System BCD z κ

Adam Slaski
na podstawie wykładów, notatek
i uwag Pawła Urzyczyna

Semestr letni 2009/10*

Rozważamy system BCD ze stałą typową κ i aksjomatami $\omega \to \kappa \leqslant \kappa$ i $\kappa \leqslant \omega \to \kappa$.

W pierwszej części tej notatki będziemy dążyli do udowodnienia *twierdzenia o aproksymacji*, które pozwoli nam interpretować termy (nawet nie mające postaci normalnej) za pomocą tak zwanych aproksymantów. Ogólny dowód tego twierdzenia dla wielu różnych systemów można znaleźć w pracy *Approximation Theorems for Intersection Type Systems* Dezani, Honsella i Motohamy z roku 2001. Następnie pokażemy pewną zaskakującą własność modelu z filtrów dla systemu z κ, mianowicie że jest on izomorficzny z D_∞.

Twierdzenie o aproksymacji

Definicja 1. Jeśli T_1, T_2 drzewa Böhma, to $T_1 \sqsubseteq T_2$ oznacza, że T_1 powstaje z T_2 przez zastąpienie jakichś poddrzew etykietami Ω.

Definicja 2. **Aproksymant** to term w postaci normalnej, który może zawierać stałą Ω. Dla dowolnego M zbiorem aproksymantów nazywamy

$$\boldsymbol{A}(M) = \{A \mid A \text{ aproksymant oraz } A \sqsubseteq \mathrm{BT}(M)\}$$

Definicja 3.

1. Powiemy, że term M jest **aproksymowalny** dla Γ, τ, jeśli $\Gamma \vdash A : \tau$ dla pewnego $A \in \boldsymbol{A}(M)$. Piszemy wtedy $M \in \mathrm{App}(\Gamma, \tau)$.
2. Zbiór $\mathrm{Comp}(\Gamma, \tau)$ zadany jest następującymi warunkami:
   (a) $\mathrm{Comp}(\Gamma, \omega) = \mathrm{App}(\Gamma, \omega)$, to zbiór wszystkich termów,
   (b) $\mathrm{Comp}(\Gamma, \kappa) = \mathrm{App}(\Gamma, \kappa)$,
   (c) $\mathrm{Comp}(\Gamma, \sigma \cap \tau) = \mathrm{Comp}(\Gamma, \sigma) \cap \mathrm{Comp}(\Gamma, \tau)$,
   (d) $M \in \mathrm{Comp}(\Gamma, \sigma \to \tau)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $N \in \mathrm{Comp}(\Gamma', \sigma)$ zachodzi $MN \in \mathrm{Comp}(\Gamma \oplus \Gamma', \tau)$, gdzie $(\Gamma \oplus \Gamma')(x) = \Gamma(x) \cap \Gamma'(x)$.

   Powiemy, że term M jest **obliczalny** dla Γ, τ, jeśli $M \in \mathrm{Comp}(\Gamma, \tau)$.

*Korekta P.U., maj 2013

Lemat 4. *Zbiór* $\mathrm{Comp}(\Gamma, \tau)$ *jest zamknięty ze względu na* $=_\beta$.

Dowód: Indukcja ze względu na τ. W przypadku stałych korzystamy z tego, że typ zachowuje się przy β-konwersji. ∎

Lemat 5. *Jeśli* $\Gamma \vdash A : \tau$ *oraz* $A \sqsubseteq A'$, *to* $\Gamma \vdash A' : \tau$.

Dowód: Termy A i A' różnią się tym, że niektóre wystąpienia Ω w A zostały w A' zastąpione pewnymi dowolnymi termami. Jednak jeśli $\Gamma \vdash \Omega : \sigma$, to $\sigma = \omega$, a każdy term (w szczególności ten, którym zastąpiono Ω) ma typ ω. (Ścisły dowód jest przez indukcję ze względu na definicję $\Gamma \vdash A : \tau$.) ∎

Lemat 6. *Jeśli* $Mz \in \mathrm{App}(\Gamma(z : \sigma), \tau)$ *oraz* $z \notin \mathrm{FV}(M)$, *to* $M \in \mathrm{App}(\Gamma, \sigma \to \tau)$.

Dowód: Załóżmy, że $\Gamma(z : \sigma) \vdash A : \tau$, gdzie $A \in \boldsymbol{A}(Mz)$ i rozważmy trzy przypadki:

1. $M =_\beta \lambda z\, M'$. Zauważmy, że $M =_\beta \lambda z. Mz$, więc $\lambda z A \in \boldsymbol{A}(M)$ oraz $\Gamma \vdash \lambda z A : \sigma \to \tau$.
2. M nie ma czołowej postaci normalnej. Wtedy Mz też jej nie ma, czyli $A = \Omega$. Zatem $\tau = \omega$, a wtedy $\Omega \in \boldsymbol{A}(M)$ oraz $\Gamma \vdash \Omega : \omega = \sigma \to \omega$.
3. $M =_\beta x\vec{M}$. To oznacza, że A jest postaci $x\vec{A}Z$, gdzie $A_i \in \boldsymbol{A}(M_i)$ oraz $Z \in \boldsymbol{A}(z)$. Wtedy $Z = \Omega$ lub $Z = z$, oraz $x\vec{A} \in \boldsymbol{A}(M)$. Z lematu o generowaniu wynika, że $\Gamma, z : \sigma \vdash x\vec{A} : \alpha \to \tau$, gdzie α jest typem Z w otoczeniu $\Gamma(z : \sigma)$. Wtedy $\alpha \geqslant \sigma$, więc $\alpha \to \tau \leqslant \sigma \to \tau$. Stąd $\Gamma, z : \sigma \vdash x\vec{A} : \sigma \to \tau$, a ponieważ z nie jest wolne w $x\vec{A}$, więc $\Gamma \vdash x\vec{A} : \sigma \to \tau$. ∎

Lemat 7.

1. *Jeśli* $x\vec{L} \in \mathrm{App}(\Gamma, \sigma)$, *to* $x\vec{L} \in \mathrm{Comp}(\Gamma, \sigma)$.
2. *Jeśli* $M \in \mathrm{Comp}(\Gamma, \sigma)$, *to* $M \in \mathrm{App}(\Gamma, \sigma)$.

Dowód: Jednoczesna indukcja ze względu na typ. Dla stałych teza wynika wprost z definicji.

Przypadek iloczynu ($\tau \cap \rho$):
1. Istnieje takie $A \in \boldsymbol{A}(x\vec{L})$, że $\Gamma \vdash A : \tau$ i $\Gamma \vdash A : \rho$. Dalej z założenia indukcyjnego.
2. Zakładamy $M \in \mathrm{Comp}(\Gamma, \tau \cap \rho)$. Z definicji, $M \in \mathrm{Comp}(\Gamma, \tau)$ oraz $M \in \mathrm{Comp}(\Gamma, \rho)$. Z założenia indukcyjnego wiemy, że M ma w otoczeniu Γ aproksymanty $A : \tau$ i $B : \rho$. Na mocy lematu 5 możemy znaleźć taki aproksymant, który ma oba typy, a więc ma typ $\tau \cap \rho$.

Przypadek implikacji ($\rho \to \tau$):
1. Aproksymantem dla $x\vec{L}$ albo jest Ω (wtedy oczywiste) albo term postaci $x\vec{A}$, gdzie $A_i \in \boldsymbol{A}(L_i)$. Wtedy $\Gamma \vdash x\vec{A} : \rho \to \tau$. Mamy udowodnić, że $x\vec{L} \in \mathrm{Comp}(\Gamma, \rho \to \tau)$. W tym celu przypuśćmy, że $N \in \mathrm{Comp}(\Gamma', \rho)$. Z założenia indukcyjnego (2) mamy $N \in \mathrm{App}(\Gamma', \rho)$, czyli istnieje $B \in \boldsymbol{A}(N)$, takie że $\Gamma' \vdash B : \rho$. Zatem $x\vec{A}B \in \boldsymbol{A}(x\vec{L}N)$ oraz $\Gamma \oplus \Gamma' \vdash x\vec{A}B : \tau$, czyli $x\vec{L}N \in \mathrm{App}(\Gamma \oplus \Gamma', \tau)$. Z założenia indukcyjnego (1) wynika $x\vec{L}N \in \mathrm{Comp}(\Gamma \oplus \Gamma', \tau)$. Zatem z definicji Comp otrzymujemy $x\vec{L} \in \mathrm{Comp}(\Gamma, \tau \to \rho)$.

2. Załóżmy, że $M \in \mathrm{Comp}(\Gamma, \rho \to \tau)$. Niech x będzie nową zmienną, wtedy z założenia indukcyjnego (1) wiemy, że $x \in \mathrm{Comp}(\{x : \rho\}, \rho)$, bo x sam jest swoim aproksymantem. Stąd wnioskujemy, że $Mx \in \mathrm{Comp}(\Gamma(x : \rho), \tau)$. Z założenia indukcyjnego (2) mamy $Mx \in \mathrm{App}(\Gamma(x : \rho), \tau)$, a więc na mocy lematu 6 wnioskujemy, że $M \in \mathrm{App}(\Gamma, \rho \to \tau)$. ∎

Lemat 8. *Jeśli $\sigma \leqslant \tau$ oraz $M \in \mathrm{Comp}(\Gamma, \sigma)$, to $M \in \mathrm{Comp}(\Gamma, \tau)$.*

Dowód: Indukcja ze względu na definicję $\leqslant$. Większość przypadków wynika wprost z definicji. Nietrywialne są jedynie $\omega \to \kappa \leqslant \kappa$ i $\kappa \leqslant \omega \to \kappa$.

Rozpatrzmy pierwszą nierówność. Załóżmy, że $M \in \mathrm{Comp}(\Gamma, \omega \to \kappa)$. Jednak z lematu 7 wiemy, że $\mathrm{Comp}(\Gamma, \omega \to \kappa) \subseteq \mathrm{App}(\Gamma, \omega \to \kappa)$, czyli istnieje aproksymant A termu M dla $\Gamma, \omega \to \kappa$. Wiemy, że $\omega \to \kappa \leqslant \kappa$, czyli $\Gamma \vdash A : \kappa$, a zatem z definicji Comp wynika, że $M \in \mathrm{Comp}(\Gamma, \kappa)$.

W przypadku drugiej nierówności potrzebujemy $\mathrm{App}(\Gamma, \kappa) \subseteq \mathrm{Comp}(\Gamma, \omega \to \kappa)$. Załóżmy, że $M \in \mathrm{App}(\Gamma, \kappa)$, czyli $\Gamma \vdash A : \kappa$ dla pewnego $A \in \boldsymbol{A}(M)$. Chcemy by $MN \in \mathrm{Comp}(\Gamma, \kappa) = \mathrm{App}(\Gamma, \kappa)$, gdzie N dowolne. Szukamy $B \in \boldsymbol{A}(MN)$, takiego że $\Gamma \vdash B : \kappa$. Rozpatrzmy dwa przypadki:

Przyp. 1: $A = x\vec{A}$, czyli $M =_\beta x\vec{M}$. Wtedy $B = x\vec{A}\Omega : \kappa$.

Przyp. 2: $A = \lambda x C$, czyli $M =_\beta \lambda x P$. Wtedy $MN =_\beta P[x := N]$, więc $C[x := \Omega] \in \boldsymbol{A}(P[x := N])$. Wiemy, że $\Gamma \vdash \lambda x C : \kappa$, czyli $\Gamma, x : \omega \vdash C : \kappa$, a zatem $\Gamma \vdash C[x := \Omega] : \kappa$. Przyjmujemy $B = C[x := \Omega]$. ∎

Lemat 9. *Załóżmy, że $\Gamma = \{x_1 : \sigma_1, \ldots, x_n : \sigma_n\}$ oraz $\Gamma \vdash M : \tau$. Jeśli $N_i \in \mathrm{Comp}(\Gamma_i, \sigma_i)$, to*

$$M\left[\vec{x} := \vec{N}\right] \in \mathrm{Comp}\left(\bigoplus_{i=1}^{n} \Gamma_i \oplus \Gamma, \tau\right).$$

Dowód: Indukcja ze względu na długość wyprowadzenia $\Gamma \vdash M : \tau$. Przypadki bazowe są trywialne. Przypadek, gdy ostatnią zastosowaną regułą było wprowadzanie iloczynu lub eliminacja strzałki wynika wprost z definicji, zaś gdy była to ($\leqslant$) – z lematu 8. Pozostaje rozważyć przypadek wprowadzania strzałki. Niech $M = \lambda y.M'$ i $\Gamma \vdash M : \sigma \to \tau$ będzie otrzymane z $\Gamma, y : \sigma \vdash M' : \tau$. Wtedy z założenia indukcyjnego, dla obliczalnych N_i i $\widetilde{N}$ mamy

$$M'\left[\vec{x} := \vec{N}, y := \widetilde{N}\right] \in \mathrm{Comp}\left(\bigoplus_{i=1}^{n} \Gamma_i \oplus \widetilde{\Gamma} \oplus \Gamma, \tau\right).$$

Teraz zgodnie z definicją Comp wystarczy pokazać, że dla dowolnych obliczalnych N_i i $\widetilde{N}$ zachodzi

$$\left(\lambda y.M'\left[\vec{x} := \vec{N}\right]\right)\widetilde{N} \in \mathrm{Comp}\left(\bigoplus_{i=1}^{n} \Gamma_i \oplus \widetilde{\Gamma} \oplus \Gamma, \tau\right).$$

Ale $\left(\lambda y.M'\left[\vec{x} := \vec{N}\right]\right)\widetilde{N} =_\beta M'\left[\vec{x} := \vec{N}, y := \widetilde{N}\right]$, co kończy dowód. ∎

Twierdzenie 10 (o aproksymacji). $\Gamma \vdash M : \tau$ *wtedy i tylko wtedy, gdy $M \in \mathrm{App}(\Gamma, \tau)$.*

Dowód: ($\Rightarrow$) Zmienne są obliczalne, więc $M = M[\vec{x} := \vec{x}] \in \mathrm{Comp}(\Gamma, \tau)$ na mocy lematu 9. Z lematu 7 p. 2 mamy $\mathrm{Comp}(\Gamma, \tau) \subseteq \mathrm{App}(\Gamma, \tau)$.

($\Leftarrow$) Załóżmy, że $\Gamma \vdash A : \tau$ dla $A \in \boldsymbol{A}(M)$. Postępujemy dalej przez indukcję ze względu na wyprowadzenie typu dla A. Rozważymy przypadki (pozostałe są łatwe):

($\to$ I) Wtedy $A = \lambda x.B$ i $\Gamma, x : \rho \vdash B : \sigma$, $\tau = \rho \to \sigma$. Zatem $M =_\beta \lambda x M'$ i $B \in \boldsymbol{A}(M')$.

($\to$ E) Wtedy $A = x\vec{B}C$, gdzie $\Gamma \vdash x\vec{B} : \rho \to \tau$ i $\Gamma \vdash C : \rho$. Teraz $M =_\beta x\vec{N}P$ i stosujemy założenie indukcyjne do $x\vec{B} \in \boldsymbol{A}(x\vec{N})$, $C \in \boldsymbol{A}(P)$. Otrzymujemy $\Gamma \vdash x\vec{N} : \rho \to \tau$ i $\Gamma \vdash P : \rho$, co oznacza, że $\Gamma \vdash M : \tau$. ∎

Term M ma nietrywialnego aproksymanta wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{BT}(M) \neq \bot$. A zatem z twierdzenia o aproksymacji wynikają takie wnioski:

Wniosek 11. *Term ma czołową postać normalną wtedy i tylko wtedy, gdy ma typ różny od ω.*

Wniosek 12. *Term M ma postać normalną wtedy i tylko wtedy, gdy $\Gamma \vdash M : \tau$, gdzie ani w Γ ani w τ nie ma ω.*

Dowód: Z lewej do prawej: Każda postać normalna jest typowalna bez ω (indukcja), a beta-równość zachowuje typy. Na odwrót: aproksymant typowalny bez ω nie może mieć wystąpień Ω, bo jedynym typem Ω jest ω, która pozostałaby w typie końcowym. ∎

Model z filtrów a model D_∞

Przechodzimy teraz do drugiej części tematu.

Definicja 13. Element a jest **zwarty** w cpo D, gdy dla każdego zbioru skierowanego S prawdą jest, że jeśli $a \leqslant \sup S$, to $a \leqslant s$ dla pewnego $s \in S$. Powiemy, że krata jest **algebraiczna**, jeżeli każdy jej element jest sumą elementów zwartych.

Przykład 14. Następujące obiekty są kratami algebraicznymi:

- $\mathscr{P}(X)$ – elementami zwartymi są zbiory skończone,
- D_∞ dla $D_0 = \left\{ \begin{smallmatrix} \top \\ \bot \end{smallmatrix} \right\}$ – zwarte są te elementy, które dla pewnego n należą do D_n,
- rodzina wszystkich filtrów w zbiorze typów iloczynowych – zwarte są filtry główne.

Będziemy rozważać kratę algebraiczną z operacją $(\cdot)$. Stożkiem nad a (oznaczenie $a\!\uparrow$) nazywamy zbiór $\{b \mid a \leqslant b\}$. Ponadto przyjmujemy $a \Rightarrow b = \{x \in D \mid \text{jeśli } y \in a, \text{ to } x \cdot y \in b)\}$, gdzie D jest kratą algebraiczną. Zauważmy, że

$$a\!\uparrow \cap\, b\!\uparrow = (a \cup b)\!\uparrow \qquad \text{oraz} \qquad (a\!\uparrow \Rightarrow b\!\uparrow) = (a \nearrow b)\!\uparrow,$$

gdzie

$$(a \nearrow b) = \lambda\!\!\lambda x.\, \textbf{if}\ x \geqslant a\ \textbf{then}\ b\ \textbf{else}\ \bot.$$

Fakt 15. *Jeżeli a i b zwarte, to $(a \nearrow b)$ oraz $a \cup b$ są zwarte.*

Morał 16. *Dla zwartych a, rodzina stożków $a\!\uparrow$ w kracie algebraicznej D jest zamknięta ze względu na $\cap$ oraz $\Rightarrow$. Jeśli $a \subseteq a'$ i $b \subseteq b'$, to $a \cap b \subseteq a' \cap b'$ oraz $a' \Rightarrow b \subseteq a \Rightarrow b'$. Zachodzą też zawierania:*

$a \cap b \subseteq a$, $a \cap a = a$, $a \subseteq D$, $D \subseteq D \Rightarrow D$, $(a\!\uparrow \Rightarrow b\!\uparrow) \cap (a\!\uparrow \Rightarrow c\!\uparrow) = a\!\uparrow \Rightarrow (b\!\uparrow \Rightarrow c\!\uparrow)$, $\top\!\uparrow = D \Rightarrow \top\!\uparrow$.

Lemat 17. *Jeśli* $\bigcap_i (a_i{\uparrow} \Rightarrow b_i{\uparrow}) \subseteq a{\uparrow} \Rightarrow b{\uparrow}$ *to* $\bigcap_{a_i \leqslant a} b_i{\uparrow} \subseteq b{\uparrow}$.

Dowód: Ćwiczenie. ∎

Rozważamy teraz typy z dwoma stałymi i nierównościami $\kappa \leqslant \kappa \to \omega \leqslant \kappa$ oraz $\omega \leqslant \omega \to \omega \leqslant \omega$. Dla dowolnego typu τ definiujemy $[\![\tau]\!] \subseteq D_\infty$:

- $[\![\omega]\!] = D_\infty = \bot{\uparrow}$,
- $[\![\kappa]\!] = \{\top\} = \top{\uparrow}$,
- $[\![\tau \cap \sigma]\!] = [\![\tau]\!] \cap [\![\sigma]\!]$,
- $[\![\tau \to \sigma]\!] = [\![\tau]\!] \Rightarrow [\![\sigma]\!]$.

Fakt 18. *Każde* $[\![\tau]\!]$ *jest postaci* $a_\tau{\uparrow}$, *gdzie* a_τ *zwarte.*

Fakt 19. *Jeśli* $d \in D_\infty$ *zwarty, to* $d{\uparrow} = [\![\tau]\!]$ *dla pewnego* τ.

Fakt 20. $\tau \leqslant \sigma$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $[\![\tau]\!] \subseteq [\![\sigma]\!]$.

Fakt 21. $\tau \leqslant \sigma$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $a_\tau \geqslant a_\sigma$.

Dla $d \in D_\infty$ niech

$$F_d = \{\tau \mid d \in [\![\tau]\!]\} = \{\tau \mid d \in a_\tau{\uparrow}\} = \{\tau \mid a_\tau \leqslant d\}.$$

Lemat 22. *Przekształcenie* $d \mapsto F_d$ *jest różnowartościowe i zachowuje porządek.*

Dowód: Jeśli $d \leqslant e$, to $\tau \in F_d$ pociąga za sobą $\tau \in F_e$, a więc porządek jest zachowany. Pokażemy teraz, że przekształcenie jest różnowartościowe. Załóżmy, że $d \neq e$ i przyjmijmy bez straty ogólności, że $d \not\geqslant e$. Wtedy z algebraiczności wnioskujemy, że istnieje element zwarty a, taki, że $a \leqslant e$ i $a \not\leqslant d$. Skoro $a{\uparrow} = [\![\tau]\!]$, to $e \in a{\uparrow} = [\![\tau]\!]$, ale $d \notin a{\uparrow} = [\![\tau]\!]$, a zatem $\tau \in F_e - F_d$. ∎

Lemat 23. *Każdy filtr* F *jest postaci* F_d *(przypisanie* $d \mapsto F_d$ *jest „na").*

Dowód: Weźmy $d = \sup_{\tau \in F} a_\tau$. Chcemy pokazać, że $F = F_d$, tj. że $\tau \in F$ wtedy i tylko wtedy, gdy $d \in [\![\tau]\!]$ (czyli $d \geqslant a_\tau$).

($\Rightarrow$) Jeśli $\tau \in F$, to $a_\tau \leqslant d$ z definicji.

($\Leftarrow$) Zakładamy $d \geqslant a_\tau$. Wiemy, że d jest kresem górnym zbioru $S = \{a_\sigma \mid \sigma \in F\}$. Z tego, że F, jako filtr, jest domknięty ze względu na iloczyn, oraz z faktu 21 wnioskujemy, że S jest zbiorem skierowanym. Z faktu 18 wiemy, że a_τ jest zwarte, a zatem z definicji 13 wynika, że musi istnieć takie $\rho \in F$, że $a_\tau \leqslant a_\rho$. Stąd na mocy faktu 21 mamy $\rho \leqslant \tau$, a w takim razie z definicji filtru wynika, że $\tau \in F$. ∎

Lemat 24. *Przekształcenie $d \mapsto F_d$ jest izomorfizmem algebraicznym, czyli $F_{d \cdot e} = F_d \cdot F_e$.*

Dowód: ($\supseteq$) Załóżmy, że $\sigma \in F_d \cdot F_e$. To oznacza, że istnieje takie $\rho \in F_e$, że $\rho \to \sigma \in F_d$. Mamy $e \in [\![\rho]\!]$ oraz $d \in [\![\rho \to \sigma]\!] = [\![\rho]\!] \Rightarrow [\![\sigma]\!]$. Wtedy $d \cdot e \in [\![\sigma]\!]$, czyli $\sigma \in F_{d \cdot e}$.

($\subseteq$) Załóżmy, że $\tau \in F_{d \cdot e}$, czyli $d \cdot e \in [\![\tau]\!]$, czyli $d \cdot e \geqslant a_\tau$. Z ciągłości mamy $a_\tau \leqslant c \cdot b$ dla pewnych c, b zwartych i takich że $c \leqslant d$ oraz $b \leqslant e$. Oczywiście $b = a_\rho$ dla pewnego ρ. To znaczy, że $a_\tau \leqslant c \cdot a_\rho$, czyli $c \geqslant a_\rho \nearrow a_\tau$, a więc i $d \geqslant a_\rho \nearrow a_\tau = a_{\rho \to \tau}$. To oznacza, że $\rho \to \tau \in F_d$ oraz $a_\rho = b \leqslant e$, czyli $\rho \in F_e$. Ostatecznie otrzymujemy $\tau \in F_d \cdot F_e$. ∎

Morał 25. *D_∞ jest izomorficzny z modelem z filtrów dla typów iloczynowych ze stałymi ω i κ spełniającymi równania $\omega \to \kappa \leqslant \kappa$ i $\kappa \leqslant \omega \to \kappa$.*

Wniosek 26 (Twierdzenie Hylanda i Wadswortha o aproksymacji)**.**
Dla każdego termu M i wartościowania v w modelu D_∞ zachodzi

$$[\![M]\!]_v = \sup_{A \in \mathcal{A}(M)} [\![A]\!]_v.$$

Dowód: W modelu z filtrów $[\![M]\!]_v = \{\tau \mid \text{istnieje takie } \Gamma, \text{ że } \Gamma \vdash M : \tau \text{ oraz } \Gamma(x) \in v(x)\}$. Z twierdzenia 10 o aproksymacji wynika natychmiast:

$$[\![M]\!]_v = \bigcup_{A \in \mathcal{A}(M)} [\![A]\!]_v.$$

Z izomorfizmu wynika, że w modelu D_∞ zachodzi to samo. ∎