Podstawy matematyki – egzamin poprawkowy 22 lutego 2024

1. Relacja $\sim$ w zbiorze funkcji $\mathbb{N} \to \mathsf{P}(\mathbb{N})$ jest określona tak: $f \sim g$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy równoważność:

   $$f(n) \text{ jest skończony wtedy i tylko wtedy, gdy } g(n) \text{ jest skończony.}$$

   (a) Udowodnić, że $\sim$ jest relacją równoważności.

   (b) Jaka jest moc zbioru ilorazowego relacji $\sim$?

   (c) Jakie liczby kardynalne są mocami klas abstrakcji relacji $\sim$?

2. Niech $F : (\mathbb{N} \to \mathbb{N}) \to (\mathbb{N} \to \mathbb{N})$ będzie funkcją zdefiniowaną następująco:

   $$F(f) = \lambda x.\texttt{if } f^{-1}(\{x\}) \neq \varnothing \texttt{ then } \min f^{-1}(\{x\}) \texttt{ else } 0.$$

   (a) Czy funkcja F jest różnowartościowa?

   (b) Czy funkcja F jest na $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$?

   (c) Czy $\mathsf{Inj} \subseteq \mathrm{Rg}(F)$, gdzie Inj to rodzina wszystkich injekcji z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$?

   (d) Czy $F(\mathsf{Bij}) = \mathsf{Bij}$, gdzie Bij to rodzina wszystkich bijekcji?

   (e) Czy $F^{-1}(\mathsf{St}) = \mathsf{St}$, gdzie St to rodzina wszystkich funkcji stałych?

3. Niech $K = \langle \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \leq \rangle$ i niech $P = \langle \mathbb{N}, \mid \rangle$, gdzie:

   - $\langle x_1, y_1 \rangle \leq \langle x_2, y_2 \rangle$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_1 \leq x_2$ i $y_1 \leq y_2$;
   - $m \mid n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\exists k \in \mathbb{N}.\, m \cdot k = n$. (Uwaga: $n \mid 0$ dla każdego n.)

   (a) Czy w zbiorze K istnieje podzbiór izomorficzny z P?

   (b) Czy w zbiorze P istnieje podzbiór izomorficzny z K?

   (c) Co się zmieni w odpowiedziach (a) i (b), jeśli zamiast P weźmiemy porządek $P' = \langle \mathbb{N} - \{0\}, \mid \rangle$?

Uwaga: W rozwiązaniach można się powoływać na ogólnie znane fakty (np. z wykładu, skryptu, wspólnych zadań domowych).

Rozwiązania

1a: Relacja $\sim$ jest jądrem przekształcenia $F : (\mathbb{N} \to \mathsf{P}(\mathbb{N})) \to \mathsf{P}(\mathbb{N})$, które każdej funkcji $f : \mathbb{N} \to \mathsf{P}(\mathbb{N})$ przypisuje zbiór $F(f) = f^{-1}(\mathsf{P}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N})) = \{n \mid f(n) \text{ jest skończony}\}$.

1b: Skoro nasza relacja jest jądrem przekształcenia F, to jej zbiór ilorazowy jest równoliczny z $\mathrm{Rg}(F)$. (Mamy po jednej klasie na każde $A \in \mathrm{Rg}(F)$.) Ale każdy zbiór $A \in \mathsf{P}(\mathbb{N})$ należy do $\mathrm{Rg}(F)$, bo $A = F(f) = f^{-1}(\mathsf{P}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N}))$ dla funkcji $f = \lambda n.\,\mathtt{if}\ n \in A\ \mathtt{then}\ \varnothing\ \mathtt{else}\ \mathbb{N}$. Zatem $\mathrm{Rg}(F) = \mathsf{P}(\mathbb{N})$, więc zbiór ilorazowy relacji $\sim$ ma moc continuum.

1c: Udowodnimy, że każda klasa abstrakcji ma moc $\mathfrak{C}$. Rozpatrzmy dowolną klasę $[f]_\sim$. Oczywiście $[f]_\sim \subseteq \mathsf{P}(\mathbb{N})^{\mathbb{N}}$, więc $\overline{\overline{[f]_\sim}} \leq \mathfrak{C}^{\aleph_0} = \mathfrak{C}$. Dla ograniczenia dolnego niech $Z = f^{-1}(\mathsf{P}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N}))$. Dla dowolnego $A \subseteq \mathbb{N}$ określmy $f_A(x) = \mathtt{if}\ x \in Z\ \mathtt{then}\ \{\chi_A(x)\}\ \mathtt{else}\ \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq \chi_A(x)\}$. Po pierwsze zauważmy, że dla każdego $A \subseteq \mathbb{N}$ zachodzi $f_A \sim f$. Istotnie, $f_A(n)$ i $f(n)$ są zbiorami skończonymi dla $n \in Z$ oraz zbiorami nieskończonymi w przeciwnym przypadku. Po drugie, jeśli $a \in A - B$, to $0 \notin f_A(a)$ ale $0 \in f_B(a)$, a więc $f_A \neq f_B$. Wynika stąd, że przekształcenie $\lambda A.\, f_A$ jest funkcją różnowartościową z $\mathsf{P}(\mathbb{N})$ w $[f]_\sim$. A zatem $\mathfrak{C} \leq \overline{\overline{[f]_\sim}}$ i możemy zastosować twierdzenie Cantora-Bernsteina.

2a: Nie, na przykład $F(\lambda x.0) = F(\lambda x.1) = \lambda x.0$, bo dla każdej funkcji stałej $f_c = \lambda x.c$ zachodzi $F(f_c) = \lambda x.0$. Mamy bowiem $f_c^{-1}(\{c\}) = \{n \mid f_c(n) = c\} = \mathbb{N}$, skąd $F(f_c)(c) = \min \mathbb{N} = 0$. A jeśli $x \neq c$, to też $F(f_c)(x) = 0$, ponieważ $f_c^{-1}(\{x\}) = \varnothing$.

2b: Nie, bo nie ma takiej funkcji f, że $F(f) = \lambda x.1$. W przeciwnym razie $F(f)(2) = F(f)(3) = 1$, a skoro $1 \neq 0$, to $1 = \min\{n \mid f(n) = 2\} = \min\{n \mid f(n) = 3\}$, z czego wynika, że $2 = f(1) = 3$. Tak samo będzie dla każdej funkcji stałej $\lambda x.\, c$, gdy $c \neq 0$.

2c: Nie, np. $s = \lambda x.\, x + 1 \notin \mathrm{Rg}(F)$. Przypuśćmy, że $F(f) = s$, oraz $f(0) = n$. Wtedy zbiór $f^{-1}(\{n\}) = \{k \mid f(k) = n\}$ jest niepusty, więc $F(f)(n) = \min\{k \mid f(k) = n\} = 0$. Ale zero nie jest następnikiem żadnej liczby.[1]

2d: Tak. Zauważmy, że dla każdej bijekcji f zachodzi $F(f) = f^{-1}$, bo $F(f)(x) = \min f^{-1}(\{x\}) = \min\{f^{-1}(x)\} = f^{-1}(x)$. A zatem jeśli f jest bijekcją, to $F(f)$ też jest bijekcją i stąd wynika inkluzja $F(\mathsf{Bij}) \subseteq \mathsf{Bij}$. Zawieranie w przeciwną stronę też oczywiście zachodzi, gdyż dla każdej bijekcji f mamy $F(f^{-1}) = (f^{-1})^{-1} = f$. A zatem $F(\mathsf{Bij}) = \mathsf{Bij}$.

2e: Tak. Zawieranie $\mathsf{St} \subseteq F^{-1}(\mathsf{St})$ pokazaliśmy już w rozwiązaniu 2a: operacja F przypisuje każdej funkcji stałej tę samą funkcję $\lambda x.0$.

Aby udowodnić zawieranie w przeciwną stronę, przypuśćmy, że $F(f) = \lambda x.\, c$, dla pewnego c. Niech $d \in \mathrm{Rg}(f)$ będzie dowolną wartością przyjmowaną przez funkcję f. Jeśli $k = \min\{l \mid f(l) = d\}$, to $F(f)(d) = k$. Ale skoro $F(f) = \lambda x.\, c$, to $k = c$, więc $d = f(k) = f(c)$. No to $\mathrm{Rg}(f) = \{f(c)\}$, czyli f jest funkcją stałą.

3a: Nie, bo w zbiorze P istnieje nieskończenie wiele elementów mniejszych od zera, a w zbiorze K każdy element ma tylko skończenie wiele poprzedników. Nie ma więc wartości, na którą izomorfizm mógłby przeprowadzić zero.

[1] Ogólnie, jeśli $0 \notin \mathrm{Rg}(g)$, to $g \notin \mathrm{Rg}(F)$.

3b: Tak, np. zbiór $A = \{2^m 3^n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$. Jeśli $\varphi(\langle m, n\rangle) = 2^m 3^n$, to funkcja $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to A$ jest izomorfizmem. Istotnie, $2^m 3^n \mid 2^k 3^\ell$ wtedy i tylko wtedy, gdy $m \leq n$ i $n \leq \ell$.

3c: Odpowiedź w punkcie 3b się nie zmieni, bo tu zero nie jest do niczego potrzebne. Odpowiedź na pytanie 3a pozostaje negatywna, bo w P istnieją nieskończone antyłańcuchy (np. zbiór wszystkich liczb pierwszych) a w zbiorze K takich nie ma.

Istotnie, przypuśćmy, że A jest antyłańcuchem w K. Bez straty ogólności możemy założyć, że jest to antyłańcuch niepusty. Niech $x_0 = \min\{x \mid \exists y.\, \langle x, y\rangle \in A\}$ oraz $y_0 = \min\{y \mid \exists x.\, \langle x, y\rangle \in A\}$. Wtedy $\langle x_0, y_1\rangle, \langle x_1, y_0\rangle \in A$, dla pewnych x_1, y_1.

Weźmy teraz dowolny element $\langle x, y\rangle \in A$. Oczywiście $x_0 \leq x$ i $y_0 \leq y$. Ale także $x \leq x_1$ i $y \leq y_1$. Rzeczywiście: gdyby np. $x > x_1$, to $\langle x_1, y_0\rangle < \langle x, y\rangle$, a różne elementy antyłańcucha nie mogą być porównywalne. A zatem cały antyłańcuch A zawiera się w skończonym „prostokącie" $\{x_0, \ldots, x_1\} \times \{y_0, \ldots, y_1\}$.