Zadania z rachunku lambda[1]

R 1. Nie korzystając ze znanych definicji dodawania, mnożenia, poprzednika, itp., napisać lambda-termy definiujące funkcje $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, gdzie

   (a) $f(n) = n^2 + n + 1$;

   (b) $g(n) = n^2 - n + 1$.

   Czy te funkcje są definiowalne w rachunku lambda z typami prostymi? Czy są definiowalne w polimorficznym rachunku lambda?

R 2. (a) Napisać term Id typu $\omega_{p\to p} \to \omega_p$ definiujący na liczebnikach Churcha funkcję identycznościową (tj. taki, że $\mathrm{Id}\,\mathbf{n} \twoheadrightarrow \mathbf{n}$, dla dowolnego n.)

   (b) Czy w rachunku lambda z typami prostymi istnieje kombinator J, który definiuje funkcję identycznościową w $\mathbb{N}$ i ma typ $\omega_p \to \omega_{p\to p}$, gdzie p jest zmienną typową?

   (c) Czy istnieje taki kombinator typu $\omega_p \to \omega_q$, gdzie q jest zmienną różną od p?

R 3. Napisać term H definiujący funkcję $h(n) = n^2 - 2n + 5$ w rachunku lambda bez typów, nie wykorzystując dodawania, mnożenia, poprzednika, itp.

R 4. *Liczebniki Parigota*, to kombinatory postaci $P_n = \lambda xf.\, fP_{n-1}(fP_{n-2}(\ldots(fP_0x)\ldots))$, gdzie $P_0 = \mathbf{K}$. Na przykład $P_2 = \lambda xf.f[\lambda x'f'.f'\mathbf{K}x'](f\mathbf{K}x)$.

   (a) Zdefiniować operacje następnika i poprzednika dla liczebników Parigota.

   (b) Nie używając operatorów punktu stałego zdefiniować *rekursor*, tj. taki term $\mathbf{R}$, że:
   $$\mathbf{R}P_0BF =_\beta B \qquad \text{oraz} \qquad \mathbf{R}P_{n+1}BF =_\beta FP_n(\mathbf{R}P_nBF)$$
   dla dowolnych termów B, F i dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

   (c) Zdefiniować operację dodawania dla liczebników Parigota.

   (d) Czy term P_2 jest typowalny w rachunku lambda z typami prostymi?

R 5. (a) Czy istnieją takie termy M, N, że $M =_\beta \lambda x.\, NxMx$ oraz $N =_\beta \lambda xy.\, MyNx$?
   (b) A czy istnieją takie termy M, N, że $M =_\beta \lambda x.\, xNMx =_\beta \lambda xy.\, yMNx$?

6. Czy istnieją takie termy M_1, M_2, M_3, że:
$$M_1 =_\beta M_1\mathbf{S}M_1? \qquad M_2xxM_2 =_\beta M_2xM_2? \qquad xM_3 =_\beta xM_3x?$$

R 7. Skonstruować taki kombinator $\mathbf{X}$, że
$$\mathbf{X}(\lambda yz.y(yz(yy))z) \twoheadrightarrow_{\beta\eta} \mathbf{K}; \qquad \text{oraz} \qquad \mathbf{X}(\lambda yz.y(yz(yz))z) \twoheadrightarrow_{\beta\eta} \mathbf{S}.$$

R 8. Skonstruować taki kombinator $\mathbf{X}$, że
$$\mathbf{X}(\lambda xy.\, xx(xxxy)(\lambda x.\, yx)) \twoheadrightarrow_\beta \mathbf{1} \qquad \text{oraz} \qquad \mathbf{X}(\lambda xy.\, xx(xyx(\lambda x.\, yx))y) \twoheadrightarrow_\beta \mathbf{2}.$$

R 9. Skonstruować taki term M, że $ML =_\beta$ **true** oraz $MR =_\beta$ **false**, gdzie

- $L = \lambda xy.\, x(\lambda z.\, zx(\lambda u.\, xxu))y$;
- $R = \lambda x.\, x(\lambda z.\, z(\lambda y.\, xy)(\lambda u.\, x(xz)u))$.

[1] Zadania pochodzą m. in. z egzaminów pisemnych, patrz strona 10.

[R]10. Skonstruować taki kombinator $\mathbf{X}$, że

$$\mathbf{X}(\lambda xz.\, x(\lambda u.zu)(\lambda yz.\, y(xyy)z)) \twoheadrightarrow_\beta \mathbf{true} \quad \text{oraz} \quad \mathbf{X}(\lambda xz.\, xz(\lambda y.\, y(xxy))) \twoheadrightarrow_\beta \mathbf{false}.$$

[R]11. Skonstruować taki kombinator $\mathbf{X}$, że

$$\mathbf{X}(\lambda xy.\, x(\lambda z.xz(xz))y) \twoheadrightarrow_\beta \mathbf{K} \qquad \text{oraz} \qquad \mathbf{X}(\lambda x.\, x(\lambda z.xz(xx))) \twoheadrightarrow_\beta \mathbf{S}\,.$$

[R]12. Skonstruować taki term M, że $ML =_\beta \mathbf{true}$ oraz $MR =_\beta \mathbf{false}$, gdzie

$$L = \lambda x.\, x(\lambda y.\, xx(yy(\lambda z.\, zxy)))x;$$
$$R = \lambda x.\, x(\lambda y.\, xx(yy(\lambda z.\, zyx)))x$$

13. Zdefiniować takie kombinatory $\mathbf{X_1}$, $\mathbf{X_2}$, $\mathbf{X_3}$, że:

$\mathbf{X_1}(\lambda xy.\, x(x\mathbf{I}x)(y(\lambda y.\, xy)y)) =_\beta \mathbf{I}$ oraz $\mathbf{X_1}(\lambda xy.\, x(x\mathbf{I}x)(y(\lambda y.\, xx)y)) =_\beta \mathbf{S}$;

$\mathbf{X_2}(\lambda xy.\, x(\lambda z.\, zx)(\lambda z.\, x(yyz)z)) =_\beta \mathbf{true}$ oraz $\mathbf{X_2}(\lambda xy.\, x(\lambda y.\, yx)(\lambda z.\, x(yyx)z)) =_\beta \mathbf{false}$;

$\mathbf{X_3}(\lambda xyz.\, xz(yx(yxx)y)z) =_\beta \mathbf{0}$ oraz $\mathbf{X_3}(\lambda xyz.\, xz(yx(yxy)y)z) =_\beta \mathbf{1}$.

[R]14. Niech $L = \lambda xy.\, x(\lambda w.\, y(xx(yxx))zw)y$ i niech $R = \lambda xy.\, x(y(xx(yxy))z)(\lambda v.\, yv)$. Wskazać taki term M, że $ML =_\beta \mathbf{0}$ oraz $MR =_\beta \mathbf{1}$.

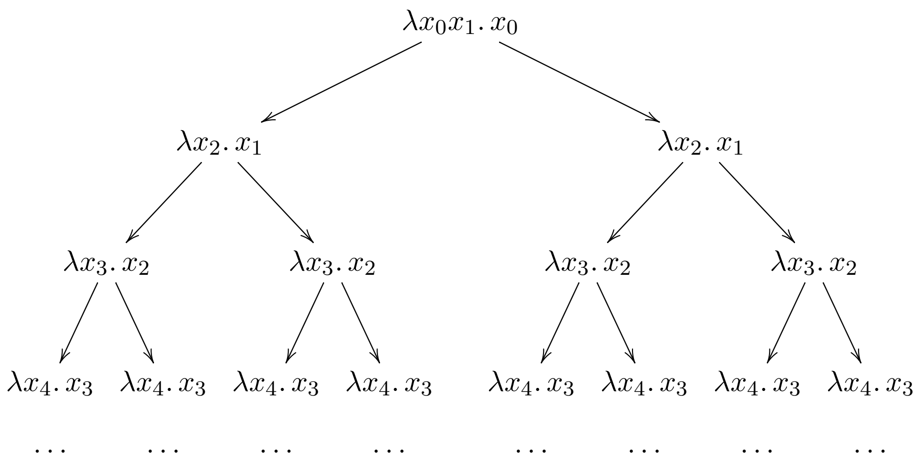
[R]15. Niech $\mathbf{B'} = \lambda txy.\, x(ty)$. Drzewo Böhma termu $\mathbf{YB'}$ ma taką własność: prawie wszystkie zmienne występujące w wierzchołkach drzewa są związane lambda-abstrakcjami znajdującymi się o 1 poziom wyżej („w odległości 1"). Podać przykład termu, w którym „odległość" między lambdą i związaną przez nią zmienną jest prawie zawsze równa 2.

[R]16. Skonstruować taki term M, że (patrz rysunek):

– drzewo Böhma $\mathrm{BT}(M)$ jest pełnym drzewem binarnym;

– w korzeniu tego drzewa jest etykieta $\lambda x_0 x_1.\, x_0$;

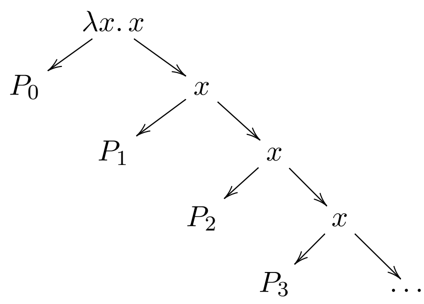
– w każdym wierzchołku dowolnego poziomu $k > 0$ jest etykieta $\lambda x_{k+1}.\, x_k$.



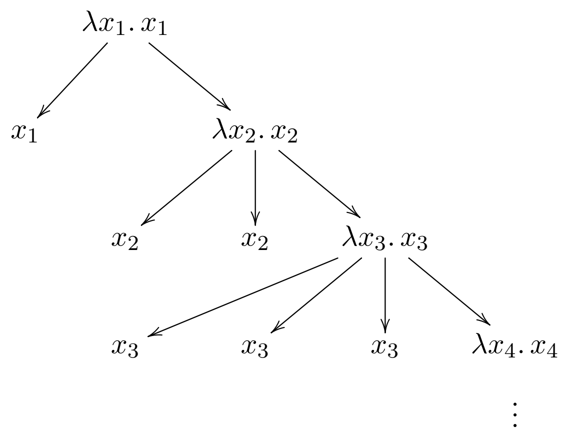
[R]17. Skonstruować term M o takiej własności: drzewo Böhma $\mathrm{BT}(M)$ jest nieskończone i każdy jego wierzchołek ma więcej synów niż miał jego ojciec.

[R]18. Niech M będzie jak w zadaniu 16 i niech $N = \lambda x_0 x_1.\, x_0(\lambda x_2.\, x_1(\lambda x_3.\, x_2))$. Czy istnieje taki kombinator T, że $TN =_\beta \mathbf{K}$, ale $TM =_\beta \mathbf{S}$? Jeśli tak, to jaki?

R 19. Przy oznaczeniach z zadania 4 skonstruować taki kombinator M, że drzewo Böhma $\mathrm{BT}(M)$ ma kształt jak na rysunku:



R 20. Napisać taki term M, którego drzewo Böhma ma na każdym poziomie n dokładnie n liści o etykiecie x_n i jeden wierzchołek o etykiecie $\lambda x_{n+1}.\, x_{n+1}$, na przykład:



R 21. Skonstruować taki term N, że drzewo Böhma $\mathrm{BT}(N)$ ma tylko jedną gałąź, oraz:

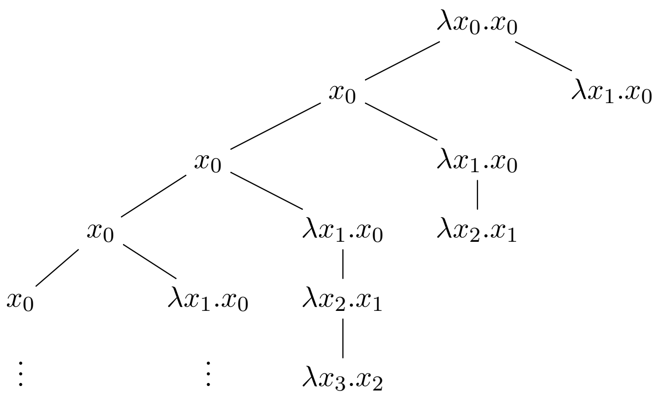
– jeśli $n = k^2$, to na poziomie n jest etykieta $\lambda x_{k+1}.\, x_k$;

– jeśli $k^2 < n < (k+1)^2$, to na poziomie n jest etykieta x_k.

Dla oszczędności miejsca drzewo $\mathrm{BT}(N)$ jest na rysunku przewrócone na bok:

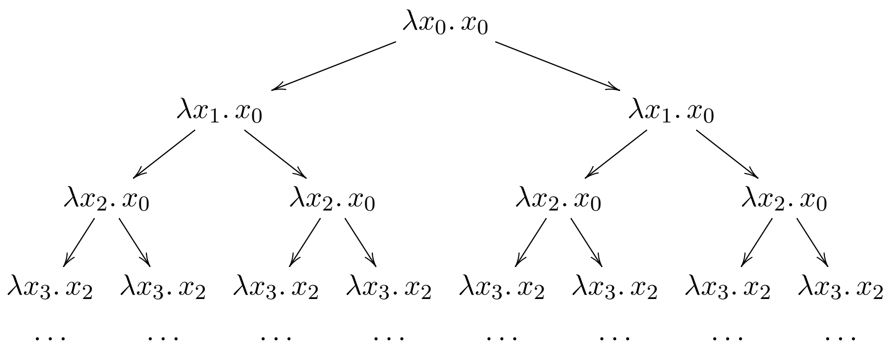
$\lambda x_1.\, x_0$ —— $\lambda x_2.\, x_1$ —— x_1 —— x_1 —— $\lambda x_3.\, x_2$ —— x_2 —— x_2 —— x_2 —— x_2 —— $\lambda x_4.\, x_3 \ldots$.

R 22. Skonstruować taki term N, że drzewo Böhma $\mathrm{BT}(N)$ wygląda tak jak na rysunku. (Drugim argumentem zmiennej x_0 na lewej krawędzi drzewa na głębokości k ma być term $T_k = \lambda x_1.\, x_0(\lambda x_2.\, x_1(\ldots(\lambda x_{k+1}.\, x_k)\ldots))$ wysokości k.)



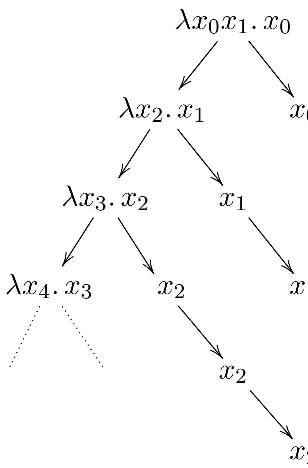
[R]23. Skonstruować taki term M, że (patrz rysunek):

- drzewo Böhma $\mathrm{BT}(M)$ jest pełnym drzewem binarnym;
- w korzeniu tego drzewa jest etykieta $\lambda x_0.\, x_0$;
- w każdym wierzchołku dowolnego poziomu $k > 0$ jest etykieta:
  - $\lambda x_k.\, x_{k-1}$, gdy k jest nieparzyste,
  - $\lambda x_k.\, x_{k-2}$, gdy k jest parzyste.



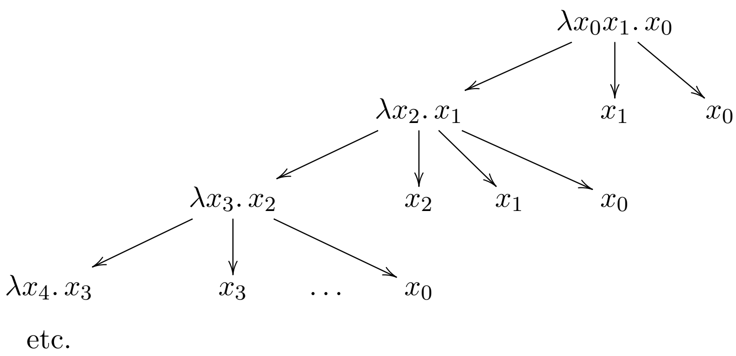
[R]24. Skonstruować taki term M, że (patrz rysunek):

- drzewo $\mathrm{BT}(M)$ ma korzeń $\lambda x_0 x_1.\, x_0$ i jedną gałąź nieskończoną (w lewo);
- wierzchołki na tej gałęzi na poziomach $n > 0$ mają etykiety $\lambda x_{n+1}.\, x_n$;
- z każdego z wierzchołków tej gałęzi wyrasta gałązka długości $n+1$, o wierzchołkach x_n.



[R]25. Skonstruować taki term M, że (patrz rysunek):

– drzewo $\mathrm{BT}(M)$ ma korzeń $\lambda x_0 x_1 .\, x_0$ i jedną gałąź nieskończoną (w lewo);
– wierzchołki na poziomie $n > 0$ mają (od lewej) etykiety $\lambda x_{n+1} .\, x_n$, x_n, $\ldots$, x_0.



[R]26. Zbadać, czy $\mathbf{Y} =_\beta \mathbf{\Theta}$, gdzie:

$$\mathbf{Y} = \lambda f .\, (\lambda x .\, f(xx))(\lambda x .\, f(xx));$$
$$\mathbf{\Theta} = (\lambda x f .\, f(xxf))(\lambda x f .\, f(xxf)).$$

[R]27. Pokazać, że istnieje nieskończenie wiele kombinatorów punktu stałego, i że żaden z nich nie ma postaci normalnej.

[R]28. Jaka nić jest interpretacją termu $\mathbf{I}$ w modelu $\mathcal{D}_\infty$?

[R]29. Jaka nić jest interpretacją termu $\mathbf{K}$ w modelu $\mathcal{D}_\infty$?

[R]30. Niech $\mathsf{omega} = [\![\lambda x .\, xx]\!]$ w modelu $\mathcal{D}_\infty$. Pokazać, że $\mathsf{omega}_0 = \bot$ i $\mathsf{omega}_1 = \mathrm{id}$, oraz że $\mathsf{omega}_{n+1}(d) = \varphi_{n-1}(d(\psi_{n-1}(d)))$, dla $d \in D_n$. Wywnioskować stąd, że $[\![\Omega]\!] = \bot$.

[R]31. Jakie zbiory są interpretacjami termów $\mathbf{K}$, ω i Ω w modelu $\mathcal{P}_\omega$?

[R]32. Pokazać, że $\mathcal{P}_\omega \not\models \mathbf{1} = \mathbf{I}$ i wywnioskować, że model $\mathcal{P}_\omega$ nie jest ekstensjonalny.

R 33. Pokazać, że każdy term w postaci normalnej jest typowalny w systemie BCD bez użycia stałej ω.

R 34. Które z następujących termów są typowalne w rachunku lambda z typami prostymi? W jaki sposób? A które w innych systemach z typami?

(a) $\lambda xyz.\, z(xy)(yx)$?

(b) $\lambda xyz.\, x(xy)(xy)$?

(c) $\lambda xyz.\, x(xy)(zy)$?

R 35. Które z następujących termów

(a) $\lambda xy.\, xy(yx)$;

(b) $\lambda xy.\, xy(xy)$;

(c) $\lambda xy.\, xy(xyy)$;

(d) $\lambda xy.(\lambda z.\, zz)(xy)$;

są typowalne w rachunku lambda z typami

(a) prostymi?

(b) iloczynowymi?

(c) pozytywnymi rekurencyjnymi?

(d) polimorficznymi?

R 36. Czy termy

(a) $\lambda u.(\lambda yw.w(xz)(xy))(zu)$;

(b) $\lambda u.(\lambda yw.w(xz)(xy))(uz)$,

są typowalne w rachunku lambda z typami prostymi? W rachunku typów iloczynowych bez stałej ω? W systemie **F**?

37. Czy termy $\lambda xyzu.\, x(xu)(zu)(yz)$ i $\lambda xyzu.\, x(yz)(zu)(xu)$ są typowalne w rachunku typów prostych? A w typach iloczynowych bez omegi?

38. Podać przykład różnych termów Q_1, Q_2 w rachunku lambda z typami prostymi w stylu Churcha, które mają ten sam typ i wycierają się do tego samego termu w stylu Curry'ego ($|Q_1| = |Q_2|$). Czy istnieją takie termy w postaci normalnej?

39. Skonstruować ciąg (beztypowych) termów M_n typowalnych w rachunku typów prostych, o tej własności, że:

- Długość termów M_n jest liniowa ze względu na n;
- Długość typów głównych termów M_n jest wykładnicza ze względu na n.

Jak to jest możliwe, skoro algorytm rekonstrukcji typu jest wielomianowy?

R 40. Ile termów zamkniętych w postaci normalnej ma typ $(p \to q \to r) \to (p \to q) \to p \to r$?

R 41. Niech $\tau_0 = p$, $\tau_{n+1} = \tau_n \to p$. Ile jest różnych zamkniętych termów typu τ_n w postaci normalnej (w zależności od n)?

R 42. Niech $\tau_0 = p$, $\tau_{n+1} = \tau_n \to p$. Wiadomo, że dla nieparzystych $n \geq 3$, typ τ_n ma nieskończenie wiele inhabitantów. Ile jest różnych inhabitantów (termów zamkniętych w postaci normalnej) typu $\tau_n \to \tau_k$ dla $n, k \geq 2$?

R 43. Czy istnieje kombinator (term zamknięty) typu:

(a) $((((q \to p) \to q) \to q) \to p) \to p$?

(b) $((((p \to q) \to q) \to q) \to p) \to p$?

R 44. Czy istnieje term zamknięty typu:

(a) $((p \to q) \to p) \to p$;

(b) $((((p \to q) \to p) \to p) \to q) \to q$?

45. Które z nastepujących formuł są twierdzeniami intuicjonistycznymi?

$(((p \to q) \to r) \to (p \to r) \to r) \to q \vdash q$;

$((p \to q) \to r) \to (r \to p) \to p$;

$((((p \to q) \to r) \to (r \to p) \to p) \to q) \to q$.

R 46. W typie prostym τ występuje tylko jeden typ atomowy p. Udowodnić, ze term zamknięty typu τ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy τ jest klasyczną tautologią.[2]

R 47. Pokazać, że dowolny typ prosty τ można efektywnie (w czasie wielomianowym) przekształcić w typ prosty σ_τ spełniający warunek:

Typ τ nie ma inhabitanta wtedy i tylko wtedy, gdy σ_τ ma, z dokładnością do $\beta\eta$-konwersji, dokładnie jednego inhabitanta.

48. Podać przykład $\lambda\mathbf{I}$-termu zamkniętego M, typowalnego w typach prostych, oraz takiego typu τ, że $\nvdash M : \tau$, ale istnieje takie N, że $M \to_\beta N$ i $\vdash N : \tau$.

R 49. Podać przykład ciągu termów $M_0 \to_\beta M_1 \to_\beta \cdots \to_\beta M_n$, o tej własności, że w systemie typów prostych zachodzi $\vdash M_i : \tau_i$ dla pewnych typów τ_i, ale jeśli $j > i$, to $\nvdash M_i : \tau_j$. (Każdy krok beta-redukcji dodaje jakiś nowy typ.)

Czy termy M_i mają tę samą własność w systemie BCD typów iloczynowych?

R 50. Skonstruować taki term M, któremu w otoczeniu $x : p, y : q$ można przypisać (w systemie typów prostych) wyłącznie typ $((p \to q) \to p) \to p$.

R 51. Niech $\Gamma = \{a : p,\ b : q\}$. Skonstruować taki term M, że $\Gamma \vdash M : \tau$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\tau = ((p \to q) \to p) \to q \to p$.

R 52. Podać przykład takiego ciągu typów prostych τ_n długości $\mathcal{O}(n)$, że każdy zamknięty term M w postaci normalnej,[3] który jest typu τ_n, ma długość co najmniej $\mathcal{O}(2^n)$.

[2] Wskazówka: zauważyć, że formuła postaci $\tau_1 \to \cdots \to \tau_n \to p$ z jedną zmienną zdaniową p jest klasyczną tautologią wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej jedna z formuł τ_i nie jest klasyczną tautologią.

[3] Wersja z dużą gwiazdką: należy opuścić słowa „w postaci normalnej”.

[R]53. Niech $F = \lambda nfxa_1a_2.\, n(\lambda yz_1z_2.\, yz_2z_1)(\lambda z_1z_2.\, z_1)(xa_1a_2)(fxa_1a_2)$.

(a) Czy term $F\mathbf{5}$ ma postać β-normalną? A postać $\beta\eta$-normalną? Jeśli tak, to jaką?
(b) Czy term F jest typowalny w rachunku lambda z typami prostymi?

[R]54. Niech $f(n) = \mathit{if}\,(n = 1)\ \mathit{then}\ 3\ \mathit{else}\ 2$. Czy funkcja f jest:

(a) definiowalna w beztypowym rachunku lambda?
(b) β-definiowalna w rachunku z typami prostymi?
(c) skośnie β-definiowalna w rachunku z typami prostymi?
(d) $\beta\eta$-definiowalna w rachunku z typami prostymi?

Czy dla funkcji $g(n) = \mathit{if}\,(n = 0)\ \mathit{then}\ 3\ \mathit{else}\ 2$ odpowiedzi są takie same?

[R]55. Niech $g(x) = x^2 - 4x + 4$, dla $x \in \mathbb{N}$. Napisać lambda-term definiujący funkcję g. Czy ta funkcja jest definiowalna w rachunku lambda z typami prostymi za pomocą termu typu $\omega_p \to \omega_p$? Czy jest definiowalna skośnie (z pomocą termu typu $\omega_\tau \to \omega_p$ dla pewnego τ)? Czy jest definiowalna w polimorficznym rachunku lambda za pomocą termu typu $\omega \to \omega$?

56. Pokazać, że funkcja $g(x) = x^2 - x + 6$ nie jest β-definiowalna w rachunku z typami prostymi, ale jest definiowalna skośnie.

[R]57. Wskazać lambda-term G, który w rachunku z typami prostymi skośnie definiuje (ze względu na β-konwersję) dzielenie całkowite przez trzy. Czy istnieje taki term, który ma typ postaci $\omega_p \to \omega_p$?

[R]58. Skonstruować lambda-term F, który w rachunku z typami prostymi skośnie definiuje (ze względu na β-konwersję) wielomian $f(n) = n^2 - 4n + 4$. Czy istnieje taki term, który ma typ postaci $\omega_p \to \omega_p$?

[R]59. Term F jest $\bullet$-*testem parzystości* (symbol $\bullet$ zastępuje β lub $\beta\eta$), gdy dla dowolnego n zachodzi $F\mathbf{n} =_\bullet \mathbf{0}$, gdy n jest parzyste i $F\mathbf{n} =_\bullet \mathbf{1}$, gdy n jest nieparzyste.

(a) Skonstruować term F, który jest β-testem parzystości.
(b) Czy istnieje β-test parzystości, który jest typu $\omega_p \to \omega_p$?
(c) Skonstruować $\beta\eta$-test parzystości[4] typu $\omega_\tau \to \omega_\tau$, gdzie $\tau = p \to p \to p$.

[R]60. Dla $n \in \mathbb{N}$, niech $g(n) = \mathit{if}\ n$ parzyste $\mathit{then}\ n\ \mathit{else}\ n + 1$. Napisać lambda-term, który definiuje funkcję g (ze względu na β-konwersję) i ma typ $\omega \to \omega$ w polimorficznym rachunku lambda. Czy ta funkcja jest definiowalna w rachunku lambda z typami prostymi za pomocą termu typu $\omega_p \to \omega_p$? Czy można ją zdefiniować skośnie (z pomocą termu typu $\omega_\tau \to \omega_p$ dla pewnego τ) jeśli dopuścimy $\beta\eta$-konwersję?

[R]61. Pokazać, że funkcja $\lambda\!\!\lambda n.\, 3n^2 - 7n + 4$ jest definiowalna skośnie (tj. termem typu $\omega_\tau \to \omega_p$, dla jakiegoś τ).

[R]62. Pokazać, że funkcja $\lambda\!\!\lambda n.\, \mathit{if}\ n \le 2\ \mathit{then}\ n\ \mathit{else}\ n + 2$ jest definiowalna ze względu na $\beta\eta$-konwersję termem typu $\omega_\tau \to \omega_\tau$, dla jakiegoś τ.

[4] *Wskazówka:* co to jest $\mathbf{n}(\lambda fxy.\, fyx)\mathbf{K}$?

R63. Niech $C = (\lambda Fxy.\, xF(\lambda z.\, \mathbf{1})(yF(\lambda z.\, \mathbf{0})))(\lambda fg.gf)$. Jaką funkcję z $\mathbb{N}^2$ do $\mathbb{N}$ definiuje ten term? Ile kroków redukcji (z dokładnością do stałego czynnika) potrzeba do obliczenia wartości tej funkcji dla danych argumentów? Czy term C jest typowalny w rachunku typów prostych? Czy dla jakiegoś τ ma typ $\omega_\tau \to \omega_\tau \to \omega_\tau$, gdzie $\omega_\tau = (\tau \to \tau) \to \tau \to \tau$? Jeśli nie, to czy istnieje term typu $\omega \to \omega \to \omega$, definiujący tę samą funkcję? A term typu $\omega_\tau \to \omega_\tau \to \omega_\rho$, dla różnych τ, ρ?

R64. Czy następujące formuły są twierdzeniami logiki intuicjonistycznej?

(a) $((p \to q) \to r) \to (p \to r) \to r$?
(b) $((((p \to q) \to r) \to (p \to r) \to r) \to q) \to q$?

R65. Czy następujące formuły są twierdzeniami logiki intuicjonistycznej:

(a) $((((q \to p) \to q) \to q) \to p) \to p$?
(b) $((((p \to q) \to q) \to q) \to p) \to p$?

R66. Czy następujące formuły są twierdzeniami logiki intuicjonistycznej:

(a) $((P \to Q) \to P) \to ((Q \to P) \to P) \to P$;
(b) $((P \to Q) \to Q) \to P \to Q$;
(c) $(S \to Q \to R) \to ((S \to R) \to P) \to ((Q \to R) \to P) \to P$.

R67. Niech $\sim\alpha$ oznacza implikację $\alpha \to \bullet$, gdzie $\bullet$ jest ustaloną zmienną zdaniową różną od zmiennych p, q, r, s. Która z następujących formuł jest twierdzeniem intuicjonistycznym?

(a) $((p \to q) \to r) \to ((q \to s) \to r) \to r$.
(b) $((\sim p \to \sim q) \to \sim r) \to ((\sim q \to \sim s) \to \sim r) \to \sim r$.

R68. Pokazać, że term $\lambda x.\, xx$ ma nieskończenie wiele różnych typów w systemie BCD. (Nie liczymy instancji tego samego schematu, jak np. typy $p \cap (p \to q) \to q$ i $r \cap (r \to (r \to s)) \to r \to s$.)

R69. Czy istnieje taki kombinator punktu stałego, któremu można przypisać typ w systemie typów iloczynowych $\lambda_{\cap\leq}$ (bez omegi)? A w systemie BCD (czyli w systemie $\lambda_{\cap\leq\omega}$)?

R70. Czy kombinatorowi $\mathbf{Y} = \lambda f.\, (\lambda x.\, f(xx))(\lambda x.\, f(xx))$ można w systemie BCD przypisać jakiś typ różny od ω? Czy $\mathbf{Y}$ ma w tym systemie typ $(p \to p) \to p$?

R71. Dlaczego w systemie BCD przyjmuje się aksjomat $\omega \leq \omega \to \omega$? A dlaczego nie przyjmuje się aksjomatu $\sigma \to \tau \cap \rho \leq (\sigma \to \tau) \cap (\sigma \to \rho)$?

R72. Udowodnić, że jeśli F_1 i F_2 są filtrami w algebrze $\mathcal{T}$ typów iloczynowych, to filtrem jest też zbiór $F_1 \cdot F_2 = \{\tau \mid \sigma \to \tau \in F_1 \text{ dla pewnego } \sigma \in F_2\}$.

R73. Niech $\tau = \forall r(\forall q(q \to r) \to r)$ i niech $\sigma = \forall p((\tau \to p) \to p)$. Napisać takie termy *there* : $\tau \to \sigma$ i *back* : $\sigma \to \tau$, że w systemie $\mathbf{F}$ zachodzi równość $\mathbf{I} =_\beta \lambda x^\tau\, \mathit{back}(\mathit{there}\, x)$. Czy każdy term zamknięty typu σ jest beta-równy wyrażeniu postaci $\mathit{there}(N)$?

R 74. W systemie **F** definiujemy produkt $\tau \times \varrho$ jako $\tau \times \varrho = \forall p((\tau \to \varrho \to p) \to p)$. Para uporządkowana $\langle M^\tau, N^\varrho \rangle$ to term $\Lambda p \lambda x^{\tau \to \varrho \to p}.\, xMN$. Podać przykład takich typów τ i ϱ, że typ $\tau \times \varrho$ ma „za dużo elementów" tj. istnieje term zamknięty tego typu w postaci normalnej, który nie jest parą uporządkowaną.

R 75. Udowodnić, że system Gödla **T** można interpretować w systemie Girarda **F**. Jak wiadomo, w systemie **F**, (czyli w polimorficznym rachunku lambda) można reprezentować liczby naturalne jako termy zamknięte typu $\omega = \forall p((p \to p) \to (p \to p))$. Należy zdefiniować polimorficzny rekursor, tj. term zamknięty

$$\mathbf{R} : \forall p\, [(\omega \to p \to p) \to (\omega \to p \to p)],$$

który dla dowolnego typu σ spełnia warunki

$$\mathbf{R}\sigma M(\mathit{succ}\; \mathbf{n})N =_\beta M\mathbf{n}(\mathbf{R}\sigma M\mathbf{n}N) \qquad \text{oraz} \qquad \mathbf{R}\sigma M\mathbf{0}N =_\beta N,$$

gdzie $\mathbf{n}$ jest dowolnym liczebnikiem, a symbol *succ* oznacza term reprezentujący operację nastepnika. Inaczej mówiąc, term $\mathbf{R}\sigma$ ma się zachowywać jak rekursor $\mathbf{R}_\sigma$ w systemie **T**.

R 76. Napisać term typu $\omega \to \omega$, który definiuje w systemie **F** w stylu Churcha dzielenie całkowite przez trzy.

R 77. Czy każda funkcja obliczalna jest definiowalna w systemie **F**?

Ostatnie egzaminy:

- Egzamin 2018 pierwszy termin: zadania 10, 20, 35, 65.
- Egzamin 2020 pierwszy termin: zadania 8, 22, 36, 55.
- Egzamin 2020 drugi termin: zadania 23, 49, 60, 67.
- Egzamin 2022 pierwszy termin: zadania 14, 24, 41, 57.
- Egzamin 2024 pierwszy termin: zadania 5, 25, 42, 58.

Rozwiązania

1: Definicję funkcji f stanowi term $\lambda n \lambda f \lambda x.\, f(n(nf)(nfx))$. Funkcja f jest wielomianem, więc jest definiowalna w typach prostych.

Definicja funkcji g jest trudniejsza. Przypomnijmy najpierw, że parę $\langle M, N\rangle$ można reprezentować przez $\lambda z.\, zMN$, a rzutowania definiować jako $\Pi_1(M) = M(\lambda uv.\, u)$, $\Pi_2(M) = M(\lambda uv.\, v)$. Niech $F = \lambda p.\, \langle \lambda fx.\, (f(nfx), \lambda fx.\, mf(nf(nfx))\rangle$. Term F ma własność $F\langle \mathbf{n}, \mathbf{m}\rangle =_\beta \langle \mathbf{n}+1, \mathbf{m}+2\cdot\mathbf{n}\rangle$ dla dowolnych liczebników Churcha $\mathbf{n}$ i $\mathbf{m}$. Ponieważ $g(n+1) - g(n) = 2n$, dla $n \in \mathbb{N}$, więc funkcja g jest definiowana termem $\lambda n.\, \Pi_2(nF\langle \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle)$.

Funkcja g nie jest wielomianem warunkowym, bo nie istnieje taki wielomian h o współczynnikach naturalnych, że $g(n) = h(n)$ dla wszystkich $n > 0$. (Dwa różne wielomiany stopnia co najwyżej k nie mogą się zgadzać w więcej niż k punktach.) Zatem nie jest definiowalna w typach prostych. Ale jest definiowalna skośnie, bo para liczebników typu ω_p ma typ $\tau = (\omega_p \to \omega_p \to \omega_p) \to \omega_p$. Wtedy operacja G ma typ $\tau \to \tau$, a term M ma typ $\omega_\tau \to \omega_p$.

Funkcja g jest definiowalna w systemie $\mathbf{F}$, gdzie para liczebników typu ω ma typ $\omega \wedge \omega$, czyli typ $\forall p.\, (\omega \to \omega \to p) \to p$. Jeśli n ma polimorficzny typ ω, to wyrażenie $nG\langle \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle\pi_2$ też ma typ ω.

2a: Jedna z możliwości: $\mathrm{Id} = \lambda n^{\omega_{p\to p}} f^{p\to p} x^p.\, n(\lambda g^{p\to p} z^p.\, f(gz))\mathbf{I}^{p\to p}x$.

2b: Nie istnieje. Ponieważ $\omega_{p\to p} = \omega_p \to \omega_p$, więc term J ma typ $\omega_p \to \omega_p \to \omega_p$, czyli powinien w zwykłym sensie definiować wielomian warunkowy dwóch zmiennych. Jednak żądamy aby $J\mathbf{m} =_\beta \mathbf{m}$, skąd $J\mathbf{mn}fx =_\beta \mathbf{mn}fx =_\beta \mathbf{n}^m(f)x$. Zatem J musiałby definiować funkcję wykładniczą, która nie jest wielomianem warunkowym.

2c: Też nie istnieje. Bez straty ogólności można założyć, że $J : \omega_p \to \omega_q$ jest w postaci normalnej, czyli $J = \lambda n^{\omega_p} \lambda f^{q\to q} \lambda x^q.\, M$, gdzie term M jest typu q. Wtedy albo $M = x$ albo $M = fM'$, gdzie M' też ma typ q. I tak dalej, więc $J = \lambda n^{\omega_p} \lambda f^{q\to q} \lambda x^q.\, f(f(\ldots(fx)\ldots))$ definiuje funkcję stałą.

3: Zacznijmy od operacji $G = \lambda p.\, \langle \lambda fx.\, f(f(p\,\mathbf{true}\,f\,x)), \lambda fx.\, p\,\mathbf{true}\,f(p\,\mathbf{false}\,f\,x)\rangle$. Dla $p = \langle \mathbf{m}, \mathbf{n}\rangle$ mamy $Gp \twoheadrightarrow \langle \mathbf{m+2}, \mathbf{m+n}\rangle$. Dlatego k-krotna iteracja G, zaczynająca się od pary $\langle \mathbf{1}, \mathbf{4}\rangle$ daje w wyniku $\langle \mathbf{1+2k}, \mathbf{h(k{+}1)}\rangle$. Trzeba jeszcze dobrze zacząć i zdekodować wynik, na przykład w ten sposób: $H = \lambda n.\, n(\lambda p.\, p\,\mathbf{true}\,(\lambda z.\, Gp)\,\langle \mathbf{1}, \mathbf{4}\rangle)\,\langle \mathbf{0}, \mathbf{5}\rangle\mathbf{false}$. Sens: zaczynając od $p := \langle \mathbf{0}, \mathbf{5}\rangle$ wykonujemy pętlę `for` $i = 1$ `to` n `do if` $p\,\mathbf{true} = 0$ `then` $\langle \mathbf{1}, \mathbf{4}\rangle$ `else` Gp, a wynik rzutujemy na 1. współrzędną.

4: Poprzednik to `pred` $= \lambda p.\, p\mathbf{KK}$, następnik to `succ` $= \lambda pxf.\, fp(pxf)$. Rekursor to po prostu $\mathbf{I}$, dodawanie to `add` $= \lambda pq.\, pq(\lambda xy.\, \mathtt{succ}\, y)$. Niech $\nu_0 = t \to s \to t$, oraz $\nu_{n+1} = t \to [\nu_n \to t \to t] \to t$. Typem termu P_2 jest ν_2.

5: (a) Tak. Niech $F = \lambda X. \langle \lambda x.\, X\pi_2 x(X\pi_1)x, \lambda xy.\, X\pi_1 y(X\pi_2)x\rangle$, gdzie $\langle A, B\rangle$ oznacza $\lambda u.\, uAB$, a π_1 i π_2 to, odpowiednio, $\lambda xy.\, x$ i $\lambda xy.\, y$. Term $\mathsf{X} = \mathbf{Y}F$ spełnia równanie $\mathsf{X} =_\beta F\mathsf{X}$, więc możemy zdefiniować $M := \mathbf{Y}F\pi_1$ i $N := \mathbf{Y}F\pi_2$.

(b) Nie. Korzeń drzewa $\mathrm{BT}(M)$ musiałby mieć etykietę $\lambda x.\, x$ i jednocześnie $\lambda xy.\, y$.

7: Należy zastosować technikę *Böhm-out*. Otrzymamy wtedy np.

$$\mathbf{X} = \lambda x.x(\lambda uv.\langle u, v\rangle)(\lambda uvw.\mathbf{S})\pi_1\pi_2\mathbf{I}\pi_1\mathbf{KI}\pi_1.$$

Sprawdzamy poprawność rozwiązania. Przyjmijmy następujące oznaczenia:

$$M = (\lambda yz.y(yz(yy))z), \qquad N = (\lambda yz.y(yz(yz))z), \qquad Q = \lambda uvw.\mathbf{S}, \qquad P = \lambda uv.\langle u, v\rangle.$$

Aplikacja MPQ redukuje się do $\langle\langle Q, \lambda w.\langle P, w\rangle\rangle, Q\rangle$. Po zaaplikowaniu tego termu do argumentów $\pi_1, \pi_2, \mathbf{I}, \pi_1$ dostajemy kolejno $\langle Q, \lambda w.\langle P, w\rangle\rangle$, $\lambda w.\langle P, w\rangle$, $\langle P, \mathbf{I}\rangle$ i wreszcie P. Tymczasem aplikacja $M(\lambda uv.\langle u, v\rangle)Q\pi_1\pi_2\mathbf{I}\pi_1$ podobnie redukuje się do Q. Pozostaje sprawdzić, że $P\mathbf{KI}\pi_1 \twoheadrightarrow \langle \mathbf{K}, \mathbf{I}\rangle\pi_1 \twoheadrightarrow \mathbf{K}$.

8: Na przykład $\mathbf{X} = \lambda u.\, uTT'\pi_2^3\pi_1^3\mathbf{123}\pi_1^3$, gdzie $T = \lambda xyz.\, \langle x, y, z\rangle$ oraz $T' = \lambda xyz.\, \langle y, x, z\rangle$.

9: Szukanym termem jest na przykład $M = \lambda x.\, x\,\mathbf{true}\,\mathbf{I}\,\mathbf{false}\,\mathbf{I}\,(\lambda x.\, \mathbf{true})\,\mathbf{I}\,\mathbf{false}$.

10: Na przykład $\mathbf{X} = \lambda v.\, v(\lambda xy.\, \langle x, y\rangle)\,\mathbf{I}\,\pi_2\,\mathbf{I}\,\pi_1\,(\lambda xy.\, \mathbf{true})\,\mathbf{false}\,\pi_2$, gdzie $\langle x, y\rangle$, π_1 i π_2 oznaczają odpowiednio termy $\lambda z.\, zxy$, $\lambda xy.\, x$ i $\lambda xy.\, y$.

11: Na przykład $\mathbf{X} = \lambda v.\, v(\lambda xy.\, \langle x, y\rangle)\mathbf{I}\pi_1(\lambda xyz.\, \mathbf{K})\pi_2\mathbf{I}\pi_1\mathbf{II}(\lambda xy.\, \mathbf{S})$.

12: Na przykład $\lambda X.\, X\mathbf{PKK'K'K}\,\mathbf{true}(\lambda z.\, \mathbf{false})\mathbf{K}$, gdzie $\mathbf{P} = \lambda xyz.\, zxy$, $\mathbf{K}' = \lambda xy.\, y$.

14: Na przykład $M = \lambda F.\, FPT\pi_1^2\mathbf{I}\pi_1^3\pi_2^2\mathbf{I}\pi_2^3\langle\mathbf{I}, \mathbf{0}, \mathbf{I}\rangle\mathbf{1}\pi_1^2\pi_2^3$, gdzie $P = \lambda xy.\, \langle x, y\rangle$, $T = \lambda xyz.\, \langle x, y, z\rangle$.

Po podstawieniu $x := P, y := T$, termy L, R zredukują się do par uporządkowanych, z których rzut π_1^2 wybierze pierwsze współrzędne, odpowiednio $\lambda w.\, T(PP(TPP))zw$ i $T(PP(TPT))z$. Po aplikacji do $\mathbf{I}$ dostaniemy trójki $\langle PP(TPP), z, \mathbf{I}\rangle$ i $\langle PP(TPT), z, \mathbf{I}\rangle$. Kolejne dwa rzutowania wybiorą z tego TPP i TPT. Po użyciu kolejnego $\mathbf{I}$ i rzutu π_2^3 mamy wreszcie P versus T. Aplikacja P do trójki $\langle\mathbf{I}, \mathbf{0}, \mathbf{I}\rangle$ i do liczebnika jeden da nam parę $\langle\langle\mathbf{I}, \mathbf{0}, \mathbf{I}\rangle, \mathbf{1}\rangle$, z której rzuty π_1^2, π_2^3 wybiorą $\mathbf{0}$. Ale jeśli zamiast P użyjemy T, to wyjdzie nam trójka $\langle\langle\mathbf{I}, \mathbf{0}, \mathbf{I}\rangle, \mathbf{1}, \pi_1^2\rangle$ aplikowana do π_2^3 i w końcu $\mathbf{1}$.

15: Drzewo Böhma termu $\mathbf{YB}'$ ma tylko jedną gałąź: $\lambda x_0x_1.\, x_0(\lambda x_1.\, x_0(\lambda x_2.\, x_1 \ldots$ Związek między poddrzewem $T(x_n)$ zaczynającym się od λx_{n+1} i poddrzewem $T(x_{n+1})$ zaczynającym się od λx_{n+2}, możemy zapisać tak: $T(x_n) = \lambda x_{n+1}.\, x_n(T(x_{n+1}))$. To prowadzi do równania stałopunktowego postaci $T = \lambda xy.\, x(Ty)$, czyli $T = \mathbf{B}'\, T$, którego rozwiązaniem jest $T = \mathbf{YB}'$.

Aby skonstruować takie M, że $\mathrm{BT}(M) = \lambda x_0x_1x_2.x_0(\lambda x_3.\, x_1(\lambda x_4.\, x_2 \ldots$, postępujemy podobnie, otrzymując równanie $T = \lambda xyz.\, x(Tyz)$. Szukanym termem jest $M = \mathbf{Y}(\lambda txyz.\, x(tyz))$.

16: Poddrzewa $B(x_k)$ zaczepione w wewnętrznych wierzchołkach tego drzewa są w istocie takie same, różnią się tylko zmienną wolną. Szukamy więc takiego termu Q, że $\mathrm{BT}(Qx) = B(x)$. Term Q powinien spełniać równość $Qx = \lambda y.\, x(Qy)(Qy)$, zatem możemy przyjąć $Q = \mathbf{Y}(\lambda qxy.\, x(qy)(qy))$. Poszukiwane rozwiązanie to $M = \lambda x_0.\, Qx_0$.

17: Zacznijmy od tego, że operacja $\lambda n.n(\lambda y.yz)x$, zaaplikowana do liczebnika $\mathbf{n}$, daje w wyniku n-krotną aplikację $xz \ldots z$. Jeśli więc M_{n+1} ma drzewo, w którym korzeń ma $n + 1$ synów, to korzeń drzewa $\mathrm{BT}(\lambda x.\mathbf{n}(\lambda y.yM_{n+1})x)$ ma n synów, każdy postaci $\mathrm{BT}(M_{n+1})$. Pozostaje tę konstrukcję ujednostajnić. Przyjmijmy $F = \lambda V\lambda n\lambda x.n(\lambda y.y(V(\mathbf{succ}\, n))x$ i niech $M = \mathbf{Y}F\mathbf{1}$. Łatwo widzieć, że:

$$\begin{aligned} M &=_\beta F(\mathbf{Y}F)\mathbf{1} =_\beta \lambda x.\mathbf{1}(\lambda y.y(\mathbf{Y}F\mathbf{2})x =_\beta \lambda x.x(\mathbf{Y}F\mathbf{2}) \\ &=_\beta \lambda x.x(\lambda x'.\mathbf{2}(\lambda y.y(\mathbf{Y}F\mathbf{3})x')) =_\beta \lambda x.x(\lambda x'.x'(\mathbf{Y}F\mathbf{3})(\mathbf{Y}F\mathbf{3})) =_\beta \cdots \end{aligned}$$

18: Tak, na przykład $T = \lambda X.\, X\pi_2(\lambda xy.\, \mathbf{S})\mathbf{K}$.

19: Nasz term ma się rozwijać tak: $\lambda x.\, xP_0(xP_1(\ldots$, więc rozwiążemy równanie $Npx = xp(N(\mathtt{succ}\; p)x)$. Niech więc $N = \mathbf{Y}(\lambda npx.\, xp(n(\mathtt{succ}\; p)x))$ i możemy zdefiniować M jako NP_0.

20: Węzły wewnętrzne drzewa na głębokości n są korzeniami drzew $\mathrm{BT}(M_n)$ pozostających ze sobą w związku $M_n = \lambda x.\, xx \ldots xM_{n+1}$, gdzie zmienna x występuje $n + 1$ razy. Prowadzi to do równania $M = \lambda nx.\, n(\lambda y.\, yx)x(M(\mathbf{succ}\, n))$. Poszukiwany term, to $M_0 = \mathbf{Y}(\lambda mnx.\, n(\lambda y.\, yx)x(M(\mathbf{succ}\, n)))\mathbf{0}$.

21: Wierzchołki drzewa na głębokości k^2 odpowiadają termom Q_k z jedną zmienną wolną x_k. Mamy taką zależność $Q_k =_\beta \lambda x_{k+1}.\, x_k^{2k+1}(Q_{k+1})$. Przedstawiając Q_k w postaci aplikacji $Q\mathbf{k}x_k$ otrzymamy równanie $Q\mathbf{k}x_k =_\beta \lambda x_{k+1}.\, x_k(\mathbf{k}x_k(\mathbf{k}x_k(Q(\mathbf{succ}\,\mathbf{k})x_{k+1})))$. Z pomocą kombinatora punktu stałego znajdziemy rozwiązanie $Q = \mathbf{Y}(\lambda qkxy.\, x(kx(kx(Q(\mathbf{succ}\, k)y))))$. Poszukiwany term to $N = \lambda x_1.\, Q\mathbf{0}x_0$.

22: Zauważmy, że $T_{k+1} = \lambda x_1.\, x_0(T_k[x_0 := x_1])$, inaczej $\lambda x_0.\, T_{k+1} =_\beta \lambda x_0x_1.\, x_0((\lambda x_0.\, T_k)x_1)$. Mamy więc $T_k =_\beta \mathbf{k}(\lambda tx_0x_1.\, x_0(tx_1))(\lambda x_0x_1.\, x_0)x_0$. Teraz zdefiniujemy $N = \lambda x_0.\, \mathbf{Y}(\lambda zk.\, x_0(z(succ\, k)T_k)\mathbf{0}$ używając równania $N_k = x_0N_{k+1}T_k$.

23: $M = \lambda x_0.\, x_0(Nx_0)(Nx_0)$, gdzie $N = \mathbf{Y}(\lambda nxy.\, x(\lambda z.x(nz)(nz))(\lambda z.x(nz)(nz))$.

24: Na przykład $M = \mathbf{Y}(\lambda T\varphi xy.\, x(T(\lambda z.\, z(\varphi z))y)(\varphi x))\mathbf{I}$.

Jeśli przez T_n oznaczymy drzewo zaczepione w wierzchołku $\lambda x_{n+1}.\, x_n$, a całe nasze drzewo napiszemy jako $\lambda x_0.\, T_0$, to mamy taką zależność: $T_n = \lambda x_{n+1}.\, x_nT_{n+1}(x_n^n(x_n))$. Drzewo T_n ma tylko jedną zmienną wolną x_n, ale zależy też od „gałązki" $\varphi_n = \lambda x_n.\, x_n^n(x_n)$. Zamiast T_n możemy więc napisać $T(\varphi_n, x_n)$ i wtedy $T(\varphi_n, x_n) = \lambda x_{n+1}.\, x_nT(\varphi_{n+1}, x_{n+1})(\varphi_nx_n)$, gdzie $\varphi_{n+1} = \lambda x_{n+1}.\, x_{n+1}(\varphi_nx_{n+1})$. W ten sposób dostajemy równanie $T = \lambda\varphi x.\, \lambda y.\, x(T(\lambda z.\, z(\varphi z))y)(\varphi x))$. Rozwiązanie tego równania należy zaaplikować do $\varphi_0 = \mathbf{I}$.

25: Oznaczmy przez T_n (dla $n > 0$) drzewo zaczepione w wierzchołku $\lambda x_{n+1}.\, x_n$, a drzewo $\mathrm{BT}(M)$

napiszmy jako $\lambda x_0.\, T_0$. Wtedy $T_n = \lambda x_{n+1}.\, x_n T_{n+1} x_{n+1} x_n \ldots x_0$ dla wszystkich n. Możemy to zapisać inaczej: $T_n = \lambda x_{n+1}.\, g_n(x_n T_{n+1} x_{n+1})$, gdzie $g_n = \lambda u.\, ux_n \ldots x_0$ jest operacją dopisywania aktualnego „ogona". Drzewo T_n jest wyznaczone przez swoją zmienną czołową x_n i operator g_n. Ponieważ $g_{n+1} = \lambda u.\, g_n(ux_{n+1})$, więc mamy taką definicję rekurencyjną: $T(x, g) = \lambda x'.\, g(xT(x', g')x')$, gdzie $g' = \lambda u.\, g(ux')$. Poszukiwany term M to $\lambda x_0.\, \mathbf{Y}(\lambda txgx'.\, g(x(tx'(\lambda u.\, g(ux')))x'))x_0(\lambda u.\, ux_0)$, gdzie term $\lambda u.\, ux_0$ to początkowa wartość operacji g.

26: Te dwa termy nie są β-równe. Gdyby tak było, to z twierdzenia Churcha-Rossera musiałby istnieć taki term M, że $\mathbf{Y} \twoheadrightarrow_\beta M$ i $\mathbf{\Theta} \twoheadrightarrow_\beta M$. Term $\mathbf{\Theta}$ redukuje się w jednym kroku tylko do $\lambda f.\, f(\mathbf{\Theta} f)$, gdzie $T = \lambda xf.\, f(xxf)$, mamy więc $M = \lambda f.\, fP$, gdzie $\mathbf{\Theta} f \twoheadrightarrow_\beta P$. Przez indukcję można pokazać, że wtedy P ma zawsze podterm $\mathbf{\Theta}$. Ale term M, jako redukt termu $\mathbf{Y}$, musi być postaci $\lambda f.\, f^k((\lambda x.\, f(xx))(\lambda x.\, f(xx)))$, co łatwo wynika przez indukcję. Żaden taki term nie ma podtermu postaci $\mathbf{\Theta}$.

27: Niech $\delta_n = \lambda x_1 x_2 \cdots x_n.\, f(x_1 x_1 \cdots x_1)$, gdzie x_1 powtarza się $n+1$ razy. Wtedy taki term $Y_n = \lambda f.\delta_n \delta_n \cdots \delta_n$, gdzie δ_n powtarza się $n+1$ razy, jest kombinatorem punktu stałego. Istotnie, $Y_n(F) =_\beta D_n D_n \cdots D_n$, gdzie $D_n = \lambda x_1 x_2 \cdots x_n.F(x_1 x_1 \cdots x_1)$. A zatem $Y_n(F) =_\beta F(D_n D_n \cdots D_n)$.

Przypuśćmy, że kombinator punktu stałego $\mathbf{Ł}$ ma postać normalną. Oczywiście musi to być abstrakcja $\lambda y. \ldots$, bo $\mathbf{Ł}$ jest kombinatorem. Dla dowolnej zmiennej x mamy $x(\mathbf{Ł}x) = \mathbf{Ł}x$. Oznacza to, że po normalizacji term $\mathbf{Ł}x$ zaczyna się od x, a więc postać normalna $\mathbf{Ł}$ musi być taka: $\lambda y.y\mathbf{L}$. Ale wstawiając to do równości $x(\mathbf{Ł}x) = \mathbf{Ł}x$ otrzymujemy $x(x\mathbf{L}') = x\mathbf{L}'$ gdzie $\mathbf{L}' = \mathbf{L}[y := x]$. To jest niemożliwe bo mamy tu dwie różne postaci normalne.

28: Jest to nić $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie $a_0 = \bot \in D_0$ oraz każda z funkcji $a_n : D_{n-1} \to D_{n-1}$, dla $n > 0$ jest identycznościowa. Jest to faktycznie nić, bo $\psi_0(a_1) = \bot = a_0$, oraz $\psi_{n+1}(a_{n+2}) = \psi_n \circ a_{n+2} \circ \varphi_n = \psi_n \circ \mathrm{id}_{D_{n+1}} \circ \varphi_n = \psi_n \circ \varphi_n = \mathrm{id}_{D_n} = a_{n+1}$. Ponadto $[\![\lambda x\, x]\!] \cdot y = [\![x]\!]_{[x\mapsto y]} = y$ oraz $a \cdot y = \sup\{a_{n+1}(y_n) \mid n \in \mathbb{N}\} = \sup\{y_n \mid n \in \mathbb{N}\} = y$, więc teza wynika z ekstensjonalności modelu.

29: W modelu D_∞ element $k = [\![\mathbf{K}]\!]$ ma własność $k \cdot d \cdot e = d$, w szczególności jeśli $d \in D_{n+1}, e \in D_n$, to $k_{n+2}(d)(e) = (k \cdot d)_{n+1}(e) = (k \cdot d \cdot e)_n = d_n = \psi_n(d)$. W szczególności dla $d \in D_1$ mamy $k_2(d) = \lambda\!\!\lambda a.\psi_0(d) = \lambda\!\!\lambda a.d(\bot)$. Czyli k_2 to funkcja numer 2 na naszym rysunku. Zatem $k_1 = \psi_1(k_2) = \mathrm{id}_{D_0}$ i $k_0 = \psi_0(k_1) = \mathrm{id}(\bot) = \bot$, więc $k = (\bot, \mathrm{id}, \lambda\!\!\lambda da.\psi_0(d), \lambda\!\!\lambda da.\psi_1(d), \ldots)$.

30: Skoro $\mathsf{omega} = [\![\lambda x.\, xx]\!]$, to $\mathsf{omega} \cdot d = d \cdot d$, dla $d \in D_\infty$, w szczególności jeśli $d \in D_n$, to $\mathsf{omega}_{n+1}(d) = (\mathsf{omega} \cdot d)_n = (d \cdot d)_n = d_{n+1}(\cdot d) = \varphi_n(d)(d)$. Dla $n = 0$ wynika stąd, że $\mathsf{omega}_1(d) = \varphi_0(d)(d) = (\lambda\!\!\lambda a.\, d)(d) = d$, czyli $\mathsf{omega}_1 = \mathrm{id}$. Stąd od razu $\mathsf{omega}_0 = \psi_0(\mathrm{id}) = \bot$. Dla $n > 0$ mamy $\mathsf{omega}_{n+1}(d) = \varphi_n(d)(d) = \varphi_{n-1}(d(\psi_{n-1}(d))$. Z powyższego łatwo dostajemy $\mathsf{omega}_{n+1}(\mathsf{omega}_n) = \varphi_{n-1}(\mathsf{omega}_n(\mathsf{omega}_{n-1}))$. Dalej ponieważ $\mathsf{omega}_1(\mathsf{omega}_0) = \mathrm{id}(\bot) = \bot$, więc $[\![\Omega]\!] = \sup\{\mathsf{omega}_{n+1}(\mathsf{omega}_n) \mid n \in \mathbb{N}\} = \bot$.

31: W modelu $\mathcal{P}_\omega$:

- $[\![\mathbf{K}]\!] = \mathit{graph}(\lambda\!\!\lambda a.\text{„}\mathbb{N} \times a\text{"}) = \{(m, n) \mid n \in \text{„}\mathbb{N} \times e_n\text{"}\} = \{(m, (k, l)) \mid l \in e_m\}$.
- $[\![xx]\!]_{x\mapsto a} = \mathit{fun}(a)(a) = \{m \mid \exists n(e_n \subseteq a \wedge (n, m) \in a)\}$.
- $[\![\omega]\!] = \mathit{graph}(\lambda\!\!\lambda a.\, \mathit{fun}(a)(a)) = \{(x, m) \mid m \in \mathit{fun}(e_x)(e_x)\}$ $= \{(x, m) \mid \exists n(e_n \subseteq e_x \wedge (n, m) \in e_x)\}$.
- $[\![\Omega]\!] = [\![xx]\!]_{x\mapsto[\![\omega]\!]} = \{m \mid \exists n(e_n \subseteq [\![\omega]\!] \wedge (n, m) \in [\![\omega]\!])\}$.

Przypuśćmy, że $m \in [\![\Omega]\!]$ i niech $n = \min\{n \mid e_n \subseteq [\![\omega]\!] \wedge (n, m) \in [\![\omega]\!]\}$. Ale skoro $(n, m) \in [\![\omega]\!]$, to istnieje takie n', że $e_{n'} \subseteq e_n \subseteq [\![\omega]\!]$ oraz $(n', m) \in e_n \subseteq [\![\omega]\!]$. Sprzeczność, bo wtedy $n' < n$. Zatem $[\![\Omega]\!] = \varnothing = \bot$.

32: Ponieważ $\mathbf{I}x =_\beta x$ oraz $\mathbf{1}x =_\beta \lambda y.xy$, więc wystarczy jeśli udowodnimy, że $\mathcal{P}_\omega \not\models x = \lambda y.xy$. Niech $v(x) = a$. Wtedy $[\![x]\!]_v = a$. Natomiast $[\![\lambda y.xy]\!]_v = \mathit{graph}(g)$, gdzie $g(b) = [\![xy]\!]_{v[y\mapsto b]} = a \cdot b = \mathit{fun}(a)(b) = \{m \mid \exists k \in \mathbb{N}(e_k \subseteq b \wedge (k, m) \in a)\}$. A więc $[\![\lambda y.xy]\!]_{[x\mapsto a]} = \{(n, m) \mid m \in g(e_n)\} = \{(n, m) \mid \exists k \in \mathbb{N}(e_k \subseteq e_n \wedge (k, m) \in a\}$.

Jeśli a jest niepustym zbiorem skończonym, to $[\![\lambda y.xy]\!]_v$, jest zbiorem nieskończonym, w szczególności $[\![\lambda y.xy]\!]_v \neq a$. Istotnie, niech $(k,m) \in a$. Wtedy każda para (n,m) gdzie $e_k \subseteq e_n$ należy do $[\![\lambda y.xy]\!]_v$.

Ponieważ P_ω jest lambda-modelem, więc spełnia w szczególności warunek $[\![\lambda x.M]\!]_v \cdot a = [\![M]\!]_{v[x\mapsto a]}$, dla dowolnych a i M. Stąd dla dowolnych $a,b \in P_\omega$ mamy $([\![\mathbf{1}]\!] \cdot a) \cdot b = a \cdot b = ([\![\mathbf{I}]\!] \cdot a) \cdot b$. Gdyby model był ekstensjonalny to mielibyśmy $[\![\mathbf{1}]\!] \cdot a = [\![\mathbf{I}]\!] \cdot a$, dla dowolnego a, i wreszcie $[\![\mathbf{1}]\!] = [\![\mathbf{I}]\!]$.

33: Dowód przez indukcję ze względu na budowę termu normalnego. Termy normalne są postaci $xN_1 \ldots N_k$ lub $\lambda x.\,M$. W pierwszym przypadku, z założenia indukcyjnego mamy $\Gamma_i \vdash N_i : \tau_i$ dla każdego i. Wtedy $\Gamma_1 \& \ldots \& \Gamma_k, x : \tau_1 \to \ldots \to \tau_k \to q \vdash xN_1 \ldots N_k : q$. W drugim przypadku, z założenia indukcyjnego $\Gamma \vdash M : \sigma$. Jeśli $x : \tau \in \Gamma$ dla pewnego τ to $\Gamma \vdash \lambda x.\,M : \tau \to \sigma$. Jeśli x nie występuje w Γ to z osłabiania $\Gamma, x : q \vdash M : \sigma$ i $\Gamma \vdash \lambda x.\,M : q \to \sigma$.

34: Jeśli przez $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ oznaczymy poszukiwane typy zmiennych x, y, z, to term (a) prowadzi do układu równań $\alpha_x = \alpha_y \to \beta$, $\alpha_y = \alpha_x \to \gamma$, skąd dostajemy równanie $\alpha_x = (\alpha_x \to \gamma) \to \beta$, które nie ma rozwiązania. Term (a) nie ma więc typu prostego. Ale w rachunku z pozytywnymi typami rekurencyjnymi ten term ma typ $\alpha \to (\alpha \to r) \to (q \to r \to s) \to s$, gdzie $\alpha = \mu p.\,(p \to r) \to q$.

Dla termu (b) dostajemy równania $\alpha_x = \alpha_y \to \beta = \beta \to \beta \to \gamma$, skąd wynika, że $\beta = \beta \to \gamma$ i znowu nie ma rozwiązania. Tym razem jednak typowanie rekurencyjne nie jest pozytywne (typ β występuje na negatywnej pozycji w $\beta \to \gamma$).

Term (c) jest typowalny w typach prostych. Mamy tu równania $\alpha_x = \alpha_y \to \beta$, $\alpha_x = \beta \to \delta \to \gamma$, $\alpha_z = \alpha_y \to \delta$, które można rozwiązać, przyjmując $\alpha_y = \beta = \delta \to \gamma$, $\alpha_x = (\delta \to \gamma) \to \delta \to \gamma$, $\alpha_z = (\delta \to \gamma) \to \delta$. Term (c) ma wszystkie typy $((\delta \to \gamma) \to \delta \to \gamma) \to (\delta \to \gamma) \to ((\delta \to \gamma) \to \delta) \to \delta$.

Termy (a)–(c) są postaciami normalnymi, są więc typowalne w systemie z typami iloczynowymi (zadanie 33). W polimorficznym rachunku lambda każdy z nich ma typ $\forall p\, p \to \forall p\, p \to \forall p\, p \to q$.

35: Próba typowania termu (35a) prowadzi do układu równań:

$$\alpha_x = \alpha_y \to \beta \to \gamma, \quad \alpha_y = \alpha_x \to \beta, \tag{1}$$

który implikuje $\alpha_x = (\alpha_x \to \beta) \to \beta \to \gamma$, a więc nie ma rozwiązania w typach prostych. Dla termu (35b) mamy układ równań:

$$\alpha_x = \alpha_y \to \beta \to \gamma = \alpha_y \to \beta, \tag{2}$$

który też nie ma rozwiązania, bo implikuje $\beta = \beta \to \gamma$. Natomiast w przypadku termu (35c) dostajemy unifikację $\alpha_x = \alpha_y \to \beta \to \gamma = \alpha_y \to \alpha_y \to \delta$, którą rozwiązujemy przyjmując $\delta = \beta = \alpha_y = p$ oraz $\alpha_x = p \to p \to p$. Oznacza to, że nasz term ma typ $(p \to p \to p) \to p \to p$.

Różnica pomiędzy równaniami (1) i (2) polega na tym, że w przypadku (2) otrzymujemy równanie $\beta = \beta \to \gamma$, w którym pętla od β do β jest negatywna. A więc term (35b) nie jest typowalny w systemie pozytywnych typów rekurencyjnych. Inaczej jest dla równań (1), gdzie możemy przyjąć $\beta = q$, $\gamma = r$, $\alpha_x = \mu p.\,(p \to q) \to q \to r$, $\alpha_y = (\mu p.\,(p \to q) \to q \to r) \to q$. Term (35a) ma więc typ $(\mu p.\,(p \to q) \to q \to r) \to ((\mu p.\,(p \to q) \to q \to r) \to q) \to r$.

Term (35d) nie jest typowalny w systemie typów prostych, ani pozytywnych typów rekurencyjnych, bo zmienna z jest aplikowana sama do siebie. Jej domniemany typ α_z musiałby więc spełniać równanie $\alpha_z = \alpha_z \to \beta$, które nie ma rozwiązania, i gdzie pętla od α_z do α_z jest negatywna.

W polimorficznym rachunku lambda można mu przypisać typ, bo ten term jest wytarciem termu Churcha $\lambda x^{q \to \forall p\,(p\to p)} \lambda y^q (\lambda z^{\forall p\,(p \to p)}.\, z(r \to r)zr)(xy)$, który ma typ $(q \to \forall p\,(p \to p)) \to q \to r \to r$.

Wszystkie termy mają własność silnej normalizacji, więc są typowalne w systemie typów iloczynowych. Wszystkie oprócz (35d) są nawet postaciami normalnymi, więc są też typowalne w systemie **F**. Na przykład, term (35a) ma między innymi typ iloczynowy $p \wedge (p \to p \to p) \to p \wedge (p \to p) \to p$, a term (35b) ma typ $(p \to p \to p) \wedge (p \to p) \to p \to p$. Oba termy mają zaś typ polimorficzny $(\forall p\, p) \to (\forall p\, p) \to p$.

36: Domniemane typy proste $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z, \alpha_u$ zmiennych x, y, z, u występujących w termie 36a powinny spełniać równania: $\alpha_x = \alpha_z \to \beta = \alpha_y \to \gamma$, $\alpha_z = \alpha_u \to \delta$, $\alpha_y = \delta$. Stąd wynika $\alpha_y = \alpha_z = \alpha_u \to \alpha_y$, czyli α_y musi być swoją własną właściwą podformułą. Zatem term 36a nie jest typowalny w typach prostych. W systemie **F** ma typ $p \to (p \to p \to p) \to p$ w otoczeniu $\{z : \forall p.\, p, x : p \to p\}$ bo powstaje przez wycieranie typów z takiego termu Churcha: $\lambda u\,{:}\,p\,(\lambda y\,{:}\,p\,\lambda w\,{:}\,p{\to}p{\to}p.\,w(x(zp))(xy))(z(p{\to}p)u)$. A skoro jest silnie normalizowalny, to jest też typowalny w typach iloczynowych bez pomocy omegi. Z termem 36b sprawa jest prostsza. W otoczeniu $\{z : p, x : p \to p\}$ ma typ $(p \to p) \to (p \to p \to p) \to p$, bo powstaje przez wycieranie typów z termu $\lambda u\,{:}\,p{\to}\,p\,(\lambda y\,{:}\,p\,\lambda w\,{:}\,p{\to}p{\to}p.\,w(xz)(xy))(uz)$.

40: Jedynym takim termem jest **S**. Jeśli term M w postaci normalnej ma w pustym otoczeniu typ $(p \to q \to r) \to (p \to q) \to p \to r$ to musi być abstrakcją $M = \lambda x.\,N$ (nie może się zaczynać od zmiennej wolnej, bo takich nie ma). Wtedy $x : p \to q \to r \vdash N : (p \to q) \to p \to r$. Term N nie może być aplikacją zmiennej x do jakichś argumentów, bo musiałby mieć wtedy typ $q \to r$ albo r. Zatem $N = \lambda y.\,P$, gdzie $x : p \to q \to r, y : p \to q \vdash P : p \to r$. Term P też nie może być aplikacją (dlaczego?) więc $P = \lambda z.\,Q$, gdzie Q ma typ r w otoczeniu $\Gamma = \{x : p \to q \to r, y : p \to q, z : p\}$. Jedyna możliwość, to $Q = xRT$, gdzie R i T mają w Γ odpowiednio typy p i q. Jedyne takie termy to $R = z$ i $T = yz$.

41: Term normalny i zamknięty typu $\tau_1 = p \to p$ musi być abstrakcją postaci $\lambda x^p.\,M$, gdzie $x : p \vdash M : p$. Ale wtedy $M = x$, a zatem typ $\tau_1 = p \to p$ ma dokładnie jeden element **I**. Pozostałe typy τ_n o numerach nieparzystych mają nieskończenie wiele elementów. Najpierw zauważmy, że istnieje nieskończenie wiele termów postaci $\lambda F^{(p\to p)\to p}.\,F(\lambda x_1^p.\,F(\lambda x_2^p.\,\ldots F(\lambda x_m^p.\,x_l)))$, które są typu τ_3. A teraz użyjmy indukcji: jeśli $\vdash M : \tau_n$, to $\lambda F^{\tau_n\to p}.\,FM$ ma typ $\tau_{n+2} = (\tau_n \to p) \to p$. Jeśli więc τ_n ma nieskończenie wiele elementów, to τ_{n+2} też.

Typy τ_n o parzystych numerach są puste. Po pierwsze nie ma zamkniętego termu typu p. Po drugie jeśli $n+1$ jest parzyste, to n jest nieparzyste, więc $\vdash M_n : \tau_n$ dla pewnego zamkniętego M_n. Jeśli teraz $\vdash N : \tau_{n+1}$, to N musi być abstrakcją postaci $\lambda X^{\tau_n}.\,Q$, gdzie $X : \tau_n \vdash Q : p$. Ale wtedy $Q[X := M_n]$ ma typ p w pustym otoczeniu, a to niemożliwe.

42: Przypadek pierwszy: $k \geq 3$ nieparzyste. Wtedy istnieje nieskończenie wiele termów zamkniętych typu τ_k, a zatem nieskończenie wiele termów zamkniętych typu $\tau_n \to \tau_k$ postaci $\lambda F^{\tau_n}.\,M$, gdzie $\vdash M : \tau_k$. Przypadek drugi: $n \geq 2$ parzyste. Wtedy $n + 1 \geq 3$ jest nieparzyste i istnieje nieskończenie wiele inhabitantów typu τ_{n+1}. Każdy z nich ma postać normalną $\lambda F^{\tau_n}.\,M^p$ i z każdego łatwo zrobimy element typu $\tau_n \to \tau_k$, mianowicie $\lambda F^{\tau_n}\lambda G^{\tau_{k-1}}.\,M^p$. Przypadek trzeci: n nieparzyste, k parzyste. Wtedy typ $\tau_n \to \tau_k$ jest pusty. Istotnie, term zamknięty tego typu w długiej postaci normalnej musiałby mieć kształt $\lambda F^{\tau_n}\lambda X^{\tau_{k-1}}.\,Q$ (gdy $k > 0$) lub kształt $\lambda F^{\tau_n}.\,Q$ (gdy $k = 0$), gdzie Q ma typ p w otoczeniu postaci $\{F : \tau_n, X : \tau_{k-1}\}$ lub postaci $\{F : \tau_n\}$. Ale liczby n i $k-1$ są nieparzyste i istnieją inhabitanty $\vdash P : \tau_n$, $\vdash R : \tau_{k-1}$. No to term $Q[F := P][X := R]$ (albo term $Q[F := P]$) miałby typ p w pustym otoczeniu, sprzeczność.

43: Term $\lambda x^{(((q\to p)\to q)\to q)\to p}.\,x(\lambda y^{(q\to p)\to q}.\,y(\lambda z^q.\,x(\lambda y_1^{(q\to p)\to q}\,z)))$ jest typu (65a).

Ale nie istnieje term zamknięty typu (65b). Gdyby taki term istniał, to miałby postać normalną, więc wystarczy pokazać, że nie istnieje szukany term w postaci normalnej. Niech M będzie najkrótszym takim termem. Musi on być abstrakcją postaci $M = \lambda x^{(((p\to q)\to q)\to q)\to p}\,N$, gdzie N jest typu p, a więc $N = xP$ dla pewnego P typu $((p \to q) \to q) \to q$. Term P musi być abstrakcją $P = \lambda y^{(p\to q)\to q}\,Q$, gdzie Q jest typu q i musi być $Q = yR$ dla pewnego $R : p \to q$. Zatem $R = \lambda z^p.T$, gdzie $T : q$, ściślej:

$$x : (((p \to q) \to q) \to q) \to p,\quad y : (p \to q) \to q,\quad z : p \quad\vdash\quad T : q,$$

i na dodatek T jest najkrótszy możliwy (bo taki ma być term M). Rozumując podobnie jak wyżej, otrzymamy, że $T = y(\lambda z_1^p.T_1)$, gdzie $T_1 : q$. Niech teraz $T_2 = T_1[z_1 := z]$. Wtedy:

$$x : (((p \to q) \to q) \to q) \to p,\quad y : (p \to q) \to q,\quad z : p \quad\vdash\quad T_2 : q,$$

a term T_2 jest krótszy niż T, sprzeczność.

44: Term zamknięty typu $((p \to q) \to p) \to p$ nie istnieje. Gdyby taki term istniał, to miałby postać normalną tego samego typu. Ta postać normalna musiałaby być taka: $\lambda x\,N$, gdzie N spełnia warunek $x : (p \to q) \to p \vdash N : p$. Jedyna możliwość to $N = xM$, gdzie $x : (p \to q) \to p \vdash M : p \to q$. Term M jest też normalny, więc jest albo aplikacją zmiennej do jakichś argumentów albo abstrakcją. Oczywiście pierwsza możliwość odpada, mamy więc $M = \lambda yP$, gdzie $x : (p \to q) \to p, y : p \vdash P : q$. Ponieważ aplikacja postaci xQ ani postaci yQ nie może być typu q, więc takiego termu nie ma.

Poszukajmy więc termu zamkniętego typu $((((p \to q) \to p) \to p) \to q) \to q$. Powinien wyglądać tak: $\lambda x.xM$, gdzie $x : ((p \to q) \to p) \to p) \to q \vdash M : ((p \to q) \to p) \to p$. Zatem $M = \lambda y\, N$ gdzie $x : ((p \to q) \to p) \to p) \to q, y : (p \to q) \to p \vdash N : p$. Dalej $N = yQ$, gdzie Q jest takie, że

$$x : (((p \to q) \to p) \to p) \to q, y : (p \to q) \to p \vdash Q : p \to q.$$

Bez straty ogólności możemy przyjąć $Q = \lambda z.R$ i ostatecznie mamy do rozwiązania zadanie

$$x : (((p \to q) \to p) \to p) \to q, y : (p \to q) \to p, z : p \vdash R : q.$$

Oczywiście powinniśmy mieć $R = xM'$ gdzie M' jest znowu typu $((p \to q) \to p) \to p$ i osoba małej wiary może się w tym miejscu zniechęcić. Ale teraz sytuacja jest inna, bo mamy deklarację $z : p$, więc wystarczy przyjąć $M' = \lambda u.z$ i już. Dostaliśmy takiego inhabitanta: $\lambda x.x(\lambda y.y(\lambda z.x(\lambda u.z)))$.

46: Jeśli zmienna p ma wartość logiczną jeden, to każda formuła implikacyjna zbudowana z p też ma wartość jeden. Dlatego taka formuła jest tautologią wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniona przez wartościowanie $v(p) = 0$. Ponieważ formuła $\tau_1 \to \cdots \to \tau_n \to p$ jest spełniona przez v wtedy i tylko wtedy, gdy któraś z formuł τ_i nie jest spełniona, więc mamy równoważność, o której mowa w przypisie. Teraz udowodnimy przez indukcję, że typ $\sigma = \tau_1 \to \cdots \to \tau_n \to p$ jest niepusty wtedy i tylko wtedy, gdy jest klasyczną tautologią. ($\Rightarrow$) Załóżmy, że $M : \sigma$. Jeśli σ nie jest tautologią, to wszystkie τ_i są tautologiami i z założenia indukcyjnego istnieją kombinatory $N_1 : \tau_1, \ldots, N_n : \tau_n$. Zatem $MN_1 \ldots N_n : p$, czyli zmienna typowa p ma inhabitanta. Ale wtedy istniałby także kombinator typu p w postaci normalnej, a takiego przecież nie ma. ($\Leftarrow$) Jeśli σ jest tautologią, to któreś $\tau_i = \rho_1 \to \cdots \to \rho_r \to p$ nie jest tautologią, więc tautologiami są wszystkie $\rho_1, \ldots, \rho_r$. Z założenia indukcyjnego mamy kombinatory $M_1 : \rho_1, \ldots, M_r : \rho_r$, a więc σ ma inhabitanta $\lambda x_1 \ldots x_n.\, x_i M_1 \ldots M_r$.

47: Niech $a \notin \mathrm{FV}(\tau)$. Wtedy $\sigma_\tau = (\tau \to a) \to a \to a$. Ten typ ma zawsze inhabitanta $\lambda fx.\, x$. Drugi musi mieć długą postać normalną $\lambda fx.\, fM$, gdzie $f : \tau \to a, x : a \vdash M : \tau$. Ale ponieważ w typie τ nie występuje w ogóle zmienna a, więc ani f ani x nie są wolne w M. Zatem $\vdash M : \tau$.

49: $M_i = \lambda yzx_1 \ldots x_n.\, yx_1 \ldots x_i((\lambda v\, x_{i+1})(x_{i+1}z)) \ldots ((\lambda v\, x_n)(x_n z)))$ oraz $\tau_i = \sigma_i \to p \to \sigma_i$, gdzie $\sigma_i = p \to \cdots \to p \to (p \to p) \to \cdots \to (p \to p) \to p$ i przesłanka $(p \to p)$ występuje $n - i$ razy w σ_i.
W systemie BCD wszystkie termy M_i mają typ τ_n, bo beta-konwersja zachowuje typy. Aplikacjom $x_j z$ można przypisać typ ω także wtedy, gdy x_j ma typ p.

50: Możliwe rozwiązanie jest takie: $\lambda u.\mathbf{K}x(\lambda v_0 v_1 v_2 z.v_0(v_1(zx))(v_1 y)(v_2(uz))(v_2 x))$. Istotnie, typ termu $\mathbf{K}x\ldots$ musi być taki jak typ x, czyli p. Natomiast typ u musi być postaci $\alpha \to \beta$ gdzie α jest typem z oraz $\beta = p$, bo ta sama zmienna v_2 jest aplikowana zarówno do x jak i do uz, więc te dwa termy muszą mieć te same typy. Podobnie, typem z musi być $p \to q$, co jest zdeterminowane przez dwa pierwsze argumenty zmiennej v_0 (która odgrywa wyłącznie rolę „kleju", i której typ jest bez znaczenia).

51: Na przykład $M = \lambda xy.\, \mathbf{K}a(\lambda zwv.\, w(x(\lambda u.\, \mathbf{K}b(v(wa)(wu)(zy)(zb)))))$. Ten term musi mieć typ postaci $\sigma \to \tau \to p$, gdzie σ jest typem zmiennej x, a τ jest typem zmiennej y. Aplikacje zy i zb wymuszają równość $\tau = q$. Podobnie, wszystkie wyrażenia, do których aplikowane jest w, muszą być typu p. Ponieważ $\mathbf{K}b\ldots$ ma typ q, więc wyrażenie $\lambda u.\, \mathbf{K}b(v(wa)(wu)(zy)(zb))$ jest typu $p \to q$, skąd wynika $\sigma = (p \to q) \to p$.

52: $\tau_n = (p_n \to p_n \to p_{n-1}) \to (p_{n-1} \to p_{n-1} \to p_{n-2}) \to \cdots \to (p_2 \to p_2 \to p_1) \to (p_1 \to p_1 \to p_0) \to p_n \to p_0$.

53: Niech $\tau = p \to p \to p$. Jeśli zmienne a_1, a_2, z_1, z_2 są zawsze typu p, zmienne x, y sa typu τ, a zmienna f typu $\tau \to \tau$, to F ma typ $\omega_\tau \to \omega_\tau$. Wyrażenie $F\mathbf{n}$ redukuje się do $\lambda fxa_1a_2.\, xa_1a_2$, gdy n jest parzyste, i do $\lambda fxa_1a_2.\, fxa_1a_2$, gdy n jest nieparzyste. Zatem postacią normalną termu $F\mathbf{5}$ ze względu na beta-redukcje jest term $\lambda fxa_1a_2.\, fxa_1a_2$, który jest eta-równoważny liczebnikowi $\mathbf{1}$. Postacią $\beta\eta$-normalną jest kombinator $\mathbf{I}$

54a: Tak, jest definiowalna np. termem $F = \lambda n.\, n(\lambda P\, \langle \mathbf{1}, \mathbf{ifzero}(P\pi_1)\mathbf{23}\rangle)\langle \mathbf{0}, \mathbf{3}\rangle\pi_2$, gdzie $\pi_i = \lambda x_1x_2.\, x_i$ oraz $\mathbf{ifzero} = \lambda pqr\lambda fx.p(\lambda y.rfx)(qfx)$. Oczywiście $\langle \mathbf{m}, \mathbf{n}\rangle$ oznacza $\lambda z.\, z\mathbf{mn}$.

54b: Nie. Ta funkcja nie jest wielomianem warunkowym. Istotnie, dla argumentów większych od zera, wielomian warunkowy jest po prostu wielomianem o współczynnikach naturalnych, więc jest monotoniczny. Tymczasem $f(1) = 3 > 2 = f(2)$. Ponieważ funkcja g jest wielomianem warunkowym, więc w tym punkcie odpowiedzi się różnią.

54c: Tak. Term F w zadaniu 54a ma typ $\omega_\tau \to \omega_p$, gdzie $\tau = (\omega_p \to \omega_p \to \omega_p) \to \omega_p$ jest typem pary uporządkowanej $\langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle$, dla $\mathbf{m}, \mathbf{n} : \omega_p$.

54d: Term $\lambda nfxa_1a_2a_3.\, n(\lambda yz_1z_2z_3.\, yz_2z_3z_3)(\lambda z_1z_2z_3.\, z_1)(f^2(x)a_1a_2a_3)(f^3(x)a_1a_2a_3)(f^2(x)a_1a_2a_3)$ ma typ $\omega_\tau \to \omega_\tau$, gdzie $\tau = p \to p \to p \to p$.

55: Funkcja g nie jest wielomianem warunkowym, więc nie jest definiowalna w typie $\omega_p \to \omega_p$. Ale jest definiowalna skośnie. Niech $\tau = (\omega_p \to \omega_p \to \omega_p \to \omega_p \to \omega_p) \to \omega_p$. Naszą funkcję definiuje kombinator $G = \lambda x : \omega_\tau.\, G'$ typu $\omega_\tau \to \omega_p$. Jest ona też definiowalna w systemie $\mathbf{F}$, bo wystarczy G przerobić na polimorficzny term $G_F = \lambda x : \omega.\, \Lambda p.\, G'[x := x\tau]$. Pozostaje zdefiniować $G' := x(\lambda c : \tau.\, \langle c\pi_2^4, c\pi_3^4, \mathit{add}(c\pi_3^4)(c\pi_4^4), \mathit{succ}(\mathit{succ}(c\pi_4^4)) \rangle)\langle \mathbf{4}, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle \pi_1^4$, gdzie liczebniki są typu ω_p, oraz $\pi_i^4 = \lambda x_1x_2x_3x_4 : \omega_p.x_i$.

57: Na przykład $G = \lambda n.\, (n(\lambda C.\, \langle \pi_1^4 C + \pi_2^4 C, \pi_3^4 C, \pi_4^4 C, \pi_1^4 C \rangle)\langle \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle)\pi_1^4$. Algorytm G działa tak: zaczynamy od czwórki $\langle \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$ i n razy wykonujemy operację $\langle p, d, t, c \rangle \mapsto \langle p + d, t, c, d \rangle$, która co trzeci krok dodaje 1 do pierwszej współrzędnej. Wynik dzielenia n przez 3 odczytujemy z pierwszej współrzędniej. Term G ma typ postaci $\omega_\tau \to \omega_p$, gdzie $\tau = (\omega_p \to \omega_p \to \omega_p \to \omega_p \to \omega_p) \to \omega_p$ jest typem czwórki liczebników. Nie istnieje taki term typu $\omega_p \to \omega_p$, bo dzielenie całkowite przez trzy nie jest wielomianem warunkowym.

58: Niech $G = \lambda Cu.\, u(C\pi_2^4)(C\pi_3^4)(\mathtt{add}(C\pi_3^4)(C\pi_4^4))(\mathtt{add}(C\pi_4^4)\mathbf{2})$, gdzie `add` to dodawanie liczebników oraz $\pi_i^4 = \lambda x_1x_2x_3x_4.\, x_i$. Operacja G przekształca czwórkę uporządkowaną $\langle p, d, t, c \rangle = \lambda u.\, \mathit{updtc}$ w czwórkę $\langle d, t, t + c, c + 2 \rangle$. Jeśli n razy wykonamy tę operację zaczynając od czwórki $\langle 4, 1, 0, 1 \rangle$, to otrzymamy $\langle f(n), f(n + 1), f(n + 2), 2n + 1 \rangle$. A zatem możemy przyjąć $F = \lambda n.\, nG(\langle \mathbf{4}, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle)\pi_1^4$. Term F ma typ $\omega_{(\omega_p \to \omega_p \to \omega_p \to \omega_p \to \omega_p) \to \omega_p} \to \omega_p$. Ponieważ funkcja f nie jest wielomianem warunkowym (jeden ze współczynników jest ujemny), więc nie można jej zdefiniować w typie ω_p.

59a: Beztypowy β-test parzystości to na przykład term $\lambda n.\, n(\lambda fxy.\, fyx)\mathbf{K01}$.

59b: Nie istnieje β-test parzystości typu $\omega_p \to \omega_p$, bo funkcja charakterystyczna parzystości nie jest wielomianem warunkowym.

Aby to udowodnić, należy zauważyć, że każdy wielomian warunkowy o zmiennych $\vec{x} = x_1, \ldots, x_n$ można przedstawić w postaci instrukcji warunkowej `if` $x_i = 0$ `then` $f(\vec{x})$ `else` $g(\vec{x})$, gdzie f i g są wielomianami (o współczynnikach naturalnych) lub wielomianami warunkowymi. Dlatego test parzystości musiałby mieć postać `if` $x = 0$ `then` $f(x)$ `else` $g(x)$, gdzie f i g są wielomianami. Wielomian g o współczynnikach naturalnych jest funkcją monotoniczną, więc $1 = g(1) \leq g(2) = 0$, sprzeczność.

59c: Na przykład $\lambda n\lambda fxy_1y_2.\, n(\lambda fxy.\, fyx)\mathbf{K}(xy_1y_2)(fxy_1y_2)$.

60: Niech $\mathit{Bool} = \forall p.\, p \to p \to p$. Wtedy $\lambda n : \omega.\, n\, \mathit{Bool}(\lambda b : \mathit{Bool}.\, b\, \mathit{Bool}\, \mathbf{false}\, \mathbf{true})\, \mathbf{true}\, \omega\, n\, (\mathbf{succ}\, n)$, gdzie $\mathit{Bool} = \forall p.\, p \to p \to p$, definiuje funkcję g w systemie $\mathbf{F}$ (w stylu Churcha). Funkcja g jest też definiowalna termem $\lambda nfxa_1a_2.\, n(\lambda yz_1z_2.\, yz_2z_1)(\lambda z_1z_2.\, z_1)(nfxa_1a_2)(f(nfx)a_1a_2)$ (w stylu Curry'ego), który ma typ $\omega_{p \to p \to p} \to \omega_{p \to p \to p}$. Definicja w typie $\omega_p \to \omega_p$ jest niemożliwa, bo funkcja nie jest wielomianem warunkowym.

61: Funkcja $\lambda\!\!\lambda n.\, 3n^2 - 7n + 4$ jest definiowalna termem $\lambda n.\, \Pi_1^3(nF\langle \mathbf{4}, \mathbf{0}, \mathbf{2} \rangle)$ typu $\omega_\tau \to \omega_p$, gdzie F jest takie, że $F\langle \mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{k} \rangle =_\beta \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} + \mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{6} \rangle$, a $\tau = (\omega_p \to \omega_p \to \omega_p \to \omega_p) \to \omega_p$ jest typem krotki postaci $\langle \mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{k} \rangle = \lambda y\, .y\, \mathbf{mnk}$.

62: Funkcja $\lambda\!\!\lambda n.\, \mathit{if}\, n \leq 2\; \mathit{then}\; n\; \mathit{else}\; n + 2$ jest definiowalna ze względu na $\beta\eta$-konwersję termem typu $\omega_\tau \to \omega_\tau$, gdzie $\tau = p \to p \to p \to p \to p$. Term jest taki:

$$\lambda n\lambda fx\lambda a_1a_2a_3a_4.\, n(\lambda yz_1z_2z_3z_4.\, yz_2z_3z_4z_4)(\lambda z_1z_2z_3z_4.\, z_1)AAAB,$$

gdzie $A = nfxa_1a_2a_3a_4$ i $B = f(f(nfx))a_1a_2a_3a_4$. Wyrażenie $\lambda yz_1z_2z_3z_4.\, yz_2z_3z_4z_4$ aplikowane kolejno do rzutowań π_1^4, π_2^4, π_3^4, π_4^4, daje w wyniku odpowiednio π_2^4, π_3^4, π_4^4 i π_4^4.

63: Niech $\mathrm{F} = \lambda fg.gf$ i niech $A_1(k, l) = \mathrm{F}^k(\lambda z.\, \mathbf{1})(\mathrm{F}^l(\lambda z.\, \mathbf{0}))$ oraz $A_0(k, l) = \mathrm{F}^k(\lambda z.\, \mathbf{0})(\mathrm{F}^l(\lambda z.\, \mathbf{1}))$. Wtedy $C\mathbf{mn} \twoheadrightarrow A_1(m, n)$, oraz $A_1(k, l) \twoheadrightarrow A_0(l, k - 1)$ i $A_0(k, l) \twoheadrightarrow A_1(l, k - 1)$, dla $k > 0$, a więc funkcja definiowana przez C:

$$c(m,n) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } m \le n; \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$$

jest obliczana w czasie proporcjonalnym do mniejszego argumentu. Term C nie ma typu $\omega \to \omega \to \omega$, ani żadnego typu postaci $\omega_\tau \to \omega_\tau \to \omega_\rho$, bo typem głównym termu $\lambda fg.gf$ jest $\alpha \to (\alpha \to \beta) \to \beta$, którego żadna instancja nie jest postaci $\tau \to \tau$. Ale C jest typowalny w typach prostych, bo dla $x : (\alpha \to (\alpha \to \beta) \to \beta) \to (\gamma \to \omega) \to \delta \to \varepsilon$ oraz $y : (\alpha \to (\alpha \to \beta) \to \beta) \to (\gamma \to \omega) \to \delta$, otrzymamy $xF(\lambda z.\,\mathbf{1})(yF(\lambda z.\,\mathbf{0})) : \varepsilon$. Funkcja c nie jest definiowalna w typach prostych, bo nie jest wielomianem warunkowym. Nie jest też definiowalna przez term typu $\omega_\tau \to \omega_\tau \to \omega_\rho$, bo wtedy można by też zdefiniować test na równość. A z twierdzenia Statmana wiadomo, że to niemożliwe.

64a: Nie, bo wtedy istniałby term tego typu w długiej postaci normalnej i musiałby mieć postać $\lambda x^{(p\to q)\to r}\lambda y^{p\to r}.M$, gdzie M byłby typu r. Wtedy albo $M = yN$, gdzie $N : p$ albo $M = x(\lambda z^p.R)$, gdzie $R : q$. Ale takich termów N ani R nie ma, bo nie mamy zmiennej typu kończącego się na p lub q.

64b: Tak, bo mamy term tego typu:

$$\lambda x^{(((p\to q)\to r)\to(p\to r)\to r)\to q}.\, x(\lambda y^{(p\to q)\to r}\lambda z^{p\to r}.\, y(\lambda u^p.\, x(\lambda y_1^{(p\to q)\to r}\lambda z_1^{p\to r}.zu)))$$

65a: Term $\lambda x^{(((q\to p)\to q)\to q)\to p}.\, x(\lambda y^{(q\to p)\to q}.\, y(\lambda z^q.\, x(\lambda y_1^{(q\to p)\to q}\, z)))$ jest tego typu. A zatem formuła (65a) jest twierdzeniem intuicjonistycznym.

65b: Ale dla tego typu nie istnieje inhabitant. Gdyby taki term istniał, to miałby postać normalną, więc wystarczy pokazać, że nie istnieje szukany term w postaci normalnej. Niech M będzie najkrótszym takim termem. Musi on być abstrakcją postaci $M = \lambda x^{(((p\to q)\to q)\to q)\to p}\, N$, gdzie N jest typu p, a więc $N = xP$ dla pewnego P typu $((p \to q) \to q) \to q$. Term P musi być abstrakcją $P = \lambda y^{(p\to q)\to q}\, Q$, gdzie Q jest typu q i musi być $Q = yR$ dla pewnego $R : p \to q$. Zatem $R = \lambda z^p.T$, gdzie $T : q$, ściślej:

$$x : (((p \to q) \to q) \to q) \to p,\;\; y : (p \to q) \to q,\;\; z : p \;\;\vdash\;\; T : q,$$

i na dodatek T jest najkrótszy możliwy (bo taki ma być term M). Rozumując podobnie jak wyżej, otrzymamy, że $T = y(\lambda z_1^p.T_1)$, gdzie $T_1 : q$. Niech teraz $T_2 = T_1[z_1 := z]$. Wtedy:

$$x : (((p \to q) \to q) \to q) \to p,\;\; y : (p \to q) \to q,\;\; z : p \;\;\vdash\;\; T_2 : q,$$

a term T_2 jest krótszy niż T, sprzeczność. Formuła (65b) nie jest twierdzeniem intuicjonistycznym.

66a: Ta formuła jest twierdzeniem, bo istnieje kombinator tego typu:

$$\lambda x^{(P\to Q)\to P}\lambda y^{(Q\to P)\to P}.\, y(\lambda z^Q.\, x(\lambda u^P.\, z)).$$

66b: Ta formuła nie jest twierdzeniem intuicjonistycznym, bo nie jest nawet klasyczną tautologią. Inny sposób: bo nie istnieje kombinator tego typu. Musiałby on bowiem być postaci $\lambda x^{(P\to Q)\to Q}\lambda y^P.\, M$. Niech $\Gamma = \{x : (P \to Q) \to Q,\, y : P\}$ i niech M będzie najkrótszym termem w postaci normalnej, o własności $\Gamma \vdash M : Q$. Wtedy $M = x(\lambda y^P.\, M')$, więc term $M'' = M'[y := x]$ jest krótszy niż M i ma typ Q w otoczeniu Γ. Sprzeczność.

66c: Ta formuła też nie jest twierdzeniem. Jej dowód normalny musiałby być postaci $\lambda xyz.\, M$, gdzie $x : S \to Q \to R$, $y : (S \to R) \to P$, $z : (Q \to R) \to P \vdash M : P$. Term M musi się zaczynać od y lub od z. W pierwszym przypadku $M = y(\lambda u^S.\, N)$, gdzie N ma typ R, a więc $N = xA^SB^Q$. W otoczeniu złożonym z x, y, z oraz nowej deklaracji $u : S$ nie ma jednak żadnego termu typu Q, bo nie ma żadnej zmiennej, której typ kończy się na Q. W drugim przypadku podobnie: $M = z(\lambda u^Q.\, xA^SB^Q)$ i teraz brakuje zmiennej typu kończącego się na S.

67a: Nie, bo nie istnieje postać normalna tego typu, a zatem żaden term tego typu. Postać normalna musiałaby być taka: $\lambda x^{(p\to q)\to r}y^{(q\to s)\to r}.\, x(\lambda z^p.\, M^q)$, albo taka $\lambda x^{(p\to q)\to r}y^{(q\to s)\to r}.\, y(\lambda z^q.\, M^s)$. Ale nie ma postaci normalnej typu q w otoczeniu $\{x : (p \to q) \to r,\; y : (q \to s) \to r, z : p\}$ ani postaci normalnej typu s w otoczeniu $\{x : (p \to q) \to r,\; y : (q \to s) \to r, z : q\}$.

67b: Tak, bo ten typ ma inhabitanta (w stylu Curry'ego): $\lambda xy.\, \lambda z.\, x(\lambda uv.\, y(\lambda wu.\, wv)z)z$.

68: Takie typy to np. $\bigcap_{i\in I} p_i \cap \bigcap_{i\in I}(p_i \to q_i) \to \bigcap_{i\in I} q_i$ dla zbiorów I o różnej liczbie elementów.

69: W systemie $\lambda_{\cap\leq}$ żaden kombinator punktu stałego nie ma typu, bo żaden taki kombinator nie ma postaci normalnej (zadanie 27). Ale w systemie BCD każdy kombinator punktu stałego ma typ ω.

70: Możliwym typem dla $\mathbf{Y}$ jest $(\omega \to p) \to p$, ponieważ dla $f : \omega \to p$ term $\lambda x.\, f(xx)$ jest typu $\omega \to p$ i jednocześnie typu ω. Inny typ dla $\mathbf{Y}$ to $(\omega \to b) \cap (b \to a) \to a$. Term $\lambda x.\, f(xx)$ ma typ $\omega \to b$, ponieważ $x : \omega$ implikuje $x : \omega \to \omega$, co daje $xx : \omega$ i $f(xx) : b$. Jednocześnie $(\lambda x.\, f(xx))$ ma typ $(\omega \to b) \to a$, bo $x : \omega \to b$ implikuje $xx : b$, a ponieważ $f : b \to a$ to $f(xx) : a$.

Ale $\mathbf{Y}$ nie ma typu $(p \to p) \to p$. Gdyby tak było, to w dowolnym modelu $[\![\Omega]\!] = [\![\mathbf{YI}]\!] \in [\![p]\!]_\xi = \xi(p)$ dla każdego ξ, również dla $\xi(p) = \varnothing$. Sprzeczność.

71: W modelu beztypowego rachunku lambda definiuje się interpretację typów tak:

$$[\![\sigma \to \tau]\!]_\xi = [\![\sigma]\!]_\xi \Rightarrow [\![\tau]\!]_\xi = \{a \in D \mid \forall b \in D(b \in [\![\sigma]\!]_\xi \to a \cdot b \in [\![\tau]\!]_\xi\}.$$

Oczywiście $D \Rightarrow D = D$, więc potrzeba aksjomatu $\omega \leq \omega \to \omega$ wynika z postulatu $[\![\omega]\!] = D$.

Aksjomat $\sigma \to \tau \cap \rho \leq (\sigma \to \tau) \cap (\sigma \to \rho)$ jest niepotrzebny, bo wynika z pozostałych. Mamy bowiem $\sigma \to \tau \cap \rho \leq (\sigma \to \tau \cap \rho) \cap (\sigma \to \tau \cap \rho) \leq (\sigma \to \tau) \cap (\sigma \to \rho)$.

72: Ponieważ $\omega \in F_1$ oraz $\omega \leq \omega \to \omega$, więc $\omega \to \omega \in F_1$. Podobnie $\omega \in F_2$, a stąd $\omega \in F_1 \cdot F_2$. Zatem $F_1 \cdot F_2 \neq \emptyset$. Jeśli $\tau, \rho \in F_1 \cdot F_2$ to istnieją takie $\sigma, \delta \in F_2$, że $\sigma \to \tau, \delta \to \rho \in F_1$. Wtedy mamy $(\sigma \to \tau) \cap (\delta \to \rho) \in F_1$, a ponieważ $(\sigma \to \tau) \cap (\delta \to \rho) \leq (\sigma \cap \delta \to \tau) \cap (\sigma \cap \delta \to \rho) \leq (\sigma \cap \delta \to \tau \cap \rho)$, więc także $\sigma \cap \delta \to \tau \cap \rho \in F_1$. Skoro $\sigma \cap \delta \in F_2$ (bo to filtr), więc ostatecznie $\tau \cap \rho \in F_1 \cdot F_2$. Pokazaliśmy, że $F_1 \cdot F_2$ jest zamknięty ze względu na iloczyn. Teraz niech $\tau \in F_1 \cdot F_2$ i niech $\tau \leq \rho$. Jest takie $\sigma \in F_2$, że $\sigma \to \tau \in F_1$. Ale skoro $\sigma \to \tau \leq \sigma \to \rho$, to $\sigma \to \rho \in F_1$, skąd wynika $\rho \in F_1 \cdot F_2$.

73: Niech $\mathit{there} = \lambda z^\tau \Lambda p \lambda y^{\tau \to p}.\, yz$ i $\mathit{back} = \lambda x^\sigma.\, x\tau\mathbf{I}$. Term $\Lambda p \lambda y^{\tau \to p}. y(\Lambda r \lambda u^{\forall q\, (q \to r)}.\, u(\tau \to p)\, y)$ ma typ σ i nie jest postaci $\mathit{there}(N)$.

74: Przyjmiemy τ jak w zadaniu 73 i $\varrho = \forall r\, (r \to r)$. Wtedy wyrażenie

$$\Lambda p \lambda x^{\tau \to \varrho \to p}.\, x(\Lambda r \lambda u^{\forall q\, (q \to r)}.\, u(\tau \to \varrho \to p)x)\mathbf{I}$$

ma typ $\tau \times \varrho$ i nie jest parą uporządkowaną.

75: Należy najpierw zdefiniować iloczyn kartezjański typów $\sigma \times \tau$, pary uporządkowane i rzutowania. Definicja rekursora to $\Lambda p \lambda f^{\omega \to p \to p} \lambda n^\omega \lambda y^p\, \pi_1(n(p \times \omega)(\lambda v^{p \times \omega}\, \langle f(\pi_2(v))(\pi_1(v)), \mathit{succ}(\pi_2(v))\rangle)\langle y, \mathbf{0}\rangle)$.

77: Wskazówka: niech M_n będzie numeracją wszystkich kombinatorów typu $\omega \to \omega$. Niech $f(n, k) = m$, gdy $M_n\, \mathbf{k} =_{\beta\eta} \mathbf{m}$ i niech $g(n) = f(n, n) + 1$. Funkcja g jest obliczalna. Czy może być definiowalna w systemie $\mathbf{F}$?