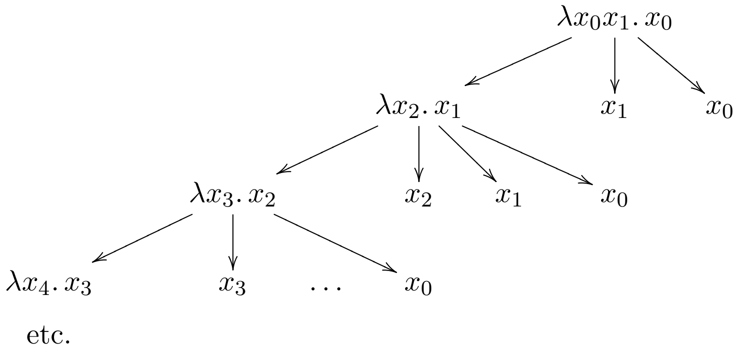
Egzamin z rachunku lambda, 1 lutego 2024

1. (a) Czy istnieją takie termy M, N, że $M =_\beta \lambda x.\, NxMx$ oraz $N =_\beta \lambda xy.\, MyNx$?
   (b) A czy istnieją takie termy M, N, że $M =_\beta \lambda x.\, xNMx =_\beta \lambda xy.\, yMNx$?

2. Proszę skonstruować taki term M, że (patrz rysunek):

   – drzewo $\mathrm{BT}(M)$ ma korzeń $\lambda x_0 x_1.\, x_0$ i jedną gałąź nieskończoną (w lewo);
   – wierzchołki na poziomie $n > 0$ mają (od lewej) etykiety $\lambda x_{n+1}.\, x_n$, x_n, $\ldots$, x_0.



3. Proszę skonstruować lambda-term F, który w rachunku z typami prostymi skośnie definiuje (ze względu na β-konwersję) wielomian $f(n) = n^2 - 4n + 4$. Czy istnieje taki term, który ma typ postaci $\omega_p \to \omega_p$?

4. Niech $\tau_0 = p$, $\tau_{n+1} = \tau_n \to p$. Wiadomo, że dla nieparzystych $n \geq 3$, typ τ_n ma nieskończenie wiele inhabitantów. Ile jest różnych inhabitantów (termów zamkniętych w postaci normalnej) typu $\tau_n \to \tau_k$ dla $n, k \geq 2$?

Przykładowe rozwiązania:

1: (a) Tak. Niech $F = \lambda X.\langle\lambda x.\, X\pi_2 x(X\pi_1)x, \lambda xy.\, X\pi_1 y(X\pi_2)x\rangle$, gdzie $\langle A, B\rangle$ oznacza $\lambda u.\, uAB$, a π_1 i π_2 to, odpowiednio, $\lambda xy.\, x$ i $\lambda xy.\, y$. Term $\mathsf{X} = \mathbf{Y}F$ spełnia równanie $\mathsf{X} =_\beta F\mathsf{X}$, więc możemy zdefiniować $M := \mathbf{Y}F\pi_1$ i $N := \mathbf{Y}F\pi_2$.

(b) Nie. Korzeń drzewa $\mathrm{BT}(M)$ musiałby mieć etykietę $\lambda x.\, x$ i jednocześnie $\lambda xy.\, y$.

2: Oznaczmy przez T_n (dla $n > 0$) drzewo zaczepione w wierzchołku $\lambda x_{n+1}.\, x_n$, a drzewo $\mathrm{BT}(M)$ napiszmy jako $\lambda x_0.\, T_0$. Wtedy $T_n = \lambda x_{n+1}.\, x_n T_{n+1} x_{n+1} x_n \ldots x_0$ dla wszystkich n. Możemy to zapisać inaczej: $T_n = \lambda x_{n+1}.\, g_n(x_n T_{n+1} x_{n+1})$, gdzie $g_n = \lambda u.\, ux_n \ldots x_0$ jest operacją dopisywania aktualnego „ogona". Drzewo T_n jest wyznaczone przez swoją zmienną czołową x_n i operator g_n. Ponieważ $g_{n+1} = \lambda u.\, g_n(ux_{n+1})$, więc mamy taką definicję rekurencyjną: $T(x, g) = \lambda x'.\, g(xT(x', g')x')$, gdzie $g' = \lambda u.\, g(ux')$. Poszukiwany term M to $\lambda x_0.\, \mathbf{Y}(\lambda txgx'.\, g(x(tx'(\lambda u.\, g(ux')))x'))x_0(\lambda u.\, ux_0)$, gdzie term $\lambda u.\, ux_0$ to początkowa wartość operacji g.

3: Niech $G = \lambda Cu.\, u(C\pi^4_2)(C\pi^4_3)(\mathtt{add}(C\pi^4_3)(C\pi^4_4))(\mathtt{add}(C\pi^4_4)\mathbf{2})$, gdzie $\mathtt{add}$ to dodawanie liczebników oraz $\pi^4_i = \lambda x_1x_2x_3x_4.\, x_i$. Operacja G przekształca czwórkę uporządkowaną $\langle p, d, t, c\rangle = \lambda u.\, updtc$ w czwórkę $\langle d, t, t + c, c + 2\rangle$. Jeśli n razy wykonamy tę operację zaczynając od czwórki $\langle 4, 1, 0, 1\rangle$, to otrzymamy $\langle f(n), f(n + 1), f(n + 2), 2n + 1\rangle$. A zatem możemy przyjąć $F = \lambda n.\, nG(\langle\mathbf{4}, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle)\pi^4_1$. Term F ma typ $\omega_{(\omega_p\to\omega_p\to\omega_p\to\omega_p\to\omega_p)\to\omega_p} \to \omega_p$. Ponieważ funkcja f nie jest wielomianem warunkowym (jeden ze współczynników jest ujemny), więc nie można jej zdefiniować w typie ω_p.

4: Przypadek pierwszy: $k \geq 3$ nieparzyste. Wtedy istnieje nieskończenie wiele termów zamkniętych typu τ_k, a zatem nieskończenie wiele termów zamkniętych typu $\tau_n \to \tau_k$ postaci $\lambda F^{\tau_n}.\, M$, gdzie $\vdash M : \tau_k$. Przypadek drugi: $n \geq 2$ parzyste. Wtedy $n + 1 \geq 3$ jest nieparzyste i istnieje nieskończenie wiele inhabitantów typu τ_{n+1}. Każdy z nich ma postać normalną $\lambda F^{\tau_n}.\, M^p$ i z każdego łatwo zrobimy element typu $\tau_n \to \tau_k$, mianowicie $\lambda F^{\tau_n}\lambda G^{\tau_{k-1}}.\, M^p$. Przypadek trzeci: n nieparzyste, k parzyste. Wtedy typ $\tau_n \to \tau_k$ jest pusty. Istotnie, term zamknięty tego typu w długiej postaci normalnej musiałby mieć kształt $\lambda F^{\tau_n}\lambda X^{\tau_{k-1}}.\, Q$ (gdy $k > 0$) lub kształt $\lambda F^{\tau_n}.\, Q$ (gdy $k = 0$), gdzie Q ma typ p w otoczeniu postaci $\{F : \tau_n, X : \tau_{k-1}\}$ lub postaci $\{F : \tau_n\}$. Ale liczby n i $k-1$ są nieparzyste i istnieją inhabitanty $\vdash P : \tau_n$, $\vdash R : \tau_{k-1}$. No to term $Q[F := P][X := R]$ (albo term $Q[F := P]$) miałby typ p w pustym otoczeniu, sprzeczność.