morfizmem w kategorii $\mathbb{C}$. Powiemy, że $f$ jest:

- *monomorfizmem*, jeśli dla dowolnych morfizmów $g, h\colon B \longrightarrow C$ mamy:

$$f \circ g = f \circ h \quad \Rightarrow \quad g = h;$$

- *epimorfizmem*, jeśli dla dowolnych morfizmów $g, h\colon D \longrightarrow E$ mamy:

$$g \circ f = h \circ f \quad \Rightarrow \quad g = h;$$

- *retrakcją*, jeśli istnieje taki morfizm $g\colon D \longrightarrow C$, że $f \circ g = id_D$;
- *sekcją*, jeśli istnieje taki morfizm $g\colon D \longrightarrow C$, że $g \circ f = id_C$.
- *izomorfizmem*, jeśli istnieje morfizm $g\colon D \longrightarrow C$ taki, że $f \circ g = id_D$ oraz $g \circ f = id_C$.

Łatwo zauważyć, że pojęcia monomorfizmu i epimorfizmu, jak również retrakcji i sekcji są pojęciami dualnymi, tzn. monomorfizm (retrakcja) w $\mathbb{C}$ jest epimorfizmem (odp. sekcją) w $\mathbb{C}^{\mathrm{op}}$ i na odwrót: epimorfizm (sekcja) w $\mathbb{C}$ jest monomorfizmem (odp. retrakcją) w $\mathbb{C}^{\mathrm{op}}$.

**Przykłady 5.**

- Monomorfizmy w **Sets** to funkcje różnowartościowe. Epimorfizmy w **Sets** to funkcje „na”. Izomorfizmy w **Sets** to bijekcje.
- W ogólności, morfizm, który jest mono i epimorfizmem, nie musi być izomorfizmem. Jako przykład możemy wziąć włożenie $i\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ w kategorii **Monoids**.

# 3 Konstrukcje w kategoriach

Niech $\mathbb{C}$ będzie kategorią. Obiekt $1 \in \mathbb{C}$ ($0 \in \mathbb{C}$) nazywamy *obiektem końcowym* (odp. *obiektem początkowym*), jeśli dla każdego obiektu $C \in \mathbb{C}$ istnieje dokładnie jeden morfizm $!\colon C \longrightarrow 1$ (odp. $!\colon 0 \longrightarrow C$).

Łatwo zauważyć, że obiekt końcowy (początkowy), jeśli istnieje, to jest wyznaczony jednoznacznie z dokładnością do izomorfizmu. Mianowicie, przypuśćmy, że $X$ i $Y$ są dwoma obiektami końcowymi (początkowymi) w $\mathbb{C}$. Wówczas istnieje dokładnie jeden morfizm $f\colon X \longrightarrow Y$ oraz dokładnie jeden morfizm $g\colon Y \longrightarrow X$. Oczywiście, $f \circ g = id_Y$ oraz $g \circ f = id_X$, stąd $X$ i $Y$ są izomorficzne.

Można też zauważyć, że obiekt końcowy w $\mathbb{C}$ jest obiektem początkowym w $\mathbb{C}^{\mathrm{op}}$ i na odwrót: obiekt początkowy w $\mathbb{C}$ jest obiektem końcowym w $\mathbb{C}^{\mathrm{op}}$.

**Przykłady 6.**

- Obiektem początkowym w kategorii zbiorów **Sets** jest zbiór pusty $\emptyset$. Obiektem końcowym w **Sets** jest dowolny singleton $\{*\}$.
- Obiektem początkowym i końcowym w kategorii grup **Grp** jest grupa jednoelementowa $\{*\}$.
- W kategorii ciał **Fields** nie istnieje obiekt końcowy. Wynika to bezpośrednio z faktu, że wśród aksomatów ciała zakładamy: $0 \neq 1$. W kategorii tej nie istnieje również obiekt początkowy, bowiem ciała mogą mieć różne charakterystyki.
- Rozważmy dowolną kategorię zbudowaną na posecie $\mathcal{P} = \langle P, \leq \rangle$. Wówczas obiektem końcowym (odp. początkowym) w $\mathcal{P}$ jest element największy (odp. najmniejszy) w $P$, o ile taki element istnieje. W przeciwnym przypadku $\mathcal{P}$ nie posiada obiektu końcowego (odp. początkowego)

Niech $\mathbb{C}$ będzie kategorią. *Produktem binarnym* obiektów $X, Y \in \mathbb{C}$ nazywamy obiekt oznaczany $X \times Y$, który wraz z morfizmami $\pi_X\colon X \times Y \longrightarrow X$ i $\pi_Y\colon X \times Y \longrightarrow Y$ ma następującą własność:

Dla każdego obiektu $Z$ oraz morfizmów $f_X : Z \longrightarrow X$ i $f_Y : Z \longrightarrow Y$ istnieje dokładnie jeden morfizm $f : Z \longrightarrow X \times Y$ spełniający warunki $f_X = \pi_X \circ f$ oraz $f_Y = \pi_Y \circ f$ tzn. uprzemienniający oba trójkąty w poniższym diagramie:

$$\begin{tikzcd} X & X \times Y \arrow[l, "\pi_X"'] \arrow[r, "\pi_Y"] & Y \\ & Z \arrow[ul, "f_X"] \arrow[u, dashed, "\langle f_X, f_Y \rangle"] \arrow[ur, "f_Y"'] & \end{tikzcd}$$

Niech $\mathbb{C}$ będzie kategorią. *Koproduktem binarnym* obiektów $X, Y \in \mathbb{C}$ nazywamy obiekt oznaczany $X + Y$, wraz z morfizmami $i_X : X \longrightarrow X + Y$ i $i_Y : Y \longrightarrow X + Y$, który spełnia następujący warunek:

Dla każdego obiektu $Z$ oraz morfizmów $f_X : X \longrightarrow Z$ i $f_Y : Y \longrightarrow Z$ istnieje dokładnie jeden morfizm $f : X + Y \longrightarrow Z$ o własnościach $f_X = f \circ i_X$ oraz $f_Y = f \circ i_Y$ tzn. uprzemienniający oba trójkąty w poniższym diagramie:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i_X"] \arrow[dr, "f_X"'] & X + Y \arrow[d, dashed, "\langle f_X, f_Y \rangle"] & Y \arrow[l, "i_Y"'] \arrow[dl, "f_X"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

Analogicznie jak powyżej możemy stwierdzić, że produkt i koprodukt binarny wyznaczone są z dokładnością do izomorfizmu (proste sprawdzenie pozostawiamy Czytelnikowi). Ponadto są pojęciami dualnymi, tj. produkt w $\mathbb{C}$ jest koproduktem w $\mathbb{C}^{\mathrm{op}}$ oraz koprodukt w $\mathbb{C}$ jest produktem w $\mathbb{C}^{\mathrm{op}}$.

**Przykłady 7.**

- W kategorii zbiorów **Sets** produkt binarny to iloczyn kartezjański dwóch zbiorów, zaś koprodukt binarny to suma rozłączna, czyli zbiór $\{0\} \times X \cup \{1\} \times Y$.
- W kategorii grup abelowych **Ab** produkt i koprodukt binarny to iloczyn kartezjański grup, z działaniami wykonywanymi po współrzędnych.
- W kategorii definiowanej przez zbiór częściowo uporządkowany $\mathcal{P} = \langle P, \leq \rangle$ produkty dane są przez operację kresu górnego $\sqcap$, zaś koprodukty przez kresy dolne $\sqcup$.
- W kategorii ciał **Fields** nie istnieją produkty, bowiem w każdym ciele zachodzi:

  $$a \cdot b = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad a = 0 \quad \text{lub} \quad b = 0.$$

  Jednak w produkcie ciał mielibyśmy dwa niezerowe elementy: $(1, 0)$ i $(0, 1)$, których iloczyn dawałby 0 w wyniku.

Niech teraz $\mathbb{C}$ będzie dowolną kategorią z produktami binarnymi. Powiemy, że $\mathbb{C}$ ma *obiekty wykładnicze*, jeśli dla dowolnej pary obiektów $A, B \in \mathrm{ob}(\mathbb{C})$ istnieje obiekt $B^A \in \mathrm{ob}(\mathbb{C})$ wraz z morfizmami $\mathtt{eval}_{A,B} : B^A \times A \longrightarrow B$ (tworzącymi naturalną transformację) o tej własności, że dla dowolnego $f : C \times A \longrightarrow B$ istnieje dokładnie jeden morfizm $\mathtt{curry}(f) : C \longrightarrow B^A$, który uprzemiennia poniższy diagram:

$$\begin{tikzcd} B^A & B^A \times A \arrow[r, "\mathtt{eval}"] & B \\ C \arrow[u, dashed, "\mathtt{curry}(f)"] & C \times A \arrow[u, "\mathtt{curry}(f) \times 1_A"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

**Przykłady 8.**

- W kategorii **Sets** obiektem wykładniczym $Y^X$ jest zbiór wszystkich funkcji o dziedzinie $X$ i przeciwdziedzinie $Y$.
- Kategoria **Cat** ma obiekty wykładnicze: $\mathbb{D}^{\mathbb{C}}$ możemy zdefiniować jako kategorię funktorów $F\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{D}$, w której morfizmami są naturalne transformacje.
- Algebra Heytinga rozpatrywana jako kategoria ma obiekty wykładnicze dane przez $a \rightarrow b$. Istotnie, patrząc na algebry Heytinga z punktu widzenia logiki, `eval` możemy zinterpretować jako regułę eliminacji implikacji (modus ponens), zaś `curry` wyraża regułę wprowadzania implikacji.
- W **CPO** obiektami wykładniczymi są przestrzenie funkcji ciągłych $[D \Rightarrow E]$, z uporządkowaniem „po współrzędnych".

# 4 Kategorie kartezjańsko zamknięte

Kategorię nazywamy *kartezjańsko zamkniętą*, jeśli ma:

1. produkty binarne,
2. obiekt końcowy,
3. obiekty wykładnicze.

**Przykłady 9.**

- Kategoria **Sets** jest kategorią kartezjańsko zamkniętą.
- Kategoria **Posets** jest kategorią kartezjańsko zamkniętą.
- Kategoria **CPO** jest kartezjańsko zamknięta.
- Kategoria **Cat** jest kategorią kartezjańsko zamkniętą.
- **(Giuseppe Rosolini).** Kategoria **PERs**, której obiektami są pary: zbiór z częściową relacją równoważności (tj. relacją, która jest symetryczna i przechodnia, ale niekoniecznie zwrotna), zaś morfizmami funkcje zachowujące relacje, jest kategorią kartezjańsko zamkniętą. Obiektem wykładniczym dla pary obiektów: $\langle A, R\rangle$, $\langle B, S\rangle$ jest zbiór wszystkich funkcji z $A$ do $B$ z relacją $[R \longrightarrow S]$, gdzie $f[R \longrightarrow S]g$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f$ i $g$ indukują te same funkcje na klasach abstrakcji $A/R \longrightarrow B/S$.

# 5 Składnia rachunku lambda z typami prostymi

*Typy.* Zakładamy, że dany jest zbiór *symboli typów* $S$. Nad $S$ definiujemy *zbiór typów* jako najmniejszy zbiór taki, że

1. każdy symbol typu jest typem.
2. jeśli $T_1$ i $T_2$ są typami, to $T_1 \longrightarrow T_2$ też jest typem.

*Termy.* Następnie definujemy zbiór termów nad *zbiorem stałych* $C$. Każdy term jest etykietowany: napis $t\colon T$ oznacza, że term $t$ jest typu $T$. Każdy term $t\colon T$ posiada też zbiór zmiennych wolnych $FV(t)$.

Zbiór termów to najmniejszy zbiór taki, że:

1. (*stałe*) każda stała z $C$, $c : C$ jest termem; przy tym $FV(c) = \emptyset$;
2. (*zmienne*) dla każdego typu $T$ mamy przeliczalny zbiór zmiennych typu $T$: $x_1 \colon T,\ x_2 \colon T, \ldots$; dla zmiennych $FV(x_i) = \{x_i \colon T\}$;
3. (*aplikacje*) jeśli $t \colon (T_1 \longrightarrow T_2)$ i $s \colon T_1$ są termami to $(ts) \colon T_2$ też jest termem; określamy $FV(ts) = FV(t) \cup FV(s)$;
4. ($\lambda$-*abstrakcje*) jeśli $t \colon T_2$ jest termem a $x \colon T_1$ zmienną to $\lambda x.t \colon T_1 \longrightarrow T_2$ też jest termem; przyjmujemy $FV(\lambda x.t) = FV(t) \setminus \{x : T_1\}$.

Termy rachunku $\lambda$ utożsamiamy zawsze, gdy różnią się tylko zmiennymi związanymi ($\alpha$-*konwersja*). W szczególności, termy $\lambda x.xy$ i $\lambda x'.x'y$ uważamy za równe, zaś termy $\lambda x.xy$ i $\lambda x.xy'$ za różne.

*Podstawienie.* Definujemy *podstawienie*

$$t[s/x] \colon T_2$$

termu $s : T_1$ na zmienną wolną $x : T_1$ w termie $t : T_2$. Jest to „wstawienie" termu $s \colon T_1$ we wszystkie wystąpienia wolne zmiennej $x \colon T_1$, ale tak, by zmienne z $s \colon T_1$ nie zostały przy tym związane. Dokładniej:

$$t[s/x] = \begin{cases} s & \text{gdy } t \colon T_2 \text{ jest zmienną } x \colon T_1, \\ t & \text{gdy } t \colon T_2 \text{ jest zmienną różną od } x \colon T_1, \\ t_1[s/x]t_2[s/x] & \text{gdy } t = t_1 t_2 \colon T_2, \\ t & \text{gdy } t = \lambda x.t_1 : T_2, \\ \lambda y.t_1[s/x] & \text{gdy } t = \lambda y.t_1 \colon T_2 \text{ oraz } y \notin FV(s). \end{cases}$$

Ponieważ utożsamiamy dwa termy, jeśli różnią się tylko zmiennymi związanymi, zawsze możemy tak dobrać term $t_1$ i zmienną $y$, by $t = \lambda y.t_1 \colon T_2$ oraz by $y \notin FV(s)$.

Podobnie możemy zdefiniować *jednoczesne podstawienie*

$$t[s_1/x_1, \ldots, s_n/x_n] \colon T$$

termów $s_1 \colon T_1, \ldots, s_n \colon T_n$, na zmienne $x_1 \colon T_1, \ldots, x_n \colon T_n$ w termie $t \colon T$.

# 6 Semantyka rachunku lambda

**Interpretacje.** Pokażemy, że kategorie kartezjańsko zamknięte są „dostatecznie bogatymi uniwersami", by można w nich było interpretować rachunek lambda.

Niech $\mathbb{C}$ będzie kategorią kartezjańsko zamknietą. Zakładamy teraz, że w $\mathbb{C}$ mamy ustalone: obiekt końcowy 1, produkty binarne i obiekty wykładnicze.

Interpretacja języka przyporządkowuje każdemu symbolowi typu $S$ obiekt $[\![S]\!]$. Interpretacje rozszerzamy do interpretacji wszystkich typów w ten sposób, by

$$[\![T_1 \longrightarrow T_2]\!] = [\![T_2]\!]^{[\![T_1]\!]}.$$

Ponadto dla każdej stałej $c \colon T$, wybieramy morfizm

$$[\![c]\!] \colon \mathbf{1} \longrightarrow [\![T]\!].$$

Interpretacja ta rozszerza się do interpretacji wszystkich termów w następujący sposób. Dla zbioru zmiennych $\Gamma = \{x_1 \colon T_1, \ldots, x_n \colon T_n\}$ określamy

$$[\![\Gamma]\!] = [\![T_1]\!] \times \ldots \times [\![T_n]\!]$$

Interpretacją termu $t \colon T$ będzie morfizm:

$$[\![t]\!] \colon [\![FV(t)]\!] \longrightarrow [\![T]\!]$$

zdefiniowany następująco:

1. $[\![x]\!]$ jest identycznością na $[\![T]\!]$ dla dowolnej zmiennej $x\colon T$;
2. jeśli $[\![t]\!]\colon [\![FV(t)]\!] \longrightarrow [\![T_2]\!]^{[\![T_1]\!]}$ oraz $[\![s]\!]\colon [\![FV(s)]\!] \longrightarrow [\![T_1]\!]$, to morfizm

$$[\![ts]\!]\colon [\![FV(ts)]\!] \longrightarrow [\![T_2]\!]$$

   jest złożeniem

$$\mathtt{eval}_{[\![T_1]\!],[\![T_2]\!]} \circ \langle [\![t]\!] \circ \pi_t, [\![s]\!] \circ \pi_s \rangle\colon [\![FV(ts)]\!] \longrightarrow [\![T_2]\!]^{[\![T_1]\!]} \times [\![T_1]\!] \longrightarrow [\![T_2]\!],$$

   gdzie $\pi_s$ i $\pi_t$ są rzutowaniami z $[\![FV(ts)]\!]$ odpowiednio na $[\![FV(s)]\!]$ oraz $[\![FV(t)]\!]$;
3. dla $[\![t]\!]\colon [\![FV(t)]\!] \longrightarrow [\![T_2]\!]$ oraz zmiennej $x\colon T_1$, określamy interpretację $\lambda x.t$ jako morfizm

$$[\![\lambda x.t]\!] = \mathtt{curry}[\![t]\!]\colon [\![FV(t) \setminus \{x\colon T_1\}]\!] \longrightarrow [\![T_2]\!]^{[\![T_1]\!]}.$$

*Podstawienie.* Niech $\Gamma = \langle x_1{:}S_1,\ x_2{:}S_2,\ \ldots, x_n{:}S_n\rangle$, $\Delta = \langle y_1{:}T_1,\ y_2{:}T_2,\ \ldots, y_k{:}T_k\rangle$ będą kontekstami. *Jednoczesnym podstawieniem* nazywamy $n$-tkę $\sigma = \langle t_1, t_2, \ldots, t_k\rangle$ o tej własności, że dla dowolnego $1 \leq i \leq k$ zachodzi $\Gamma \vdash t_i\colon T_i$. Interpretacją takiego podstawienia jest morfizm:

$$[\![\sigma]\!] = \langle [\![t_1]\!], [\![t_2]\!], \ldots, [\![t_k]\!]\rangle,$$

zaś interpretacją wyniku podstawienia $t[\sigma] = t[t_1/y_1, t_2/y_2, \ldots, t_k/y_k]\colon T$, jest złożenie morfizmów:

$$[\![t]\!] \circ [\![\sigma]\!]\colon [\![\Delta]\!] \longrightarrow [\![\Gamma]\!] \longrightarrow [\![T]\!].$$

**Twierdzenie 1. (o poprawności).** *Semantyka rachunku lambda w kategoriach kartezjańsko zamkniętych ma takie własności:*

*($\beta$) Jeśli $\Gamma, x\colon T_1 \vdash t\colon T_2$ oraz $\Gamma \vdash s\colon T_1$, to $[\![(\lambda x.t)s]\!] = [\![t[s/x]]\!]$.*

*($\eta$) Jeśli $\Gamma \vdash T_1 \longrightarrow T_2$, to $[\![\lambda x.tx]\!] = [\![t]\!]$.*

*Dowód:* Zaczniemy od $\beta$-równoważności. Mamy następujący ciąg równości:

$$\begin{aligned}
[\![(\lambda x.t)s]\!] &= \mathtt{eval}_{[\![T_1]\!],[\![T_2]\!]} \circ \langle \mathtt{curry}([\![t]\!]), [\![s]\!]\rangle = && \text{(produkt)}\\
&= \mathtt{eval}_{[\![T_1]\!],[\![T_2]\!]} \circ (\mathtt{curry}([\![t]\!]) \times 1_{[\![T_1]\!]}) \circ \langle 1_{[\![\Gamma]\!]}, [\![s]\!]\rangle = && (\mathtt{eval})\\
&= [\![t]\!] \circ \langle 1_{[\![\Gamma]\!]}, [\![s]\!]\rangle = && \text{(podstawienie)}\\
&= [\![t]\!] \circ [\![\langle \overrightarrow{x}, s\rangle]\!] = && \text{(podstawienie)}\\
= [\![t[s/x]]\!] &
\end{aligned}$$

By pokazać, że $\eta$-równoważne termy są nierozróżnialne przy interpretacji w kategoriach kartezjańsko zamkniętych, rozpatrzmy następujący ciąg równości:

$$\begin{aligned}
[\![\lambda x.tx]\!] &= \mathtt{curry}([\![tx]\!]) = && \text{(definicja } \mathtt{eval})\\
&= \mathtt{curry}(\mathtt{eval}_{[\![T_1]\!],[\![T_2]\!]} \circ ([\![t]\!] \times 1_{[\![T_1]\!]})) = &&\\
= [\![t]\!] & && \square
\end{aligned}$$

Prawdziwe jest również twierdzenie odwrotne (o pełności), stwierdzające, że jeśli dana równość zachodzi w dowolnej kategorii kartezjańsko zamkniętej, to jest dowodliwa syntaktycznie. Podobnie jak w klasycznej teorii modeli, dowód polega na zbudowaniu odpowiedniej konstrukcji z termów (modulo $\beta$- i $\eta$-równoważność), zwanej *kategorią syntaktyczną* lub *klasyfikującą*. Obiektami takiej kategorii są konteksty, zaś morfizmami podstawienia. Łatwo sprawdzić, że taka kategoria jest kartezjańsko zamknięta, a jako konstrukcja z termów spełnia tylko niezbędne równości.