I/ Równania z opóźnieniem w zastosowaniach.

Głównym tematem tego wykładu będą równania różnicz. związane z opóźnieniem dyskretnym, czyli układy typu:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), x(t-\tau)),$$

gdzie $\tau > 0$ opóźnienie dyskretne

Będziemy jednak mówić (nieco) o ogólniejszym typie równań

$\dot{x}(t) = f(x_t)$, gdzie x_t jest funkcją,

$x_t(h) = x(t+h) \quad h \in [-\tau, 0]$,

co oznacza, że prawa strona układu może zależeć od całej „historii" z odcinka $[t-\tau, t]$, w szczególności może być postaci

$$\dot{x}(t) = \int_{t-\tau}^{t} f(x(s))\,ds$$

Od strony matematycznej mamy do czynienia z równaniem określonym na przestrzeni funkcyjnej – teorię buduje się dla p. B. funkcji ciągłych na odc. $[-\tau, 0]$ ze standardową normą sup.

Literatura: J. Hale – różne wydania i ogólnie wszystko, co ma w tytule functional diff. eqs., delay diff. eqs. retarded eqs. etc.

Zanim jednak przejdziemy do zasadniczego tematu chciałam zająć się zagadnieniem prostszym, tj. równaniami różnicowymi z opóźnieniem, a w szczególności omówić najstarszy znany nam matematyczny model populacyjny, który jest właściwie modelem z opóźnieniem. Cóż to takiego? Jest to ciąg Fibonacciego. Skąd się wziął? → prawd. znany był matematykom arabskim. W Liber Abaci Fibonacci podaje

(*) $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$

oraz kolejne wyrazy $1, 2, 3, 5, 8, \ldots$

Widzimy od razu, że Fibonacci pominął w tym ciągu drugą jedynkę. Zgodnie z przyjętymi założeniami powinno być $F_1 = F_2 = 1$, $F_3 = 2, \ldots$ (jak się zapisuje tradycyjnie)

choć w zasadzie powinno być $F_0 = F_1 = 1$, skoro w chwili początkowej ~~t0~~ mamy 1 parę.

Czym różni się ciąg (*) od standardowego dyskretnego układu dynamicznego?

standardowo $F_{n+1} = G(F_n)$, gdzie G jest funkcją ciągłą opisującą dynamikę układu. Orbita układu $(F_0, F_1, F_2, \ldots) = (F_0, G(F_0), G^2(F_0) \ldots)$ zależy od warunku pocz. F_0 i funkcji G.

Uwaga: w standardowej teorii dysk. u.d. zakładamy, że G jest odwracalna, wtedy orbita idzie też „w tył", nie tylko „w przód". Inaczej mówi się o półukładzie dyn.

Załóżmy dla uproszczenia, że $G: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (ogólnie w przypadku modeli zjawisk przyrodniczych mamy $G: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$)

II/ Wtedy mamy jednowymiarowy układ dynamiczny i $F_0 \in \mathbb{R}$ jednoznacznie wyznacza dynamikę dla zadanej funkcji G.
Najprostszym przykładem takiego układu jest równanie

(**) $F_{n+1} = r F_n$,

które z punktu widzenia populacji interpretujemy jako proces wzrostu proporcjonalny do liczebności populacji i odpowiada on (*) w sytuacji, gdyby króliki nie musiały dojrzewać, żeby się rozmnażać, czyli gdy populacja jest jednorodna.
Gdyby w (*) króliki nie musiały dojrzewać, to byłoby po prostu

$$F_{n+1} = 2F_n$$

jak dla zwykłego procesu podziału.
Wracając do równania (**) - z punktu widzenia modelowania dynamiki populacji należy oczywiście założyć, że $r > 0$.
W przeciwnym razie albo $F_n \equiv 0$, albo dla $r < 0$ z $F_0 > 0$ dostajemy $F_1 < 0$, co oczywiście nie może odzwierciedlać liczebności.
Zał. że $r > 0$. Oczywiście możemy rozwiązać (**) otrzymując $F_n = F_0 r^n$ i dla $r > 1$ mamy rzeczywisty wzrost liczebności, $r < 1$ - spadek do 0, $r = 1$ - populacja stacjonarna, $F_n \equiv F_0$.

Zauważmy teraz, że aby rozwiązać
(*) musimy zadać 2 liczby!
Sugeruje to w takim razie, że chociaż
mamy jedno równanie, to układ NIE JEST
jednowym. Faktycznie, możemy (**)
zapisać w postaci standardowej, ale $G: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
Jak? Niech $X_n = (F_{n-1}, F_n)$, czyli zamiast
bieżącego kroku n rozpatrujemy parę –
krok poprzedni i krok bieżący. Zauważmy,
że warunek początkowy jest właśnie
takiej postaci $(F_0, F_1) = (1, 1)$. W jaki
sposób otrzymujemy $X_{n+1} = (F_n, F_{n+1})$?

$$\begin{cases} F_n = G_1(F_{n-1}, F_n) = F_n = 0 \cdot F_{n-1} + 1 \cdot F_n \\ F_{n+1} = G_2(F_{n-1}, F_n) = F_n + F_{n-1} = 1 \cdot F_{n-1} + 1 \cdot F_n \end{cases}$$

(Δ) $$X_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X_n$$

zatem jest to prosty liniowy układ
dynamiczny zadany przez macierz

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Jak rozwiązujemy (Δ)? Oczywiście
analogicznie jak (**), iterując macierz G.

$$X_n = G^n X_0$$

Oczywiście w praktyce znamy z GAL-u metody,
które pozwalają tę procedurę uprościć.
Szukamy wartości własnych λ macierzy G
i jeśli ich liczba jest równa wymiarowi
układu, to O.K., mamy bazę rozwiązań
postaci λ^n, czyli rozwiązania są
po prostu kombinacjami postępów

iv/ geometrycznych.
W tym przypadku $G-\lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda+1 \end{pmatrix}$

$\det(G-\lambda I) = \lambda(\lambda-1)-1 = \lambda^2-\lambda-1$

$\Delta = 1+4 = 5$ $\quad \lambda_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ $\quad \lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Mamy więc $\lambda_1 \neq \lambda_2$ i jesteśmy w stanie napisać rozwiązanie $F_n = A\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$.
Stałe A i B wyznaczamy z war. pocz.
W przypadku $(**)$ mamy więc

$$F_0 = A + B = 1 \qquad F_1 = A\frac{1-\sqrt{5}}{2} + B\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1$$

$$B = 1-A$$

$$A(1-\sqrt{5}) + B(1+\sqrt{5}) = 2 \Rightarrow \sqrt{5}(B-A) = 1$$

$$1-A-A = \frac{\sqrt{5}}{5} \qquad 2A = 1-\frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow A = \frac{5-\sqrt{5}}{10} \qquad A+B=1$$

$$B = 1 - \frac{5-\sqrt{5}}{10} = \frac{5+\sqrt{5}}{10}$$

stąd $F_n = \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n =$

$$= \frac{-\sqrt{5}}{10}\frac{(1-\sqrt{5})^{n+1}}{2^n} + \frac{\sqrt{5}}{10}\frac{(1+\sqrt{5})^{n+1}}{2^n} = \frac{\sqrt{5}}{10\cdot 2^n}\left((1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}\right)$$

Ciekawostka: w obu wartościach własnych występuje $\sqrt{5}$, ale cała formuła jako rozwiązanie $(**)$ dla dowolnego n daje zawsze liczbę naturalną.

Dynamika ciągu Fib. jako modelu wzrostu liczebności jest oczywista: liczebność zawsze rośnie do ∞, natomiast ciekawe jest to, że ustala się stabilna proporcja pomiędzy liczebnościami populacji w kolejnych krokach:

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{F_n + F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{\frac{F_n}{F_{n-1}}}$$

i jeśli teraz $y_n = \frac{F_n}{F_{n-1}}$, to

$$y_{n+1} = 1 + \frac{1}{y_n}$$

i odpowiednie równanie char. (czyli równanie na granicę)

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$ jest znów tym samym r. char., co dla całego układu. Standardowymi metodami analitycznymi pokazujemy, że $y_n \to \lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, co z kolei równe jest słynnej złotej proporcji $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ znanej już w starożytności.

O ciągu Fib. można mówić długo, zapewne można mu poświęcić cały wykład, gdyż ma on wiele ciekawych implikacji arytmetycznych, geometrycznych i także biologicznych, ale nie to stanowi główny przedmiot naszego wykładu.

Omówiony szczegółowo przykład podpowiada, że dowolny dyskretny model ze skończonym opóźnieniem może być zapisany jako standardowy układ dynamiczny dzięki zwiększeniu wymiaru. Ogólnie, jeśli

$$F_{n+k} = G(F_n, F_{n+1}, \dots, F_{n+k-1}), \quad k \geq 2,$$

to definiując nową zmienną

$$X_{n+k-1} = (F_n, F_{n+1}, \dots, F_{n+k-1})$$

otrzymujemy:

$$\text{"} \quad X_{n+k} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ & & G & & \end{pmatrix} X_{n+k-1} \quad \text{"}$$

gdzie ostatni wiersz oznacza oczywiście działanie funkcji G, a jeśli jest to

IV/ funkcja liniowa, to taki zapis jest poprawny formalnie.
Zatem z modelu jednowymi. powstaje ~~[illegible]~~ układ wymiaru k.
Ogólnie: wymiar układu wzrasta k razy, ale pozostaje skończony, zatem nie ma potrzeby rozwijania innej teorii dla dyskretnych układów z opóźnieniem w stosunku do układów bez opóźnienia.
Zupełnie inaczej wygląda sytuacja w przypadku układów ciągłych.
Przyjrzyjmy się najprostszemu równaniu z opóźnieniem:

$$(*) \quad \dot{N}(t) = rN(t-\tau) \ , \ \tau > 0$$

Jak możemy zinterpretować takie równanie z biologicznego punktu widzenia?
Dla $\tau = 0$ mamy $\dot{N} = rN$ i jest to model wzrostu wykładniczego (Malthusa), który „z grubsza" mówi, że przyrost liczebności populacji jest proporcjonalny do tejże liczebności, a proces rozmnażania jest „natychmiastowy". Oczywiście nic w rzeczywistości nie dzieje się natychmiastowo, w szczególności takie procesy jak rozmnażanie. Nawet na etapie podziału komórki mamy do czynienia z upływem dość długiego czasu od momentu odebrania przez

komórkę sygnału do podziału aż do pojawienia się otwoch komórek-córek.
Oczywiście z drugiej strony w rzeczywistości taki proces nie trwa zawsze tak samo długo, ale jeśli chcemy napisać model, to zawsze musimy przyjąć pewne założenia upraszczające.
Często jest tak, że odchylenia od średniego czasu trwania danego procesu można pominąć i z dobrym przybliżeniem założyć, że czas trwania $\tau > 0$ jest stały.
Tego typu założenia stoją u podstaw równania (*).
Co zatem należy zrobić, aby takie równanie jak (*) rozwiązać?

$\dot{N}(0) = rN(-\tau)$, czyli musimy znać $N(-\tau)$
$\dot{N}(\varepsilon) = rN(\varepsilon-\tau)$, — " — $N(\varepsilon-\tau)$
itd. aż do $\dot{N}(\tau) = rN(0)$ — " — $N(0)$

zatem aby rozwiązać równanie na przedziale $[0, +\tau]$ trzeba znać całą historię z przedziału $[-\tau, 0]$!
Potrzebujemy więc funkcji określonej na przedziale długości τ i w efekcie także dostajemy funkcję określoną na przedziale długości τ.
To rozumowanie prowadzi do tzw. <u>metody kroków</u>, czyli indukcji mat. stosowanej do rozwiązywania tego typu

V/ równań.

Niech zatem $N_0 : [-\tau, 0] \to \mathbb{R}^+$ będzie liczebnością początkową. Dla $t \in [0, \tau]$ mamy $N'(t) = r N_0(t-\tau)$, czyli

$$N(t) = N_0(0) + r \int_0^t N_0(s-\tau)\,ds = N_0(0) + r \int_{-\tau}^{t-\tau} N_0(s)\,ds := N_1(t)$$

Załóżmy dalej, że znamy $N_k(t) = N(t)$ na $t \in [(k-1)\tau, k\tau]$, wtedy dla $t \in [k\tau, (k+1)\tau]$ definiujemy

$$N_{k+1}(t) = N_k(k\tau) + r \int_{k\tau}^{t} N_k(s-\tau)\,ds = N_k(k\tau) + r \int_{(k-1)\tau}^{t-\tau} N_k(s)\,ds$$

i mamy dobrze zdef. rozwiązanie na kolejnym przedziale. Zatem mamy $N(t)$ $\forall\, t \geq 0$.

<u>Uwaga:</u> do tego, by zastosować metodę kroków wystarcza, by N_0 była funkcją całkowalną, natomiast w ogólnej teorii definiujemy ciągłą funkcję początkową.

<u>Obserwacja 1:</u> Zasadnicza różnica między DDE a ODE polega na różnych wymiarach zagadnienia, co wyraża się w różnych warunkach początkowych. Dla DDE jest to funkcja (wymiar ∞), dla ODE jest to punkt w $\mathbb{R}^n$ (wymiar n)

Rozpatrzmy teraz szczególny przypadek równania

$$(*) \qquad \dot{x}(t) = x\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Zauważmy, że równanie to ma rozwiązanie okresowe $x(t) = \sin t$, gdyż

$$\dot{x}(t) = \cos t = \underbrace{\sin\left(t-\frac{\pi}{2}\right)}_{\text{autonomiczne}} = x\left(t-\frac{\pi}{2}\right)$$

natomiast 1 ODE z gładką prawą stroną nie może mieć rozwiązań okresowych!

Rozważmy $\dot{x} = f(x)$ f = Lipschitzowska

Wtedy rozwiązania są jednoznaczne.

Załóżmy, że istnieje rozw. okresowe $x_{ok}(t)$ o okresie T. Mamy

$$0 = \int_0^T \dot{x}_{ok}(t)\,dt = \int_0^T f(x_{ok}(t))\,dt$$

Oznacza to, że f musi zmieniać znak na trajektorii $x_{ok}(t)$, czyli $\exists\, \bar{t}, \bar{x}$: $x_{ok}(\bar{t}) = \bar{x}$ i $f(\bar{x}) = 0$. Ale $\bar{x}$ jest wtedy rozwiązaniem stacjonarnym i x_{ok} przecina $\bar{x}$, co przeczy jednoznaczności!

<u>Obserwacja 2:</u> Jedno autonomiczne (liniowe!) DDE może mieć rozwiązania okresowe, podczas gdy żadne pojedyncze autonomiczne ODE nie może (pod warunkiem jednoznaczności rozwiązań)

Tu: przypomnieć o portrecie fazowym dla $\dot{x} = f(x)$

Z tego, co wyżej wynika także kolejna obserwacja:

<u>Obs. 3:</u> Rozwiązania jako krzywe w przestrzeni kartezjańskiej nie są jednoznaczne, co więcej dwa rozwiązania mogą przecinać się ∞ wiele razy.

$\dot{x}(t) = x\left(t-\frac{\pi}{2}\right)$ ma rozwiązanie $x_1(t) = \sin t$ oraz $x_2(t) \equiv 0$, które przecinają się we wszystkich $t = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

VI / Inny prosty przykład pokazuje, że rozwiązania mogą się wręcz sklejać:

$$\dot{x}(t) = -x(t-1)(1+x(t)) \quad \text{(przykład z Hale'a)}$$

Po podstawieniu $y(t) = 1 + x(t)$ mamy

(A) $\dot{y} = -y(t)(y(t-1)-1)$,

czyli $\dot{y}(t) = y(t)(1-y(t-1))$

i rozwiązując dla war. pocz. $t_0 = 0$, $y_0 = \phi$ dostajemy $y(t) = \phi(0)\exp\left(\int_0^t (1-y(s-1))\,ds\right)$

Wystarczy zatem, że $\phi(0) = 0$ i mamy

$y(t) \equiv 0 \implies x(t) \equiv -1$ dla $t \geq 0$.

Z drugiej strony mamy też stan stacjonarny $\bar{x} = -1$.

Uwaga: (A) to równanie Hutchinsona, inaczej równanie logistyczne z opóźnieniem, które powstaje w następujący sposób. W klasycznym równaniu logistycznym

$$\dot{N}(t) = \alpha N(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$$

przeprowadzamy najpierw ubezwymiarowienie redukując parametry i otrzymując:

$$\dot{N}(t) = N(t)(1-N(t))$$

Następnie rozważa się wielkość $\frac{\dot{N}}{N}$ nazywaną przyrostem per capita, którą ekolodzy uważają za bardziej istotną od przyrostu populacji „netto": $\dot{N}$. Można wyobrazić sobie sytuację, gdy przyrost per capita nie zależy od chwili bieżącej, ale od pewnej chwili w przeszłości, np. jeśli nasza populacja jest populacją roślinożerców i roślina może być zjedzona tylko gdy dojrzeje i jest to wiek τ, a jednocześnie w tym wieku roślina rozsiewa nasiona, to jeśli roślina zostanie zjedzona i nie rozsieje nasion – w przyszłości nie będzie co jest. Zatem przyrost per capita w t zależy od liczebności w chwili $t-\tau$, bo zależy od tego, ile roślin zostało zjedzonych w przeszłości. Mamy więc

$$\frac{\dot{N}(t)}{N(t)} = 1 - N(t-\tau) \Rightarrow \dot{N}(t) = N(t)(1 - N(t-\tau))$$

<u>Obserwacja 4.</u> Równanie może nie mieć (w zasadzie najczęściej nie ma) rozwiązania „w tył", czyli dla $t < t_0 - \tau$.

Rozpatrzmy równanie liniowe

$$\dot{x} = ax(t) + bx(t-\tau) \quad b \neq 0,\ a+b \neq 0$$

i warunek początkowy $t_0 = 0$, $x_0 = \phi \equiv k \neq 0$.

Poszukamy rozwiązania dla $t \in [-2\tau, -\tau]$.

Mamy zadane $x(t)$ dla $t \in [-\tau, 0]$, to $x(t-\tau) \in [-2\tau, -\tau]$, czyli z równania:

$$x(t-\tau) = \frac{\dot{x}(t) - ax(t)}{b},$$

czyli $x(t-\tau) = -\frac{a}{b}k$, bo $\dot{x}(t) = 0$ w $(-\tau, 0)$.

Stąd $x(t) = -\frac{a}{b}k$ dla $t \in [-2\tau, -\tau]$ (bo x ciągłe), ale $\lim\limits_{x \to -\tau^+} x(t) = k \neq \lim\limits_{x \to -\tau^-} x(t) = -\frac{a}{b}k$, czyli to nie może być rozwiązanie, bo ciągłości w $-\tau$ nie ma.

<u>Wniosek:</u> Tylko dla specyficznych funkcji początkowych rozwiązanie może być określone dla $t < t_0 - \tau$.

VII/ Obserwacja 5 Nawet jeśli rozwiązanie daje się przedłużyć w tył, to przedłużenie nie musi być jednoznaczne.

Przykład: $\dot{x}(t) = b(t)\,x(t-1)$

dla $b(t) = \begin{cases} 0 & t \le 0 \\ \cos(2\pi t) - 1 & t \in (0,1] \\ 0 & t > 1 \end{cases}$ b jest gładka!

Zauważmy, że $\phi(t) = k = const$ jest dla dowolnego k rozwiązaniem dla $t \le 0$.

Na $[0,1]$ dla $\phi = k$ dostajemy

$$\dot{x} = k\cdot(\cos(2\pi t) - 1), \quad x(0) = k,$$

czyli

$$x(t) = k + k\int_0^t (\cos(2\pi s) - 1)\,ds = k(1-t) + \frac{k}{2\pi}\sin(2\pi t) \Rightarrow x(1) = 0.$$

Dla $t > 1$ $\dot{x}(t) = 0 \Rightarrow x(t) \equiv 0$.

Zatem jeśli $t_0 = 2$, mamy przedział początkowy to $[1,2]$, dla funkcji początkowej $\phi \equiv 0$ dostajemy przedłużenie dla $t < 1$, ale nie ma jednoznaczności – jest nieskończenie wiele przedłużeń w tył.

Obserwacja 6: Równanie może „sklejać" całą przestrzeń $\mathcal{C} = C([-r,0],\mathbb{R})$ w jeden punkt.

Przykład: $\dot{x}(t) = b(t)\,x(t - \frac{3}{2}\pi)$

$$b(t) = \begin{cases} g(t) & t < 0 \quad g \text{ ciągła } g(0) = 0 \\ 0 & t \in [0, \frac{3}{2}\pi] \\ -\cos t & t \in (\frac{3}{2}\pi, 3\pi] \\ 1 & t > 3\pi \end{cases}$$

warunek początkowy $\sigma = 0$, $x_0 = \phi \in \mathcal{C}$

$$x(t,0,\phi) = \begin{cases} \phi(0) & t \in [0, \frac{3}{2}\pi] \\ -\phi(0)\sin t & t > \frac{3}{2}\pi \end{cases} \Rightarrow x(k\pi, 0, \mathcal{C}) = 0, \quad k = 2, 3, \dots$$

Podamy teraz kolejne proste przykłady, gdzie stosować możemy równania z opóźnieniem

① Mieszanie. Rozpatrzmy naczynie, w którym znajduje się B litrów wody z solą. Czysta woda napływa do naczynia z prędkością $q \frac{\text{litrów}}{\text{min}}$. W naczyniu miesza się czysta woda z solanką, a wymieszany roztwór wypływa z tą samą prędkością. Niech $x(t)$ oznacza ilość soli w mieszaninie w chwili t. Przy założeniu ciągłego, jednorodnego mieszania ilość soli wypływającej z naczynia w mieszanie wynosi $\frac{x(t)}{B}$ na 1 litr, czyli

$$\dot{x} = -\frac{q}{B}x.$$

Podchodząc do zagadnienia bardziej realistycznie należy stwierdzić, że mieszanie nie zachodzi w sposób jednorodny - stężenie mieszaniny wypływającej z naczynia w czasie t będzie równe średniej stężeń z przeszłości.

W uproszczeniu możemy napisać

$$\dot{x}(t) = -\frac{q}{B}x(t-\tau) \qquad \tau > 0.$$

② Temperatura wody w prysznicu. Załóżmy, że mamy jednostajny przepływ wody od kranu do końcówki prysznica i przepływ ten zajmuje τ jednostek czasu [s]. Niech $T(t)$ oznacza temperaturę wody wypływającej z kranu, natomiast T_d - temperaturę odpowiednią do mycia. Nasze próby dopasowania temperatury są oczywiście przesunięte o τ sekund w stosunku do tego, jaka woda wypływa

VIII/ z kranu. Stąd zmiany ~~co~~ temperatury wody wypływającej z kranu możemy opisać równaniem

$$\dot{T}(t) = -k(T(t) - T_d),$$

gdzie k - stała mierząca siłę naszej reakcji na niewłaściwą temperaturę, przy czym małe wartości k oznaczają zachowanie flegmatyczne, zaś duże - „raptowne."

Uwaga: przy odpowiednim doborze parametrów dostajemy dynamikę cykliczną!

3) OSCYLACJE w wynikach ligi footballowej NFL (R. B. Banks, Towing Icebergs, Falling Dominoes, and Other Adventures in Applied Mathematics, Princeton Univ. Press, 1998)

Dane np. dla Buffalo Bills z l. 1960-92 wykazują zachowanie periodyczne z okresem ok. 8 lat. Banks rozważał równanie

$$\dot{U} = b\left(\frac{1}{2} - U(t-\delta)\right),$$

gdzie $U \in (0,1)$ to procent meczów wygranych przez drużynę w trakcie sezonu liczony jako

$$U = \frac{(1 \times \#\text{wygranych} + \frac{1}{2} \times \#\text{remisów} + 0 \times \#\text{przegranych})}{\text{liczba wszystkich meczów}}$$

b - współczynnik „wzrostu". Równanie mówi, że dynamika U jest proporcjonalna do odchylenia wartości U w pewnej chwili w przeszłości od średniej $U_{śr} = \frac{1}{2}$. Oznacza to, że dana drużyna potrzebuje czasu, by zmienić się na gorsze lub lepsze. Poszukując rozwiązań okresowych o okresie 8 lat dosta-

jemy opóźnienie $\tau \approx 2$ lata.
Zaproponowane rozumianie bazuje na ogólnej teorii zmian ludzkiej aktywności, zgodnie z którą zmiana aktywności zależy od własnego statusu w przeszłości. Jak coś idzie źle, to zaczynamy myśleć dłużej i inwestujemy w poprawę, co przynosi dobre efekty w przyszłości. Natomiast jak jest dobrze, to się rozleniwiamy. Łatwo widać, że musi to prowadzić do dynamiki cyklicznej. Taką analizę można przeprowadzić dla różnego typu działalności, w tym również naukowej – np. Goffman i Harman w 1971 w Nature modelowali działalność naukową za pomocą prostego modelu epidemiologicznego, ale M. Szydłowski, A. Krawiec „Scientific cycle model with delay", Scientometrics 52: 83-95, 2001, zastosowali taki model jak wyżej.

(4) Układy ze sterowaniem. W większości układów ze sterowaniem występuje opóźnienie, które pojawia się w wyniku tego, że potrzebny jest pewien czas na przetwarzenie otrzymanej informacji i reakcję na nią.
W l. 30 i 40 XX w. Callender, Hartree, Porter i Minorsky badali pewne problemy stabilizacyjne, gdzie opóźnienie okazuje się znaczące.

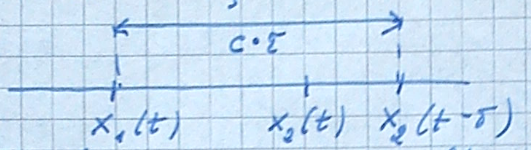
IX/ Rozpatrzmy układ, którego ruchem rządzi równanie drugiego stopnia:

$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) = 0 \qquad m, b, k > 0$$

Rozwiązaniem z warunkami początkowymi $x(t_0)$, $\dot{x}(t_0)$ jest funkcja dążąca wykładniczo do 0. Charakter tej funkcji zależy od b: $b^2 < 4mk$, to są oscylacje, $b^2 > 4mk$, to ich nie ma. Wniosek: aby pozbyć się oscylacji, należy zwiększyć b. Jest to oczywiście łatwe w warunkach laboratoryjnych, ale np. w przykładzie Minorsky'ego układem jest statek, $x(t)$ jest odchyleniem od pozycji pionowej, więc trzeba uważać ze zwiększaniem b. Można np. wprowadzić zbiorniki balastowe, pomiędzy którymi przepompowuje się wodę. Opisujemy to w równaniu wprowadzając dodatkowy składnik $q \cdot \dot{x}(t)$. Zauważmy jednak, że mechanizm ten nie działa natychmiastowo - czynnik wymuszający potrzebuje pewnego czasu na reakcję, stąd $\dot{x}(t) \to \dot{x}(t-\tau)$. To, czy uda się wygasić oscylacje, zależy od parametrów.

⑤ <u>Zagadnienie dwóch ciał w elektrodynamice.</u> Rozważmy oddziaływanie dwóch elektronów (lub innych naładowanych cząstek) jako problem oddziaływań na odległość. Jasne jest,

że takie oddziaływanie nie jest natychmiastowe, ale zachodzi z prędkością światła c, czyli wpływ cząstki 2 na cząstkę 1 w momencie t jest generowany w momencie $t-\tau$.
Załóżmy, że cząstki poruszają się po osi x i niech $x_1(t)$, $x_2(t)$ oznaczają położenie cząstek w chwili t.



Sygnał dociera z prędkością c, więc opóźnienie musi spełniać równanie

$$c\cdot\tau = |x_1(t) - x_2(t-\tau)|.$$

Zatem w tym przypadku opóźnienie nie jest stałe, ale zależy od czasu poprzez położenia cząstek. W analogiczny sposób możemy zapisać równanie (oddziaływania) cząstki 1 na cząstkę 2. Zatem potrzebne są dwa opóźnienia spełniające

$$\begin{cases} c\cdot\tau_{21}(t) = |x_1(t) - x_2(t-\tau_{21}(t))| \\ c\,\tau_{12}(t) = |x_2(t) - x_1(t-\tau_{12}(t))| \end{cases}$$

W języku tego typu opóźnień można sformułować ogólne równania ruchu:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1(t) = f_1\big(x_1(t)-x_2(t-\tau_{21}(t)),\ \dot{x}_1(t),\ \dot{x}_2(t-\tau_{21}(t))\big) \\ \ddot{x}_2(t) = f_2\big(x_2(t)-x_1(t-\tau_{12}(t)),\ \dot{x}_2(t),\ \dot{x}_1(t-\tau_{12}(t))\big) \end{cases}$$

6 Układy typu drapieżnik-ofiara

Wangersky, Cunningham (1957) zaproponowali następującą modyfikację modelu Lotka–

X/ Volterry:

$$\begin{cases} \dot{V}(t) = rV(t)\left(1-\frac{V(t)}{K}\right) - aV(t)P(t) \\ \dot{P}(t) = -sP(t) + ab\,V(t-\tau)P(t-\tau) \end{cases}$$

$V(t)$, $P(t)$ – zagęszczenia ofiar i drapieżników

Volterra rozpatrywał wiele modyfikacji własnego modelu, np.

$$\begin{cases} \dot{V}(t) = \left[r - b_1 P(t) - \int_{-\tau}^{0} h_1(s)P(t+s)\,ds\right] V(t) \\ \dot{P}(t) = \left[-s + b_2 V(t) + \int_{-\tau}^{0} h_2(s)V(t+s)\,ds\right] P(t) \end{cases}$$

gdzie na wzrost populacji wpływa historia rozpatrywana do czasu τ od chwili obecnej wstecz.

METODA KROKÓW

Przy okazji równania liniowego $\dot{x}(t) = ax(t-\tau)$ wspomnieliśmy o metodzie kroków, która ma jednak znaczenie szersze zastosowanie. Aby ją zastosować musimy mieć możliwość rozwiązania równania na $[n\tau, (n+1)\tau]$ o ile znamy rozwiązanie na przedziale poprzednim $[(n-1)\tau, n\tau]$.

Kiedy tak możemy zrobić?

(1) $\dot{x}(t) = f(x(t-\tau))$, gdzie f – całkowalna (oczywiście w ogólnym przypadku mamy f co najmniej ciągła)

Wtedy jeśli x_n – rozwiązanie na $[(n-1)\tau, n\tau]$, to

$$x_{n+1}(t) = x_n(n\tau) + \int_{(n-1)\tau}^{t-\tau} f(x_n(s))\,ds, \quad t\in[n\tau,(n+1)\tau]$$

definiuje rozwiązanie na kolejnym przedziale

(2) $\dot{x}(t) = x(t)\,f(x(t-\tau))$

Teraz zakładając $x \neq 0$ dostajemy pochodną logarytmiczną:

$$\frac{\dot{x}(t)}{x(t)} = f(x(t-\tau))$$

i teraz $x_{n+1}(t) = x_n(n\tau) \exp\left(\int_{(n-1)\tau}^{t-\tau} f(x(s))ds \right)$

(3) $\dot{x}(t) = a\, x(t) + f(x(t-\tau))$;

to możemy zastosować formułę uzmienniania stałej na odcinkach długości opóźnienia.

Także w innych szczególnych przypadkach zastosowanie metody kroków jest możliwe - w szczególności gdy po zamianie zmiennych otrzymujemy równanie w którejś z postaci (1), (2), (3).

Uwaga: Metoda kroków jest użyteczna przy dowodzeniu istnienia rozwiązań dla wszystkich $t \geq 0$. Oczywiście w przypadkach (1) - (3) wynika to bezpośrednio z postaci rozwiązania na każdym przedziale długości τ.

Można ją także stosować w celu udowodnienia nieujemności rozwiązań - np. dla (2) nieujemność jest zagwarantowana dla nieujemnego warunku początkowego.

Analogicznie - jeśli w (1) i (3) warunek początkowy jest nieujemny, natomiast f przyjmuje wartości nieujemne, to rozwiązanie też jest nieujemne.

XI/ Przejdziemy teraz do sprecyzowania zagadnienia, którym zajmiemy się w dalszej części wykładu.

Def. Niech $x : [t-\tau, t] \to \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$, ustalone. Zdefiniujmy $x_t : [-\tau, 0] \to \mathbb{R}^n$ jako $x_t(\theta) = x(t+\theta)$ $\theta \in [-\tau, 0]$.

Wniosek: Funkcja x_t jest przesunięciem funkcji x zdefiniowanej na dowolnym odcinku $[t-\tau, t]$ o długości τ na odcinek $[-\tau, 0]$.

Uwaga: Niech $x \in C([\sigma-\tau, \sigma+A], \mathbb{R}^n)$, $A > 0$. Wtedy x_t jest ciągłą funkcją t dla $t \in [\sigma, \sigma+A]$. ~~W szczególności $x \in C([-\tau, A], \mathbb{R}^n)$~~

D. Funkcja x jest ciągła na zbiorze zwartym, jest więc jednostajnie ciągła. Zatem $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall t_1, t_2 \in [\sigma-\tau, \sigma+A]$

$$|t_1 - t_2| < \delta \implies |x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon$$

Niech $t_1, t_2 \in [\sigma, \sigma+A]$ i niech $\theta \in [-\tau, 0]$. Wtedy $t_1+\theta, t_2+\theta \in [\sigma-\tau, \sigma+A]$ i jeśli $|t_1 - t_2| < \delta$, to $|t_1+\theta - (t_2+\theta)| < \delta$ dla dowolnego $\theta \in [-\tau, 0]$. Stąd $\forall \theta \in [-\tau, 0]$

$$|x(t_1+\theta) - x(t_2+\theta)| < \varepsilon, \quad \text{czyli}$$

$$\|x_{t_1} - x_{t_2}\| < \varepsilon,$$ gdzie $\|\cdot\|$ oznacza standardową normę sup (zauważmy, że zachowuje się nierówność ostra, bo funkcja ciągła na zbiorze zwartym przyjmuje kresy).

Oznaczenia: Będziemy używać oznaczenia $\mathcal{C} = C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ – p. Banacha funkcji ciągłych o wartościach w $\mathbb{R}^n$ z normą sup.
Jeśli $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$, to $\mathcal{C}_{\mathcal{A}} = C([-\tau, 0], \mathcal{A})$.

Def. Niech $D \subset \mathbb{R} \times \mathcal{C}$, $f: D \to \mathbb{R}^n$ dany operator ~~oraz~~ $\dot{}$ oznacza pochodną prawostronną względem $t \in \mathbb{R}$. Wtedy

$$(1) \qquad \dot{x}(t) = f(t, x_t)$$

nazwiemy równaniem funkcyjnalno-różniczkowym z opóźnieniem (RFDE) na D.

Funkcję x nazwiemy rozwiązaniem równania (1) na $[\sigma - \tau, \sigma + A)$, $\sigma \in \mathbb{R}$, $A > 0$ ustalone, jeśli $x \in C([\sigma - \tau, \sigma + A), \mathbb{R}^n)$, $(t, x_t) \in D$ dla $t \in [\sigma, \sigma + A)$ oraz $x(t)$ spełnia (1) na $[\sigma, \sigma + A)$.

Dla danych $\sigma \in \mathbb{R}$ oraz $\phi \in \mathcal{C}$ mówimy, że $x(\sigma, \phi, f)$ jest rozwiązaniem (1) przechodzącym przez (σ, ϕ), jeśli istnieje $A > 0$, że $x(\sigma, \phi, f)$ jest rozwiązaniem (1) na $[\sigma - \tau, \sigma + A)$ oraz $x_\sigma = \phi$.

Mówimy, że (1) jest liniowe, jeśli

$$f(t, \phi) = L(t, \phi) + g(t),$$

gdzie $L(t, \phi)$ jest liniowe względem ϕ.

Mówimy, że (1) jest autonomiczne, jeśli

$f(t, \phi) = f(\phi)$, czyli prawa strona nie zależy w sposób jawny od czasu.

Przykłady: (1) $\dot{x} = -cx(t - \tau)$

Jak działa f opisujące prawą stronę?

Równanie jest autonomiczne - nie ma jawnej zależności od czasu. Mamy

$$x(t - \tau) = x_t(-\tau) \Rightarrow f(\phi) = -c\phi(-\tau)$$

i oczywiście f jest liniowa. Tu: $n = 1$, $D = \mathcal{C}$, równanie liniowe jednorodne, autonomiczne.

XII/ (2) $\dot{x} = -cx(t-1)(1+x(t))$

$n=1$, $\tau=1$, równanie autonomiczne, nielin.

$x(t-1)(1+x(t)) = x_t(-1)(1+x_t(0)) \Longrightarrow$

$$f(\phi) = -c\phi(-1)(1+\phi(0)) \quad i \quad D = \mathcal{C}$$

(3) $$\begin{cases} \dot{x}(t) = rx(t)(1-x(t)) - bx(t)y(t) \\ \dot{y}(t) = -sy(t) + ab\,x(t-\tau)y(t-\tau) \end{cases}$$

$n=2$, układ autonomiczny nieliniowy

$$f(\phi) = f((\phi_1,\phi_2)^T) = (f_1(\phi), f_2(\phi))^T$$

$$f_1(\phi) = r\phi_1(0)(1-\phi_1(0)) - b\phi_1(0)\phi_2(0),$$

$$f_2(\phi) = -s\phi_2(0) + ab\phi_1(-\tau)\phi_2(-\tau), \quad D = \mathcal{C}.$$

Lemat: Jeśli $(\sigma,\phi) \in \mathbb{R}\times\mathcal{C}$ jest danym warunkiem początkowym i $f: \mathbb{R}\times\mathcal{C} \to \mathbb{R}^n$ $(D \to \mathbb{R}^n)$, to znalezienie rozwiązania równania (1) przez (σ,ϕ) jest równoważne rozwiązaniu zagadnienia całkowego:

(2) $$\begin{cases} x(t) = \phi(0) + \int_\sigma^t f(s, x_s)\,ds, & t \geq \sigma \\ x_\sigma = \phi \end{cases}$$

D. Jeśli f jest ciągła, to różniczkując (2) dostajemy (1) z war. pocz. (σ,ϕ) i odwrotnie - całkując (1) dostajemy (2).

Badając własności (1) zaczniemy od przeanalizowania najprostszego skalarnego równania liniowego:

(1L) $$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-\tau) + f(t),$$

gdzie $A, B \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ciągła.

Tw. 1 Niech $\phi \in \mathcal{C}$. Wtedy istnieje jednoznacznie wyznaczone rozwiązanie $x(\phi, f)$ zdefiniowane na przedziale $[-\tau, +\infty)$

spełniające warunek początkowy $x_0 = \phi$ i równanie (1L) dla $t \geq 0$.

D. (1L) jako ODE jest liniowym równaniem nieautonomicznym. Stosując formułę uzmienniania stałej dostajemy

$$(2L) \begin{cases} x(t) = \phi(t), & t \in [-\tau, 0], \\ x(t) = e^{At}\phi(0) + \int_0^t e^{A(t-s)}(Bx(s-\tau) + f(s))ds & t \geq 0. \end{cases}$$

Dla f ciągłej, jeśli x spełnia (2L), to oczywiście jest rozwiązaniem (1L). Jednoznaczność wykażemy metodą kroków.

Tw. 2. Niech $x(\phi, f)$ będzie rozwiązaniem zdefiniowanym wyżej. Wtedy

(i) $x(\phi, f)(t)$ ma ciągłą pochodną dla wszystkich $t > 0$ i ma ciągłą pochodną w $t = 0 \iff \phi$ ma pochodną w $\theta = 0$ i zachodzi (*) $\dot{\phi}(0) = A\phi(0) + B\phi(-\tau) + f(0)$.

Jeśli $f \in C^\infty$, to $x(\phi, f)$ staje się coraz wyższej klasy wraz z rosnącym t.

(ii) Jeśli $B \neq 0$, to $x(\phi, f)$ możemy rozszerzyć jako rozwiązanie (1L) na $[-\tau - \varepsilon, \infty)$, $0 < \varepsilon \leq \tau \iff \phi$ ma ciągłą pochodną na $[-\varepsilon, 0]$, przy czym pochodna spełnia równanie (*).

D. (i) oczywiste, (ii) $\Rightarrow$ też.

(ii) $\Leftarrow$ Rozszerzenie na lewo wyznaczamy z równania (**) $x(t-\tau) = \frac{1}{B}(\dot{x}(t) - Ax(t) - f(t))$.

Jeśli ϕ ma ciągłą pochodną na $[-\varepsilon, 0]$, to równanie to definiuje nam rozwiązanie na $[-\tau - \varepsilon, -\tau]$, przy czym mamy ciągłość ze względu na warunek (*).

XIII/ <u>Uwaga:</u> Przedłużanie rozwiązania na lewo od -2τ wymaga dodatkowych założeń.

D. Załóżmy, że ϕ ma ciągłą pochodną na $[-\tau, 0]$ i spełnia $(*)$. Wtedy mamy określone rozwiązanie na $[-2\tau, \infty)$.

Aby rozszerzyć rozwiązanie na $[-2\tau-\varepsilon, \infty)$, $0<\varepsilon\leq\tau$, musimy mieć funkcję x zdefiniowaną na $[-\tau-\varepsilon, -\tau]$ za pomocą $(**)$ różniczkowalną i spełniającą warunek zgodności

$$\dot{x}(-\tau) = Ax(-\tau)+Bx(-2\tau)+f(-\tau),$$

czyli prawa strona $(**)$ musi być różniczkowalna w sposób ciągły na $[-\varepsilon, 0]$ $\Rightarrow$ f różniczkowalna, ϕ dwukrotnie różniczkowalna oraz

$$\dot{x}(-\tau) = \frac{1}{B}\left(\ddot{\phi}(0) - A\dot{\phi}(0) - f(0)\right).$$

Znajdziemy teraz wykładnicze oszacowanie rozwiązania $x(\phi, f)$. Będziemy korzystali z fundamentalnego lematu:

<u>Lemat.</u> Niech $u, \alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ ciągłe, $\beta \geq 0$ całkowalna na $[a,b]$ oraz

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)u(s)\,ds, \quad t\in[a,b],$$

to $u(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)\alpha(s)\exp\left(\int_s^t \beta(z)\,dz\right)ds$, $t\in[a,b]$.

Jeśli dodatkowo α jest niemalejąca, to

$$u(t) \leq \alpha(t)\exp\left(\int_a^t \beta(s)\,ds\right), \quad t\in[a,b].$$

D. Zdefiniujmy $R(t) = \int_a^t \beta(s)u(s)\,ds$. Wtedy

$$\dot{R} = \beta(t)u(t) \leq \beta(t)\alpha(t) + \beta(t)R(t).$$

Mamy też $\frac{d}{ds}\left(R(s)\exp\left(-\int_a^s \beta(z)\,dz\right)\right) \leq \beta(s)\alpha(s)e^{-\int_a^s \beta(z)dz}$

całkując powyższą nierówność od a do t:

$$R(t) \le \int_a^t \beta(s)\alpha(s)\exp\left(\int_s^t \beta(z)\right)dz,$$

co daje pierwszą nierówność lematu.

Jeśli α jest niemalejąca, to dalej możemy szacować:

$$u(t) \le \alpha(t)\left(1 + \int_a^t \beta(s)\exp\left(\int_s^t \beta(z)dz\right)ds\right) \quad t\in[a,b],$$

ale $\frac{d}{ds}\left(\exp\left(\int_s^t \beta(z)dz\right)\right) = -e^{\int_s^t \beta(z)dz}\beta(s)$,

$$\int_a^t \beta(s)e^{\int_s^t\beta}ds = -\exp\left(\int_s^t \beta(z)dz\right)\Big|_a^t = e^{\int_a^t \beta(z)dz} - 1,$$

czyli $u(t) \le \alpha(t)\exp\left(\int_a^t \beta(s)ds\right)$.

Tw.3. Niech $x(\phi,f)$ będzie rozwiązaniem (1L). Wtedy istnieją stałe $a,b>0$, że

(3*) $|x(\phi,f)(t)| \le ae^{bt}\left(|\phi| + \int_0^t |f(s)|ds\right), \quad t\ge 0,$

gdzie $|\phi|$ – norma sup.

D. Wiemy, że rozwiązanie $x(\phi,f)$ spełnia

$$x(t) = \phi(0) + \int_0^t (Ax(s) + Bx(s-\tau) + f(s))ds, \quad t\ge 0,$$

$x(t) = \phi(t)$, $t\in[-\tau,0]$. Stąd

$$|x(t)| \le |\phi| + \int_0^t |f(s)|ds + \int_0^t |A||x(s)|ds + \int_0^t |B||x(s)|ds$$

$$\le (1+|B|\tau)|\phi| + \int_0^t |f(s)|ds + \int_0^t (|A|+|B|)\overline{x}(s)ds$$

Z lematu Gronwalla

$$|x(t)| \le \left((1+|B|\tau)|\phi| + \int_0^t |f(s)|ds\right)\exp(|A|+|B|)t,$$
$$t\ge 0.$$

Stąd teza tw. dla $a = 1+|B|\tau$, $b = |A|+|B|$ $\square$

Nierówność (3*) dla $f=0$ implikuje, że $x(\phi,0)$ jest ciągłe względem ϕ dla dowolnego t. Rzeczywiście, niech $|\phi-\psi| < \delta$, wtedy

$$|x(\phi,0) - x(\psi,0)| \le ae^{bt}|\phi-\psi| = \varepsilon, \quad \delta = \frac{\varepsilon}{ae^{bt}}$$

$|x(\phi-\psi,0)|$ – z liniowości względem ϕ

XIV/ To oznacza, że $x(\cdot, 0)(t)$ jest ciągłym operatorem liniowym na $\mathcal{C}$. W konsekwencji z tw. Riesza o reprezentacji funkcjonału liniowego wynika, że możemy ten operator zapisać w jednoznaczny sposób w postaci całkowej.

Z drugiej strony możemy analogiczne rozumowanie przeprowadzić dla $x(0, f)(t)$ jako funkcji f. Z nierówności $(3*)$ ponownie wynika, że $x(0,\cdot)(t)$ jest liniowym ciągłym funkcjonałem na przestrzeni funkcji lokalnie całkowalnych. W tym przypadku reprezentacja całkowa odpowiada formule uzmienniania stałej.

Koncepcja całkowej reprezentacji funkcjonałów /operatorów liniowych jest kluczowa dla rozwoju ogólnej teorii. Jednak w przypadku równania (1L) można w prostszy sposób wykorzystać transformatę Laplace'a do uzyskania odpowiednich wniosków.

<u>Równanie charakterystyczne</u> liniowego równania jednorodnego to równanie, które dostajemy szukając nietrywialnych rozwiązań wykładniczych $x(t) = ce^{\lambda t}$, $c = \mathrm{const}$.

W przypadku równania (1L) z $f=0$, czyli

(1L0) $\quad \dot{x} = Ax(t) + Bx(t-\tau)$

nietrywialne rozwiązanie wykładnicze dostajemy wtw $\lambda = A + Be^{-\lambda\tau}$.

Zdefiniujmy $\quad h(\lambda) = \lambda - A - Be^{-\lambda\tau}$.

Lemat: Niech $(\lambda_j)_{j=0}^{\infty}$ będzie ciągiem zer funkcji h, że $|\lambda_j| \xrightarrow[j\to\infty]{} \infty$. Wtedy $\operatorname{Re} \lambda_j \xrightarrow[j\to\infty]{} -\infty$. Zatem istnieje $\alpha \in \mathbb{R}$, że $\forall \lambda : h(\lambda)=0 \Rightarrow \operatorname{Re} \lambda < \alpha$ oraz tylko skończona liczba zer leży na osi urojonej i każdej prostej pionowej w pł. zespolonej.

D. Każde zero funkcji h spełnia

$$|\lambda - A| = |B| e^{-\operatorname{Re}\lambda \cdot \tau}$$

Jeśli $|\lambda| \to \infty$, to $|\lambda - A| \to \infty$, czyli $e^{-\operatorname{Re}\lambda\cdot\tau} \to \infty$, więc $\operatorname{Re}\lambda \to -\infty$.

Stąd także wynika istnienie α, że $\operatorname{Re}\lambda < \alpha$.

Funkcja h jest funkcją całkowitą, więc w każdym zbiorze zwartym ma tylko ograniczoną liczbę zer. Ponieważ nie może być $\operatorname{Im}\lambda \to \infty$, to na każdej prostej pionowej liczba zer jest ograniczona. $\square$

Tw. 6. Niech λ będzie zerem h o krotności m. Wtedy każda funkcja $t^k e^{\lambda t}$ $k=0,\dots,m-1$ jest rozwiązaniem równania (ALO). Z liniowości wynika także, że każda skończona suma takich funkcji jest rozwiązaniem, co więcej – zbieżne sumy nieskończone też są rozwiązaniami.

D. Niech $x(t) = t^k e^{\lambda t}$, wtedy

$$e^{-\lambda t}\left(\dot{x}(t) - Ax(t) - Bx(t-\tau)\right) = t^k \cdot \lambda + k t^{k-1} - At^k - B(t-\tau)^k e^{-\lambda\tau}$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} t^{k-j} h^{(j)}(\lambda)$$

Rzeczywiście, $(t-\tau)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} t^{k-j} (-\tau)^j$

oraz $h'(\lambda) = 1 - B(-\tau)e^{-\lambda\tau}$, $h^{(n)}(\lambda) = (-B)(-\tau)^n e^{-\lambda\tau}$, $n \geq 2$

Stąd

$$P = t^k \lambda - At^k - Bt^k e^{-\lambda\tau} + kt^{k-1} - Bkt^{k-1}(-\tau)e^{-\lambda\tau}$$
$$+ \sum_{j=2}^{k} \binom{k}{j} t^{k-j} (-B)(-\tau)^j e^{-\lambda\tau} = t^k\lambda + kt^{k-1} - At^k$$
$$- B \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} t^{k-j} (-\tau)^j e^{-\lambda\tau}$$

XV/ Jeśli λ jest zerem o krotności m, to $h(\lambda)=h'(\lambda)=\dots h^{(m-1)}(\lambda)=0$, czyli $x(t)$ jest rozwiązaniem dla $k=0,\dots,m-1$. Reszta oczywista z liniowości. $\square$

<u>Rozwiązanie fundamentalne.</u>

Wykorzystamy teraz transformatę Laplace'a do rozwiązania równania (110) i znalezienia związku z f. charakt. $h(\lambda)$.

Niech $X(t)$ będzie rozwiązaniem (110) dla $t\geq 0$ przechodzącym przez $x(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t=0\end{cases}$.

Co prawda w tw. 1 zakładaliśmy ciągłość funkcji początkowej, ale dokładnie tą samą metodą dowodzimy, że takie rozwiązanie $X(t)$ istnieje. Podobnie - prawdziwe jest szacowanie z tw. 3. Oczywiste jest też, że $X(t)$ ma ograniczone wahanie na każdym zbiorze zwartym, jako funkcja kawałkami gładka o ciągłym sklejeniu w punktach $t=k\cdot\tau$, $k\in\mathbb{N}$ (faktycznie - klasa sklejenia rośnie wraz z rosnącym τ).

Przypomnimy teraz, kiedy można dokonać transformaty Laplace'a danej funkcji.

<u>Lemat.</u> Jeśli $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ jest mierzalna i spełnia dla pewnych stałych a,b oszacowanie $|f(t)|\leq ae^{bt}$, $t\in[0,\infty)$, to transformata Laplace'a zdefiniowana jako
$$\mathcal{L}(f)(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}f(t)\,dt$$
istnieje i jest analityczną funkcją λ dla $\operatorname{Re}\lambda>b$. Jeśli zdefiniujemy

splot funkcji $f*g(t)=\int_0^t f(t-s)g(s)\,ds$,
to $\mathcal{L}(f*g)=\mathcal{L}(f)\cdot\mathcal{L}(g)$.

Będziemy dalej używać następującego oznaczenia $\int_{(c)}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}$, $c\in\mathbb{R}$

<u>Lemat:</u> Niech $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ będzie daną funkcją, $b>0$ ustalone, niech f ma ograniczone wahanie na każdym zbiorze zwartym oraz $f(t)e^{-bt}$ jest całkowalna (w s. Leb.) na $[0,\infty)$. Wtedy dla dowolnego $c>b$

$$\int_{(c)}\mathcal{L}(f)(\lambda)e^{\lambda t}\,d\lambda=\begin{cases}\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2} & t>0\\ \frac{1}{2}f(0+) & t=0\end{cases}$$

<u>Tw. 5.</u> Rozwiązanie $X(t)$ równania (1L0) jest rozwiązaniem fundamentalnym, czyli

$$\mathcal{L}(X)(\lambda)=h^{-1}(\lambda).$$

Dla dowolnego $c>b$ zachodzi

$$X(t)=\int_{(c)}h^{-1}(\lambda)e^{\lambda t}\,d\lambda \qquad t>0,$$

gdzie b jest stałą związaną z wykładniczym oszacowaniem $|X(t)|\le ae^{bt}$, $t\geqslant 0$.

D. Własności X implikują, że transformata X istnieje i jest analityczna dla $\operatorname{Re}\lambda>b$. Pomnóżmy równanie (1L0) przez $e^{-\lambda t}$ i scałkujmy w granicach od 0 do ∞.

$$\int_0^\infty \dot{X}(t)e^{-\lambda t}\,dt=A\int_0^\infty X(t)e^{-\lambda t}\,dt+B\int_0^\infty X(t-\tau)e^{-\lambda t}\,dt$$

$$P=A\mathcal{L}(X)(\lambda)+B\int_{-\tau}^{\infty}X(t)e^{-\lambda(t+\tau)}\,dt=(A+Be^{-\lambda\tau})\mathcal{L}(X)(\lambda)$$

$$L=\underbrace{X(t)e^{-\lambda t}\Big|_0^\infty}_{=-1}+\lambda\int_0^\infty X(t)e^{-\lambda t}\,dt,$$ czyli $\mathcal{L}(X)(\lambda)=h^{-1}(\lambda)$.

$\underline{XVI}$ / ~~Wzór~~ na transformatę odwrotną — oczywisty z własności X. $\square$

Skorzystamy teraz z całkowej postaci X w celu uzyskania dokładniejszego oszacowania wykładniczego.

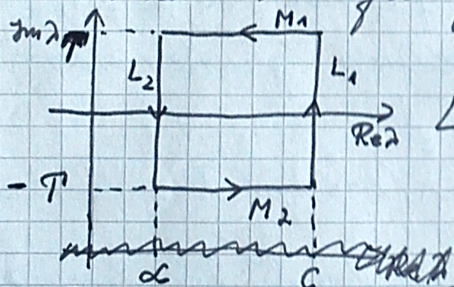
__Tw. 6.__ Jeśli $\alpha_0 = \max\{\operatorname{Re}\lambda : h(\lambda)=0\}$, to dla dowolnego $\alpha > \alpha_0$ istnieje stała $k = k(\alpha)$, że rozwiązanie fundamentalne spełnia nierówność

$$|X(t)| \le k e^{\alpha t} \qquad t \ge 0$$

D. Mamy $X(t) = \int_{(c)} h^{-1}(\lambda) e^{\lambda t} d\lambda$ dla dost. dużych c. Chcemy pokazać, że

$$(*)\ X(t) = \int_{(\alpha)} h^{-1}(\lambda) e^{\lambda t} d\lambda.$$

Rozpatrzmy więc całkę z funkcji $h^{-1}(\lambda)e^{\lambda t}$ wzdłuż brzegu prostokąta $B \subset \mathbb{C}$, że



$L_1 = \{c + iy : -T \le y \le T\}$,

$L_2 = \{\alpha + iy : -T \le y \le T\}$

$M_1 = \{x + iT,\ \alpha \le x \le c\}$

$M_2 = \{x - iT,\ \alpha \le x \le c\}$

Ponieważ $h(\lambda)$ nie ma zer w tym prostokącie, to całka wzdłuż brzegu jest 0. Zatem udowodnimy $(*)$, jeśli pokażemy, że

$$\int_{M_1} h^{-1}(\lambda)e^{\lambda t} d\lambda,\ \int_{M_2} h^{-1}(\lambda)e^{\lambda t} d\lambda \xrightarrow[T\to\infty]{} 0$$

Wybierzmy T_0 : $\left(1+\frac{\alpha^2}{T^2}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{T}\left(|A| + |B|e^{-\alpha\tau}\right) \ge \frac{1}{2}$ dla wszystkich $T \ge T_0$. Wtedy dla $\lambda \in M_1$

$$|h^{-1}(\lambda)| = \left|\frac{1}{x+iT - A - Be^{-x\tau_0 - iT\tau}}\right| \le \frac{1}{\underset{(x^2+T^2)^{\frac{1}{2}}}{\overset{\shortparallel}{|x+iT|}} - |A| - |B|e^{-x\tau}}$$

$$\le \frac{2}{T} \quad \text{dla } T \ge T_0$$

Stąd: $\left|\int_{M_1} h^{-1}(\lambda)e^{\lambda t}d\lambda\right| \le \frac{2}{T}e^{ct}(c-\alpha) \xrightarrow[T\to\infty]{} 0$

Analogicznie dla M_2. Stąd mamy (*).

Niech T_0 j.w. Niech $g(\lambda)=h^{-1}(\lambda)-(\lambda-\alpha_0)^{-1}$.

Wtedy dla $\lambda=\alpha+iT$, $|T|\ge T_0$ mamy

$$|g(\lambda)| = \left|h^{-1}(\lambda)\frac{A+Be^{-\lambda\tau}-\alpha_0}{\lambda-\alpha_0}\right| \le \frac{2}{T^2}\left(|A|+|B|e^{-\alpha\tau}+|\alpha_0|\right).$$

Zatem $\int_{(\alpha)}|g(\lambda)|d\lambda<+\infty$ oraz

$$\left|\int_{(\alpha)} g(\lambda)e^{\lambda t}d\lambda\right| \le K_1e^{\alpha t},\ t>0.$$

Ponieważ wiadomo, że $\int_{(\alpha)}(\lambda-\alpha_0)^{-1}e^{\lambda t}d\lambda$

istnieje i też ma oszacowanie wykładnicze

$\left|\int_{(\alpha)}\frac{e^{\lambda t}}{\lambda-\alpha_0}d\lambda\right|\le K_2e^{\alpha t}$, $t>0$, to

teza tw. zachodzi dla $K=K_1+K_2$. □

Wróćmy teraz do równania niejednorodnego (1L) i znajdziemy rozwiązanie $x(\phi,f)$ w zależności od rozwiązania fundamentalnego X. Pokażemy, że

(VS) $x(\phi,f)(t)=x(\phi,0)(t)+\int_0^t X(t-s)f(s)ds$, $t\ge 0$.

Reprezentację tę nazwiemy formułą uzmiennienia stałej:

Tw. 7. Rozwiązanie $x(\phi,f)$ równania (1L) można przedstawić w postaci (VS). Co więcej dla $t\ge 0$ zachodzi

(VS0) $x(\phi,0)(t)=X(t)\phi(0)+B\int_{-\tau}^{0}X(t-\theta-\tau)\phi(\theta)d\theta$

D. Zastosujemy transf. Laplace'a. Do tego musimy mieć f ograniczoną wykładniczo, ale dowolną funkcję f możemy tak

(VII) / przedefiniować, że dla dowolnego zbioru zwartego $[0,T]$ mamy tę samą funkcję, na zbiorze $[T+\varepsilon,\infty)$ kładziemy 0 i uzupełniamy do funkcji ciągłej. Wtedy mamy oszacowanie wykładnicze. Dowodzimy tw. na każdym zbiorze zwartym $[0,T]$ dla dowolnego $T\geq 0$, czyli mamy tw. dla $t\geq 0$.

Niech $x(\phi,f)$ będzie rozwiązaniem (NL). Możemy zastosować transformatę Laplace'a do każdego członu równania, co wynika z oszacowań w tw. 3. Mnożąc przez $e^{-\lambda t}$, $\operatorname{Re}\lambda > c$ dost. duże i całkując od 0 do ∞ dostajemy

$$h(\lambda)\mathcal{L}(X)(\lambda) = \phi(0) + Be^{-\lambda\tau}\int_{-\tau}^{0} e^{-\lambda\theta}\phi(\theta)d\theta + \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}f(t)dt.$$

Stosując transformatę odwrotną:

$$x(t) = \int_{(c)} e^{\lambda t}h^{-1}(\lambda)\left(\phi(0) + \ldots\right)d\lambda$$

Ponieważ $h^{-1}(\lambda) = \mathcal{L}(X)(\lambda)$ oraz $\int_0^\infty e^{-\lambda t}f(t)dt = \mathcal{L}(f)(\lambda)$ to ostatni składnik jest odwrotną transformatą iloczynu $\mathcal{L}(X)\mathcal{L}(f)(\lambda)$, czyli mamy splot $\int_0^t X(t-s)f(s)ds$. Dwa pierwsze składniki zależą tylko od ϕ, czyli jest to $x(\phi,0)(t)$ (bo jak damy $f=0$, to dostaniemy właśnie to rozwiązanie).

Chcemy teraz wykazać, że dwa pierwsze składniki w tej formule są tym samym, co prawa strona (VSO). Jest to oczywiste w przypadku pierwszego składnika sztucznego.

Jeśli $\omega : [-\tau, \infty) \to [0,1]$, że $\omega(\theta) = 0$, $\theta \geq 0$ i $\omega(\theta) = 1$, $\theta < 0$, także ϕ rozszerzamy na $(-\tau, \infty)$: $\phi(\theta) = \phi(0)$, $\theta \geq 0$, to

$$e^{-\lambda\tau} \int_{-\tau}^{0} e^{-\lambda\theta} \phi(\theta) d\theta = \int_{0}^{\infty} e^{-\lambda s} \phi(s-\tau) \omega(s-\tau) ds =$$

$$= \mathcal{L}(\phi(-\tau + \cdot)\omega(-\tau + \cdot)). \text{ Stąd}$$

$$B \int_0^t X(t-s)\phi(-\tau+s)\omega(-\tau+s)ds = B \int_0^\tau X(t-s)\phi(s-\tau)ds$$

bo mamy odwrotną transformatę Lap. iloczynu X oraz $\phi(-\tau + \cdot)\omega(-\tau + \cdot)$, czyli znów dostajemy splot. $\square$

Z powyższego dostajemy, że zachowanie rozwiązań równania (1L0) jest zdeterminowane przez równanie charakterystyczne.

Tw. 8 Niech $\alpha_0 = \max\{Re \lambda : h(\lambda) = 0\}$ i $X(\phi)$ będzie rozw. (1L0) z war. pocz. ϕ. Wtedy $\forall \alpha > \alpha_0 \ \exists K = K(\alpha)$:

$$|x(\phi)(t)| \leq K e^{\alpha t} |\phi|, \ t \geq 0.$$

W szczególności, gdy $\alpha_0 < 0$ dostajemy, że x wykładniczo zbiega do 0 przy $t \to \infty$.

D. Prosty wniosek ze wzoru (VS0) i oszacowania $|X(t)| \leq k e^{\alpha t}$, $\alpha > \alpha_0$, $t > 0$ $\square$

Znając asymptotykę równania (1L0) możemy zastosować (VS) do zbadania asymptotyki równania zaburzonego postaci

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-\tau) + f(x(t), x(t-\tau)).$$

Jeśli rozw. $x(t)$ dla war. pocz. $(0, \phi)$ istnieje, to

$$x(t) = y(t) + \int_0^t X(t-s) f(x(s), x(s-\tau)) ds,$$

gdzie $y = y(\phi)$ rozw. (1L0). Jeśli f spełnia:

XVIII/ $f(0,0)=0$, $\frac{\partial f(0,0)}{\partial(x,y)}=0$ i $\alpha_0<0$, to można udowodnić tw. analogiczne do ODE o stabilności w pierwszym przybliżeniu (czyli linearyzacji). Dowód jest analogiczny jak dla ODE – przeprowadzimy go w bardziej ogólnym przypadku.

Wróćmy teraz do ogólnego równania (1) i zajmiemy się udowodnieniem istnienia i jednoznaczności rozwiązań. Zaczniemy od wprowadzenia odpowiednich oznaczeń i udowodnienia kilku technicznych lematów.

Df. Dla dowolnego $(\sigma,\phi)\in\mathbb{R}\times C$ niech $\tilde{\phi}\in C$, $\tilde{\phi}:[\sigma-\tau,\infty)\to\mathbb{R}^n$, zdefiniowane jako:

$$\tilde{\phi}_\sigma=\phi \qquad \tilde{\phi}(t+\sigma)=\phi(0),\ t\geq 0.$$

Niech x będzie rozwiązaniem równania (1) przechodzącym przez (σ,ϕ). Jeśli $x(t+\sigma)=\tilde{\phi}(t+\sigma)+y(t)$, $t\geq-\tau$, to y spełnia

$$(3)\quad \begin{cases} y_0=0 \\ y(t)=\int_0^t f(\sigma+s,\tilde{\phi}_{\sigma+s}+y_s)\,ds,\ t\geq 0 \end{cases}$$

Odwrotnie, jeśli y spełnia (3), to x jest rozwiązaniem (2), zatem także (1) przy założeniu ciągłości f. Wobec tego znalezienie rozwiązania równania (1) jest równoważne znalezieniu $\alpha>0$ i funkcji $y\in C([-\tau,\alpha],\mathbb{R}^n)$, że równanie (3) jest spełnione dla $t\in[0,\alpha]$.

Niech $V\subset\mathbb{R}\times C$, $C(V,\mathbb{R}^n)$ – rodzina wszystkich funkcji $f:V\to\mathbb{R}^n$ ciągłych, $C^0(V,\mathbb{R}^n)\subset C(V,\mathbb{R}^n)$ to podzbiór funkcji ograniczonych, przy czym $C^0(V,\mathbb{R}^n)$ staje się przestrzenią Banacha, jeśli wyposażymy ją w normę $|f|_V = \sup_{(t,\phi)\in V} |f(t,\phi)|$.

Dla dowolnych $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ oznaczmy $I_\alpha=[0,\alpha]$,
$B_\beta = \{\psi\in\mathcal{C}: |\psi|\le\beta\}$,
$\mathcal{A}(\alpha,\beta)=\{y\in C([-\tau,\alpha],\mathbb{R}^n): y_0=0, y_t\in B_\beta, t\in I_\alpha\}$.

<u>Lemat</u>: Niech $\Omega\subset\mathbb{R}\times\mathcal{C}$ będzie otwarty, $W\subseteq\Omega$ zwarty oraz $f^0\in C(\Omega,\mathbb{R}^n)$ dany operator. Istnieje takie otoczenie $V\subseteq\Omega$ zbioru W, że $f^0\in C^0(V,\mathbb{R}^n)$, istnieje otoczenie $U\subset C^0(V,\mathbb{R}^n)$ operatora f^0 i dodatnie stałe M,α,β, że

$$|f(\sigma,\phi)|<M \quad \text{dla } (\sigma,\phi)\in V \text{ i } f\in U.$$

Dla każdego $(\sigma^0,\phi^0)\in W$ zachodzi też

$$(\sigma^0+t,\ y_t+\tilde{\Phi}^0_{\sigma^0+t})\in V \text{ dla } t\in I_\alpha \text{ i } y\in\mathcal{A}(\alpha,\beta).$$

D. Skoro W zwarty i f^0 ciągły, to istnieje M, że $|f^0(\sigma^0,\phi^0)|<M$ dla $(\sigma^0,\phi^0)\in W$. Co więcej, ten sam argument implikuje, że istnieją $\bar\alpha,\bar\beta,\varepsilon>0$, że

$$|f^0(\sigma^0+t,\ \phi^0+\psi)|<M-\varepsilon \text{ dla } (\sigma^0,\phi^0)\in W$$
$$\text{oraz } (t,\psi)\in I_{\bar\alpha}\times B_{\bar\beta}.$$

Jeśli $V=\{(\sigma^0+t,\phi^0+\psi): (\sigma^0,\phi^0)\in W, (t,\psi)\in I_{\bar\alpha}\times B_{\bar\beta}\}$, to $f^0\in C^0(V,\mathbb{R}^n)$ i mamy odpowiednie otoczenie U.
Niech $0<\beta<\bar\beta$ i wybierzmy α, że $\alpha<\bar\alpha$ oraz
$|\tilde{\Phi}^0_{\sigma^0+t}-\phi^0|<\bar\beta-\beta$ dla $(\sigma^0,\phi^0)\in W$, $t\in I_\alpha$,
co można zrobić ze zwartości W. Mamy więc
$|y_t+\tilde{\Phi}^0_{\sigma^0+t}-\phi^0|<\beta+\bar\beta-\beta=\bar\beta$ dla $y\in\mathcal{A}(\alpha,\beta)$. □

<u>Lemat</u>: Niech $\Omega\subset\mathbb{R}\times\mathcal{C}$ otwarty, $W\subset\Omega$ zwarty, $f^0\in C(\Omega,\mathbb{R}^n)$ dana, otoczenia U,V i stałe M,α,β jak w poprzednim lemacie.

XIX/ Jeśli $T: W\times U\times \mathcal{F}(\alpha,\beta)\to C([-\tau,\alpha],\mathbb{R}^n)$

$T(\sigma,\phi,f,y)(t)=0,\quad t\in[-\tau,0],$

$$T(\sigma,\phi,f,y)(t)=\int_0^t f(\sigma+s,\tilde{\phi}_{\sigma+s}+y_s)\,ds,\quad t\in I_\alpha,$$

to T jest ciągły i istnieje zbiór zwarty $K\subset C([-\tau,\alpha],\mathbb{R}^n)$, że $T: W\times U\times\mathcal{F}(\alpha,\beta)\to K$. Co więcej, jeśli $M\alpha\le\beta$, to $T: W\times U\times\mathcal{F}(\alpha,\beta)\to\mathcal{F}(\alpha,\beta)$.

D. Ponieważ f jest ograniczone przez M, to

$$|T(\sigma,\phi,f,y)(t_1)-T(\sigma,\phi,f,y)(t_2)|\le M|t_1-t_2|$$

oraz $|T(\sigma,\phi,f,y)(t)|\le M\alpha$ dla $t,t_1,t_2\in I_\alpha$.

Jeśli $K=\{g\in C([-\tau,\alpha],\mathbb{R}^n): |g(t_1)-g(t_2)|\le M|t_1-t_2|,\ |g(t)|\le M\alpha\}$, to K jest zwarty, $T: W\times U\times\mathcal{F}(\alpha,\beta)\to K$. Jeśli $M\alpha\le\beta$, to $K\subset\mathcal{F}(\alpha,\beta)$.

Pokażemy teraz, że T jest ciągły. Niech $(\sigma^k,\phi^k,f^k,y^k)\in W\times U\times\mathcal{F}(\alpha,\beta)$ będzie zbieżny do $(\sigma^0,\phi^0,f^0,y^0)\in W\times U\times\mathcal{F}(\alpha,\beta)$.

Ponieważ $T(\sigma^k,\phi^k,f^k,y^k)\in K$, to istnieje podciąg zbieżny $T(\sigma^k,\phi^k,f^k,y^k)\to\gamma\in K$. Ponieważ $f^k(\sigma^k+s,\tilde{\phi}^k_{\sigma^k+s}+y^k_s)\to f^0(\sigma^0+s,\tilde{\phi}^0_{\sigma^0+s}+y^0_s)$ $\forall s\in I_\alpha$ i wszystkie te funkcje są jednostajnie ograniczone z poprzedniego lematu, to z tw. Leb. o przejściu do granicy pod znakiem całki

$$\gamma(t)=\lim_{k\to\infty}\int_0^t f^k(\sigma^k+s,\tilde{\phi}^k_{\sigma^k+s}+y^k_s)\,ds=$$

$$=\int_0^t f^0(\sigma^0+s,\tilde{\phi}^0_{\sigma^0+s}+y^0_s)\,ds=T(\sigma^0,\phi^0,f^0,y^0)(t)$$

$\forall t\in I_\alpha$, zatem granica dowolnego podciągu zbieżnego nie zależy od podciągu, czyli ciąg jest zbieżny. $\square$

W dowodzie tw. o istnieniu wykorzystamy tw. Schaudera o punkcie stałym.

Def.] Niech $T: U \to X$, $U \subset X$ podzbiór przestrzeni Banacha. Powiemy, że T jest pełnociągły, jeśli jest ciągły i dla dowolnego ograniczonego $B \subset U$ domknięcie zbioru $T(B)$ jest zwarte.

Inaczej: T przeprowadza zbiory ograniczone na prezwarte

Lemat (tw. Schaudera o p. stałym). Niech $T: U \to U$, $U \subset X$ domknięty, ograniczony i wypukły podzbiór p. Banacha i T jest pełnociągły, to T ma punkt stały w U.

Tw. (o istnieniu rozwiązań) Niech $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathcal{C}$ otwarty i $f^0 \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Jeśli $(\sigma, \phi) \in \Omega$, to istnieje rozwiązanie równania (1) dla funkcji f^0 przechodzące przez (σ, ϕ).

Ogólniej: jeśli $W \subset \Omega$ zwarty i $f^0 \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$ dany operator, to istnieje otoczenie $V \subset \Omega$ zbioru W, że $f^0 \in C^0(V, \mathbb{R}^n)$ i istnieje otoczenie $U \subset C^0(V, \mathbb{R}^n)$ operatora f^0 oraz $\alpha > 0$, że dla dowolnego $(\sigma, \phi) \in W$, $f \in U$ istnieje rozwiązanie $x(\sigma, \phi, f)$ równania (1) określone na $[\sigma - \tau, \sigma + \alpha]$.

D. Aby udowodnić pierwszą część tw. weźmy $W = \{(\sigma, \phi)\}$. Udowodnione lematy i tw. Schaudera zastosowane do operatora $T(\sigma, \phi, f^0, \cdot)$ na $\mathcal{A}(\alpha, \beta)$ (jest to domknięty, ograniczony i wypukły zbiór w $C([-\tau, \alpha], \mathbb{R}^n)$) implikuje istnienie rozwiązania.

Zastosowanie lematów w ogólności daje drugą część twierdzenia.

XX/ Potrzebujemy jeszcze tylko pełnociągłości operatora T. Niech $Y \subset \mathcal{A}(\alpha,\beta)$ będzie domknięty. Mamy $T(\sigma, \phi, f, Y) \subset K$, więc podciąg zbieżny w K możemy wybrać, jeśli granica nie należy do $T(\sigma, \phi, f, Y)$, to bierzemy domknięcie i wtedy należy. □

Tw. (o ciągłej zależności) Niech $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathcal{C}$ otwarty, $(\sigma^0, \phi^0) \in \Omega$, $f^0 \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$ i x^0 będzie rozwiązaniem równania (1) dla f^0 przez (σ^0, ϕ^0), które istnieje i jest jednoznaczne na $[\sigma^0 - \tau, b]$. Niech $W^0 \subset \Omega$ będzie zbiorem zwartym

$$W^0 = \{(t, x_t^0) : t \in [\sigma^0, b]\}$$

oraz V^0 będzie otoczeniem W^0 na którym f^0 jest ograniczona. Jeśli (σ^k, ϕ^k, f^k), $k \in \mathbb{N}$: $\sigma^k \to \sigma^0$, $\phi^k \to \phi^0$, $|f^k - f^0|_{V^0} \to 0$, to istnieje k^0, że rozwiązanie $x^k = x^k(\sigma^k, \phi^k, f^k)$ dla $k \geq k^0$ istnieje na $[\sigma^k - \tau, b]$ oraz $x^k \to x^0$ jednostajnie na $[\sigma^0 - \tau, b]$. Ponieważ nie wszystkie x^k muszą być określone na całym $[\sigma^0 - \tau, b]$, przez zbieżność jednostajną na tym zbiorze rozumie się: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists k_1(\varepsilon)$, że x^k, $k \geq k_1(\varepsilon)$ jest zdefiniowane na $[\sigma^0 - \tau + \varepsilon, b]$ i zbieżność jednostajna zachodzi na $[\sigma^0 - \tau + \varepsilon, b]$.

D. Ponownie z lematu. Pomijamy.

Tw. (o jednoznaczności rozwiązań) Niech $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathcal{C}$ otwarty, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ciągła i spełnia warunek Lipschitza po ϕ w każdym zbiorze zwartym w Ω. Jeśli $(\sigma, \phi) \in \Omega$, to istnieje jednoznaczne rozwiązanie równania (1) przechodzące przez (σ, ϕ).

D. Niech I_α, B_β j.w., niech x, y będą dwoma rozwiązaniami równania (1) na $[\sigma-\tau, \sigma+\alpha]$, z $x_\sigma = y_\sigma = \phi$. Wtedy

$$\begin{cases} x(t) - y(t) = \int_\sigma^t (f(s, x_s) - f(s, y_s))\,ds & t \geq \sigma \\ x_\sigma - y_\sigma = 0 \end{cases}$$

Niech L będzie stałą Lipschitza w dowolnym zbiorze zwartym zawierającym trajektorie $\{(t, x_t)\}, \{(t, y_t)\}$, $t \in I_\alpha$ i weźmy $\bar{\alpha} : L\bar{\alpha} < 1$

Wtedy dla $t \in I_{\bar{\alpha}}$

$$|x(t) - y(t)| \leq \int_\sigma^t L|x_s - y_s|\,ds = L\bar{\alpha} \sup_{\sigma \leq s \leq t} |x_s - y_s|$$

Stąd $x(t) = y(t)$ dla $t \in [\sigma - \tau, \sigma + \bar{\alpha}]$.

Faktycznie - załóżmy, że $\exists t \in [\sigma - \tau, \sigma + \bar{\alpha}]$, że $x(t) \neq y(t)$. Niech $\bar{t}$ będzie pierwszym punktem, że $x(\bar{t}) = y(\bar{t})$ i $x(t) > y(t)$ dla $t > \bar{t}$. Wtedy na pewnym odcinku funkcja $x(t) - y(t)$ musi rosnąć (bo jest gładka). Niech $(\bar{t}, \hat{t}) \subset [\sigma - \tau, \sigma + \bar{\alpha}]$ będzie takim odcinkiem. Zatem

$$x(\hat{t}) - y(\hat{t}) = \sup_{\sigma - \tau \leq t \leq \hat{t}} (x(t) - y(t)),$$ ale

$$x(\hat{t}) - y(\hat{t}) < \sup_{\sigma \leq s \leq \hat{t}} |x_s - y_s| = \sup_{\sigma \leq s \leq \hat{t}} \sup_{-\tau \leq h \leq 0} |x(s+h) - y(s+h)|$$

$$= \sup_{\sigma - \tau \leq s \leq \hat{t}} |x(s) - y(s)| = x(\hat{t}) - y(\hat{t})$$ - sprzeczne.

Na koniec pokrywamy cały odcinek odcinkami o długości $\bar{\alpha}$ i otrzymujemy jednoznaczność. $\square$

XI) ## Przedłużalność rozwiązań

Załóżmy, że f jest operatorem ciągłym oraz x – rozwiązaniem równ. (1) na odcinku $[\sigma, a)$, $a > \sigma$. Powiemy, że $\tilde{x}$ jest przedłużeniem x, jeśli $\exists\, b > a$, że $\tilde{x}$ jest określone na $[\sigma-\tau, b)$, $\tilde{x}(t) = x(t)$ dla $t \in [\sigma-\tau, a)$ oraz $\tilde{x}$ spełnia (1) na $[\sigma, b)$. Rozwiązanie x jest nieprzedłużalne, jeśli nie istnieje jego przedłużenie właściwe. Wtedy zbiór $[\sigma, a)$ jest maksymalną dziedziną istnienia rozwiązania. Istnienie rozwiązania nieprzedłużalnego wynika z lematu Kuratowskiego – Zorna. Oczywiście rozwiązanie takie musi być określone na zbiorze otwartym.

Tw. Niech $\Omega \subset \mathbb{R} \times C$ otwarty i $f \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Jeśli x jest nieprzedłużalnym rozwiązaniem równania (1) określonym na $[\sigma-\tau, b)$, to dla każdego zbioru zwartego $W \subset \Omega$ istnieje t_W, że $(t, x_t) \notin W$ dla $t_W \le t < b$.

D. Jeśli $b = +\infty$, to teza jest oczywista. Załóżmy więc, że $b < +\infty$. Z tw. o istnieniu, skoro W jest zwarty, to dla dowolnego $(c, y) \in W$ istnieje rozwiązanie określone na $[c, c+\alpha]$ dla pewnego $\alpha = \alpha(W)$. Załóżmy teraz, że istnieje taki ciąg $t_k \to b^-$, $(t_k, x(t_k)) \in W$, $x(t_k) \to y \in \mathbb{R}^n$: $(b, y) \in W$. Ponieważ f jest ograniczona w otoczeniu (b, y), to x jest jednostajnie ciągła na $[\sigma, b)$, $x(t) \xrightarrow[t \to b^-]{} y$. Wobec tego rozwiązanie można przedłużyć na $[\sigma, b+\alpha]$ – sprzeczność.

Rozpatrzmy teraz przypadek $\tau > 0$. Załóżmy, że teza nie jest prawdziwa. Wtedy $\exists\, t_k \to b^-$ oraz $\psi \in \mathcal{C}$, że $(t_k, x_{t_k}) \in W$, $(b, \psi) \in W$ $(t_k, x_{t_k}) \to (b, \psi)$ przy $k \to \infty$.

Wtedy $\forall\, \varepsilon > 0$ $\lim_{k\to\infty} \sup_{\theta \in [-\tau, -\varepsilon]} |x_{t_k}(\theta) - \psi(\theta)| = 0$.

Stąd $x(b+\theta) = \psi(\theta)$, $\theta \in [-\tau, 0)$.

Ponieważ $\lim_{t \to b^-} x(t)$ istnieje, to można x przedłużyć do funkcji ciągłej na $[\sigma - \tau, b]$ definiując $x(b) = \psi(0)$. Ponieważ $(b, x_b) \in \Omega$, to można rozwiązanie przedłużyć na prawo od b. $\square$

<u>Wniosek.</u> Niech $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathcal{C}$ otwarty i $f \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Jeśli x jest nieprzedłużalnym rozwiązaniem równania (1) na $[\sigma - \tau, b)$ oraz W jest domknięciem trajektorii $\{(t, x_t) : \sigma \le t < b\}$ w $\mathbb{R} \times \mathcal{C}$, to zwartość W implikuje, że $\exists\, t_k : t_k \to b^-$ i (t_k, x_{t_k}) zbiega do brzegu $\partial\Omega$ przy $k \to \infty$. Jeśli $\tau > 0$, to istnieje $\psi \in \mathcal{C}$, że $(b, \psi) \in \partial\Omega$ oraz $(t, x_t) \to (b, \psi)$.

<u>Tw.</u> Niech $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathcal{C}$ otwarty i $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ pełnociągła. Jeśli x jest nieprzedłużalnym rozwiązaniem równania $(1)_f$ na $[\sigma - \tau, b)$, to dla każdego domkniętego ograniczonego $U \subset \Omega$ istnieje t_U, że $(t, x_t) \notin U$ dla $t_U < t < b$.

D. Dla $\tau = 0$ to to samo co poprzednie tw. Załóżmy, że $\tau > 0$. Załóżmy, że teza tw. jest nieprawdziwa. Istnieje więc ciąg liczb $t_k \to b^-$, że $(t_k, x_{t_k}) \in U$ $\forall k$. Stąd $x(t)$ dla $t \in [\sigma - \tau, b)$ jest ograniczone. Mamy więc stałą M, że $|f(t, \phi)| < M$ dla

XII) (t, f) w domknięciu $\{(t, x_t) : a \le t < b\}$.
Stąd $|x(t+h) - x(t)| = |\int_t^{t+h} f(s, x_s) ds| \le Mh$ dla wszystkich $t, t+h < b$. Zatem x jest jednostajnie ciągła na $[\sigma - \tau, b)$, czyli $\{(t, x_t) : \sigma \le t < b\}$ należy do zbioru zwartego w Ω - co przeczy poprzedniemu tw. $\square$

Powyższe twierdzenie pokazuje w jaki sposób rozwiązanie nieprzedłużalne dla funkcji pełnociągłej zmierza do brzegu zbioru Ω przy $t \to b^-$, w szczególności że rozwiązanie w pewnej chwili opuszcza dowolny zbiór domknięty i ograniczony i nie może do niego wrócić.

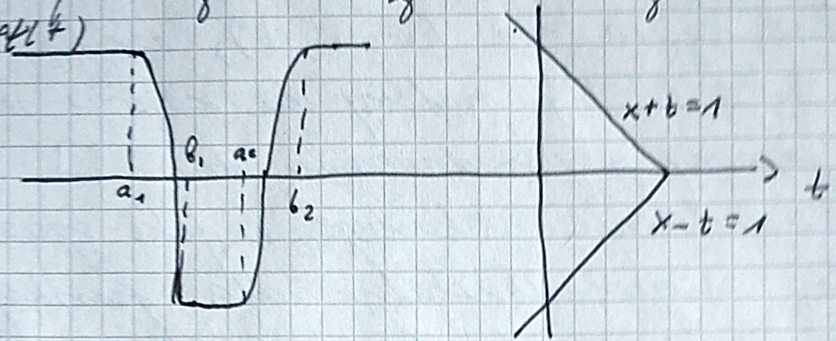
Natomiast jeśli f nie jest pełnociągła, to może się zdarzyć, że krzywa $(t, x(t))$ oscyluje w $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ w taki sposób, że (t, x_t) nie ma punktów granicznych w $\mathbb{R} \times \mathcal{C}$ przy $t \to b^-$.

Przykład: Niech $\Delta(t) = t^2$ i wybierzmy dwa ciągi $(a_k), (b_k)$, że $a_1 < a_2 < \dots$, $b_1 < b_2, \dots$, $a_k \to 0$, $b_k \to 0$, $k \to \infty$, że
$$a_k = b_k - \Delta(b_k), \quad b_k \le a_{k+1} - \Delta(a_{k+1}) \quad k = 1, 2, \dots$$
(np. $b_k = -2^{-k}$, $k = 1, 2, \dots$).

Niech ψ będzie dowolną funkcją kl. C^1 spełniającą
$$\psi(t) = \begin{cases} +1 & t \in (-\infty, a_1], [b_{2k}, a_{2k+1}] \\ -1 & t \in [b_{2k-1}, a_{2k}], \quad k = 1, 2, \dots \end{cases}$$
$$\psi'(t) \ne 0, \quad t \in (a_k, b_k), k = 1, 2$$

Niech H będzie zbiorem punktów (t, x): $|x| < 1 - t$. Zdefiniujemy funkcję $h(t, x)$ na H.

Na wykresie funkcji $\psi(t)$:
$h(t-\Delta t, \psi(t-\Delta(t))) = \psi'(t)$, $-\infty < t < 0$.
Funkcja h jest ciągła na wykresie ψ



Dla $t \in (a_k, b_k)$, $k \geq 2$, czyli tam gdzie ψ rośnie lub maleje, mamy $t - \Delta t \in [b_{k-1}, a_k]$. Dla $t \in (-\infty, b_1]$ mamy $t - \Delta t \in (-\infty, a_1]$. Stąd $h = 0$ $\forall t \in (-\infty, b_1], (a_k, b_k)$, $k \geq 2$, w szczególności $h = 0$ na każdym przedziale, na którym ψ rośnie albo maleje. Przedłużmy funkcję h do funkcji ciągłej, że $h = 0$ na P,
$P = \{(t,x): |t| + |x| \leq 1\}$.
Rozpatrzmy teraz równanie:
(*) $\dot{x}(t) = h(t - \Delta t, x(t - \Delta(t)))$, $t < 0$, $\Delta(t) = t^2$.
Wybierzmy $\sigma < a_1$ i niech $\tau = \sigma - \min\{(t - t^2) : \sigma \leq t \leq 0\}$.
Rozpatrzmy war. pocz. dla $t_0 = \sigma$. Funkcja $x(t) = \psi(t)$ jest rozwiązaniem tego równania dla $t < 0$ i jest nieprzedłużalnym rozw. na $[\sigma - \tau, 0)$.
Niech prawa strona (*) będzie $f(t, x_t)$. Funkcjonał f nie przeprowadza ograniczonych domkniętych podzbiorów $\Omega = \mathbb{R} \times C$ na zbiory ograniczone.
Takie dziwne zachowanie wiąże się z brakiem zwartości kuli jednostkowej w C.

XXIII) Co więcej, takie „dziwne" zachowanie wcale nie jest rzadkie.

Tw. Niech $x: [-\tau, \alpha) \to \mathbb{R}^n$, $\tau > 0$, $\alpha \in (0, +\infty)$, x jest dowolną różniczkowalną w sposób ciągły i ograniczoną funkcją, że $x(t)$ nie ma granicy przy $t \to \alpha^-$. Istnieje taki ciągły operator $f: \mathcal{C} \to \mathbb{R}^n$, że x jest nieprzedłużalnym rozwiązaniem równania (1) na $[-\tau, \alpha)$.

D. Niech $A = \{x_t : t \in [0, \alpha)\}$. Z założenia wynika, że A jest domknięty w $\mathcal{C}$. Niech $g: A \to \mathbb{R}^n$: $g(x_t) = \dot{x}(t)$ dla $t \in [0, \alpha)$. Operator g jest ciągły na A, można go więc przedłużyć na całe $\mathcal{C}$ do funkcji ciągłej f (co wynika z uogólnienia tw. Tietze'go - tw. Dugundji) $\square$

Zajmiemy się teraz problemem różniczkowalności rozwiązań. Niech $C^p(\Omega, \mathbb{R}^n)$ oznacza przestrzeń funkcji z ciągłymi ograniczonymi pochodnymi do rzędu $p \geq 0$ ze względu na ϕ, $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathcal{C}$ otwarty. W przestrzeni $C^p(\Omega, \mathbb{R}^n)$ rozpatrujemy normę $|\cdot|_p =$ sup norm wszystkich pochodnych.

Wykorzystamy pewne ogólne tw. dotyczące zależności punktów stałych kontrakcji od parametrów.

Def. Niech $V \subset X$, X - p. Banacha, $T: V \to X$ nazywamy kontrakcją (przekształceniem

zwężającym), jeśli $\exists \lambda \in [0,1)$, że
$$|T(x) - T(y)| \le \lambda |x-y| \quad \forall x,y \in U.$$
Jeśli $V \subset Y$, Y - p. Banacha oraz $T: U \times V \to X$, to T nazywamy jednostajną kontrakcją / p. jednostajnie zwężającym, jeśli $|T(x,v) - T(y,v)| \le \lambda |x-y| \quad \forall x,y \in U, v \in V$

Lemat: Jeśli $U \subset X$ jest zbiorem domkniętym i $T: U \to U$ jest ciągłe, to T ma dokładnie jeden punkt stały w U.

Lemat: Jeśli U jest domknięty w X, $T: U \times V \to U$ jest jednostajną kontrakcją i T jest ciągłe, to jednoznacznie wyznaczony punkt stały $x(v)$ operatora $T(\cdot, v): U \to U$ jest ciągły jako funkcja v. Co więcej, jeśli U, V są domknięciami zbiorów otwartych U^0, V^0 i T jest różniczkowalne w sposób ciągły w $U^0 \times V^0$, to $x(v)$ jest kl. C^1. Analogiczna teza jest prawdziwa dla pochodnych wyższego rzędu.

Tw. Jeśli $f \in C^p(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $p \ge 1$, to rozwiązanie $x(\sigma, \phi, f)(t)$ równania (1) przechodzące przez (σ, ϕ) jest jednoznaczne i różniczkowalne w sposób ciągły względem (ϕ, f) dla t w dowolnym zbiorze zwartym zawartym w dziedzinie określoności $x(\sigma, \phi, f)$.
Co więcej, $\forall t \ge \sigma$ pochodna $D_\phi x(\sigma, \phi, f)(t)$ jest operatorem liniowym z $\mathcal{C}$ do $\mathbb{R}^n$; $D_\phi x(\sigma, \phi, f)(\sigma) = I$ (identyczność) oraz dla dowolnej $\psi \in \mathcal{C}$ $D_\phi x(\sigma, \phi, f)\psi(t)$

XXIV/ spełnia liniowe równanie wariacyjne

$(W1)\ \dot{y}(t) = D_\phi f(t, x_t(\sigma, \phi, f)) y_t$.

Podobnie $\forall\, t \geq \sigma$ pochodna $D_f x(\sigma, \phi, f)(t)$ jest operatorem liniowym z $C^p(\Omega, \mathbb{R}^n)$ w $\mathbb{R}^n$, $D_f x(\sigma, \phi, f)(\sigma) = 0$ oraz $\forall\, g \in C^p(\Omega, \mathbb{R}^n)$

$D_f x(\sigma, \phi, f) g(t)$ spełnia równanie wariacyjne

$(W2)\quad \dot{z}(t) = D_\phi f(t, x_t(\sigma, \phi, f)) z_t + g(t, x_t(\sigma, \phi, f))$.

D. Ponieważ $p \geq 1$, to mamy lokalną Lip. i rozw. jest jednoznaczne. Niech $[\sigma - \tau, \sigma + \omega)$ będzie max przedziałem istnienia rozwiązania x i niech $b < \omega$ ustalone. Chcemy pokazać, że x jest różniczkowalne w sposób ciągły względem ϕ na $I = [\sigma - \tau, \sigma + b]$. Istnieje otoczenie $U \ni \phi$, że rozwiązanie $x(\sigma, \psi, f)(t)$, $\psi \in U$, jest określone na $[\sigma - \tau, \sigma + b]$. Weźmy $W = \{(t, x_t) : t \in [\sigma, \sigma + b]\}$ - zwarty w $\mathbb{R} \times C$. Możemy znaleźć stałe M, α, β i otoczenia U, V jak w naszym kluczowym lemacie. Wybierzmy α, że $M\alpha \leq \beta$ i $k\alpha < 1$, gdzie k jest ograniczeniem pochodnej f po ϕ na Ω. Jeśli $x(\sigma + t) = \tilde{\phi}(\sigma, t) + y(t)$, $t \in I_\alpha$, to y jest punktem stałym operatora $T(\sigma, \phi, f)$, który przy powyższych założeniach jest kontrakcją, a stała kontrakcji nie zależy od $(\sigma, \phi, f) \in V \times U$. Łatwo sprawdzamy, że T jest C^1 w Ω, zatem punkt stały $y = y(\sigma, \phi, f)$ jest C^1 w Ω. Analogicznie pokazujemy, że $x(\sigma, \phi, f)(t)$ jest C^1 po f dla $t \in [\sigma, \sigma + \alpha]$. Ponieważ przedział I jest zwarty, otrzymujemy różniczkowalność.

Wzory (W1) i (W2) wynikają bezpośrednio z postaci całkowej (2). $\square$

Jeśli badamy różniczkowalność x względem σ, to nie wystarczą założenia poprzedniego twierdzenia. Rozważmy następujący przykład

$$\dot{x}(t)=a(t)x(t-1),$$

gdzie a jest ciągła. Jeśli $x(\sigma,\phi)$ jest rozwiązaniem, $\sigma<t<\sigma+1$, $h>0$, to

$$x(\sigma+h,\phi)(t)=\phi(0)+\int_{\sigma+h}^{t}a(s)x(\sigma+h,\phi)(s-1)ds$$

$$=\phi(0)+\int_{\sigma+h}^{t}a(s)\phi(s-\sigma-h-1)ds$$

$$x(\sigma,\phi)(t)=\phi(0)+\int_{\sigma}^{t}a(s)\phi(s-\sigma-1)ds.$$

Wtedy $\lim_{h\to0}\frac{x(\sigma+h,\phi)(t)-x(\sigma,\phi)(t)}{h}=-a(t)\phi(t-\sigma-1)$

$$+\lim_{h\to0}\int_{\sigma}^{t}\frac{a(s+h)-a(s)}{h}\phi(s-\sigma-1)ds$$

i w ogólnym przypadku taka granica nie istnieje.

Ostatnim zagadnieniem związanym z problemem istnienia rozwiązań jest przedłużanie „w tył", czyli na lewo od punktu początkowego w czasie.

Def. Niech $\Omega\subset\mathbb{R}\times\mathcal{C}$ otwarty i $f\in C(\Omega,\mathbb{R}^n)$. Powiemy, że $x\in C([\sigma-\tau-\alpha,\sigma],\mathbb{R}^n)$, $\alpha>0$, jest rozwiązaniem równania (1) na $[\sigma-\tau-\alpha,\sigma]$ przechodzącym przez $(\sigma,\phi)\in\Omega$, jeśli $x_\sigma=\phi$ oraz $\forall\,\sigma_1\in[\sigma-\alpha,\sigma]$ mamy $(\sigma_1,x_{\sigma_1})\in\Omega$ i x jest rozwiązaniem równania (1) na $[\sigma_1-\tau,\sigma]$ przez (σ_1,x_{σ_1}). Takie rozwiązanie nazywamy także przedłużeniem w tył rozwiązania

XXV) przez (σ, ϕ).

Definicja ta jest naturalna - mówi, że funkcja ta jest rozwiązaniem równania (1) bez względu na wybór chwili początkowej $t \in [\sigma - \alpha, \sigma]$.

Przyjrzyjmy się ponownie prostemu przykładowi
$$\dot{x}(t) = a(t) x(t-1).$$
Jeśli $\sigma = 0$ i $\phi \in \mathcal{C}$ dana, to wiemy, że ϕ musi być różniczkowalna w sposób ciągły na lewo od 0 oraz $\dot{\phi}(0) = a(0)\phi(-1)$.

Odwrotnie, jeśli tak jest, to możemy zdefiniować $x(t-1) = \frac{1}{a(t)} \dot{\phi}(t)$ o ile $a(t) \neq 0$.

Wobec tego mamy przedłużenie w tył.

Chcemy uogólnić tę ideę.

Niech X, Y - p. Banacha, $\mathcal{L}(X, Y)$ - p. Banacha operatorów liniowych ograniczonych z X w Y.

Jeśli $L \in \mathcal{L}(\mathcal{C}, \mathbb{R}^n)$, to z tw. Riesza o reprezentacji istnieje funkcja macierzowa η o ograniczonym wahaniu, że $L\phi = \int_{-\tau}^{0} d\eta(\theta)\phi(\theta)$.

Każdą taką funkcję η na $[-\tau, 0]$ traktujemy „automatycznie" jako funkcję rozszerzoną na całe $\mathbb{R}$: $\eta(\theta) = \eta(-\tau)$ dla $\theta \leq -\tau$ oraz $\eta(\theta) = \eta(0)$ dla $\theta \geq 0$.

Def. Niech Λ będzie otwartym podzbiorem przestrzeni metrycznej. Powiemy, że $L : \Lambda \to \mathcal{L}(\mathcal{C}, \mathbb{R}^n)$ ma gładkość w mierze, jeśli $\forall \beta \in \mathbb{R}$ istnieje funkcja skalarna $\gamma(\lambda, s)$ ciągła dla $\lambda \in \Lambda$, $s \in \mathbb{R}$, $\gamma(\lambda, 0) = 0$, że jeśli $L(\lambda)(\phi) = \int_{-\tau}^{0} d\eta(\lambda, \theta)\phi(\theta)$, $\lambda \in \Lambda$, $0 < s$, to

$$\left| \lim_{h\to 0^+} \left(\int_{\beta+h}^{\beta+s} + \int_{\beta-s}^{\beta-h} \right) [d\eta(\lambda,\theta)\phi(\theta)] \right| \le \gamma(\lambda,s)|\phi|.$$

Jeśli $\beta \in \mathbb{R}$ oraz macierz $A(\lambda,\beta,L) = \eta(\lambda,\beta^+) - \eta(\lambda,\beta^-)$ jest nieosobliwa w $\lambda = \lambda_0$, to powiemy, że $L(\lambda)$ jest atomowy w β w λ_0. Jeśli $A(\lambda,\beta,L)$ jest nieosobliwa na $K \subset \Lambda$, to mówimy, że $L(\lambda)$ jest atomowy w β na K.

<u>Lemat:</u> Jeśli $L \in C(\Lambda, \mathcal{L}(\mathcal{C},\mathbb{R}^n))$, to L ma gładkość w mierze.

D. Oznaczmy elementy Λ przez t. Niech f będzie funkcją o ograniczonym wahaniu na I i niech $V(f,I)$ oznacza całkowite wahanie f na I. Jeśli $\eta = (\eta_{ij})$ jest macierzą o ograniczonym wahaniu na $[-r,0]$, to $\|\eta\| = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{m} V(\eta_{ij},[-r,0])$.

Jeśli $L(t)\phi = \int_{-r}^{0} d\eta(t,\theta)\phi(\theta)$, to istnieje taka stała $k>0$, że

$$k\|\eta(t,\cdot)\| \le \|L(t)\| < \|\eta(t,\cdot)\|.$$

Ponieważ $L \in C(\Lambda, \mathcal{L}(\mathcal{C},\mathbb{R}^n))$, $\forall t \in \Lambda$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ $\|\eta(t,\cdot) - \eta(\bar{t},\cdot)\| < \varepsilon$ dla $|t-\bar{t}| < \delta$.

Zatem $\forall [a,b] \in [-r,0]$ oraz $i,j \in \{1,\dots,n\}$

$$V(\eta_{ij}(t,\cdot) - \eta_{ij}(\bar{t},\cdot), [a,b]) < \varepsilon \text{ dla } |t-\bar{t}| < \delta.$$

Dla ustalonych i oraz $0 \le s \le r$ niech

$$\mu_i(t,s) = \sum_{j=1}^{n} V(\eta_{ij}(t,\cdot), [\beta^+, \beta+s] \cup [\beta-s, \beta^-]).$$

Mamy, że $\mu_i(t,s)$ jest ciągła po t jednostajnie względem s. Ponadto μ_i jest niemalejąca względem s, jednostajnie ograniczona względem s oraz $\mu_i(t,s) \to 0$ przy $s \to 0$.

Rozpatrzmy w $\mathbb{R}^2$ zbiór $\{(s,y): y = \mu_i(t,s),$

XXVI | $s \in (0, \infty)\}$ i jego domknięta wypukła

powłokę $\Gamma_i(t)$. Niech $\gamma_i(t,s) = \sup\{y : (s,y) \in \Gamma_i(t)\}$.
Wtedy γ_i jest ciągłe jednostajnie względem t. Co więcej, dla każdego ustalonego t jest ciągłe względem s oraz $\gamma_i(t,s) \to 0$ przy $s \to 0$. Zdefiniujmy $\gamma_i(t,0) = 0$. Wtedy γ_i jest ciągłe po (t,s). Jeśli $\gamma(t,s) = \max_i \gamma_i(t,s)$, to γ spełnia założenia. $\square$

W dalszym ciągu zajmiemy się przypadkiem $\Lambda = \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathcal{C}$, czyli $L \in C(\Omega, \mathcal{L}(\mathcal{C}, \mathbb{R}^n))$. Jeśli $D : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ma ciągłą pierwszą pochodną po ϕ, to powyższy lemat implikuje, że D_ϕ ma gładkość w mierze. Możemy więc zdefiniować

<u>Def.</u> Niech $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathcal{C}$ otwarty $(t,\phi) \in \Omega$. Funkcja $D : \Omega \to \mathbb{R}^n$ (nie musi być liniowa!) jest atomowa w β na Ω, jeśli D jest ciągła wraz z pierwszą i drugą pochodną po ϕ oraz D_ϕ jest atomowa w β na Ω.

Jeśli $D(t,\phi)$ jest liniowy względem Ω i ciągły na $\mathbb{R} \times \mathcal{C}$, to $D(t,\phi) = \int_{-r}^{0} d_\theta \eta(t,\theta)\, \phi(\theta)$, to $A(t,\phi,\beta) = A(t,\beta) =$
$= \eta(t,\beta^+) - \eta(t,\beta^-)$ nie zależy od ϕ.
Wobec tego $D(t,\phi)$ jest atomowe w β na $\mathbb{R} \times \mathcal{C}$, jeśli $\det A(t,\beta) \neq 0$ $\forall\, t \in \mathbb{R}$. W szczególności, jeśli $\beta \neq 0$, $\beta \in [-r, 0]$,
$D(t,\phi) = \phi(0) + B(t)\phi(\beta)$, to $A(t,\beta) = B(t)$

i $D(t,\phi)$ jest atomowa w β na $\mathbb{R}\times\mathcal{C}$ dla $\det B(t)\neq 0 \ \forall t\in\mathbb{R}$.

Zauważmy dalej, że gładkość w mierze dostajemy dla danej funkcji f przy założeniu istnienia takich $L(t,\phi)$, $g(t,\phi,\psi)$, $\mathcal{E}(t,\phi,s)$ ciągłych, że $\mathcal{E}(t,\phi,0)=0$, przy czym

$$f(t,\phi+\psi)=f(t,\phi)+L(t,\phi)\psi+g(t,\phi,\psi)$$

$$|g(t,\phi,\psi)-g(t,\phi,\xi)|\leq\mathcal{E}(t,\phi,s)|\psi-\xi| \quad |\psi|,|\xi|\leq s$$

$\forall (t,\phi)\in\Omega$, $(t,\phi+\psi)\in\Omega$, $(t,\phi+\xi)\in\Omega$, $s\geq 0$.

Jeśli A jest macierzą zdefiniowaną powyżej, to $\forall (t,\phi)\in\Omega \ \exists s_0=s_0(t,\phi)$: $A(t,\phi,\beta;L)$ and $\mathcal{E}$ są związane w następujący sposób

$$|\det A(t,\phi,\beta;L)|-\mathcal{E}(t,\phi,\psi)>0 \quad |\psi|\leq s_0.$$

Jeśli $|\det A(t,\phi,\beta;L)|\geq a>0 \ \forall (t,\phi)\in\Omega$ oraz $\mathcal{E}(t,\phi,s)\leq\mathcal{E}_0(s) \ \forall (t,\phi)\in\Omega$, to powyższa nierówność zachodzi jednostajnie w Ω.

<u>Tw.</u> (o przedłużaniu w tył) Jeśli $\Omega\subset\mathbb{R}\times\mathcal{C}$ otwarty, $f:\Omega\to\mathbb{R}^n$ atomowa w $-\tau$ na Ω, $(\sigma,\phi)\in\Omega$ i istnieje $\alpha\in(0,\tau)$, że $\dot\phi(\theta)$ jest ciągła na $[-\alpha,0]$, $\dot\phi(0)=f(\sigma,\phi)$, to istnieje $\bar\alpha>0$ oraz jednoznaczne rozwiązanie równania (1) na $[\sigma-\tau-\bar\alpha,\sigma]$ przez (σ,ϕ).

D. Funkcja x jest rozwiązaniem (1) na $[\sigma-\tau-\alpha,\sigma]$ przez (σ,ϕ) $\Leftrightarrow$ $x_\sigma=\phi$, $(t,x_t)\in\Omega \ \forall t\in[\sigma-\alpha,\sigma]$ oraz (*) $f(t,x_t)=\dot x(t)=\dot\phi(t-\sigma)$ $t\in[\sigma-\alpha,\sigma]$, gdyż $\alpha\in[0,\tau]$.

$\forall\alpha>0$ niech $\hat\phi:[-\tau-\alpha,0]\to\mathbb{R}^n$ będzie zdefiniowana jako $\hat\phi(t)=\phi(t)$, $t\in[-\tau,0]$, XXVIII] $\hat{\varphi}(t) = \phi(-\tau)$ dla $t \in [-\tau-\alpha, -\tau]$.

Jeśli $x(\sigma+t) = \hat{\varphi}(t) + z(t)$ $t \in [-\tau-\alpha, 0]$, to x jest rozwiązaniem $(*) \Leftrightarrow z_0 = 0$ oraz

$(**)$ $f(\sigma+t, \hat{\varphi}_t + z_t) = \dot{\varphi}(t)$ $t \in [-\alpha, 0]$.

Niech $f(t, \phi+\psi) = f(t, \phi) + L(t,\phi)\psi + g(t,\phi,\psi)$, gdzie $L(t,\phi) = f_\phi(t,\phi)$, to założeń wynika, że g jest ciągła, $g(t,\phi,0)=0$ oraz $\forall (t,\phi) \in \Omega$ istnieje $\beta = \beta(t,\phi) \geq 0$ i funkcja $\varepsilon(t,\phi,\beta)$ ciągła, że $\varepsilon(t,\phi,0) = 0$ oraz

$|g(t,\phi,\psi) - g(t,\phi,\xi)| \leq \varepsilon(t,\phi,\beta)|\psi - \xi|$, $|\xi| \leq \beta$, $|\psi| \leq \beta$

Z powyższej nierówności i $(**)$ dostajemy, że $(*)$ jest równoważne zagadnieniu $z_0 = 0$ oraz

$L(\sigma+t, \hat{\varphi}_t)z_t = -f(\sigma+t, \hat{\varphi}_t) - g(\sigma+t, \hat{\varphi}_t, z_t) + \dot{\varphi}(t)$ $t \in [-\alpha, 0]$

Niech $A(t,\phi) = A(t,\phi,-r,L)$ będzie macierzą stowarzyszoną z $L(t,\phi)$. Wtedy $(*)$ jest równoważne: $z_0 = 0$ oraz

$(***)$ $z(t-r) = A^{-1}(\sigma+t, \hat{\varphi}_t)\Big(\int_{-r^+}^{0} d_\theta \eta(t, \hat{\varphi}_t, \theta) z_t(\theta)$
$- f(\sigma+t, \hat{\varphi}_t) - g(\sigma+t, \hat{\varphi}_t, z_t) + \dot{\varphi}(t)\Big)$ $t \in [-\alpha, 0]$.

$\forall \beta > 0$ niech $B_\beta = \{\psi \in C : |\psi| \leq \beta\}$. $\forall \nu \in (0, \frac{1}{4})$ istnieją $\alpha, \beta > 0$, że $(\sigma+t, \phi+\psi) \in \Omega$:

$|A^{-1}(\sigma+t, \phi+\psi)|\varepsilon(\sigma+t, \phi+\psi, \beta) < \nu$

$|A^{-1}(\sigma+t, \phi+\psi)|\,\gamma(\sigma+t, \phi+\psi, \alpha) < \nu$ dla: $t \in [-\alpha, 0]$, $\psi \in B_\beta$ oraz γ z definicji gładkości w mierze. Wybierzmy takie α i β. $\forall \bar{\alpha}, \bar{\beta}$ zdefiniujmy $\mathcal{B}(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = \{\xi \in C([-r-\bar{\alpha}, 0], \mathbb{R}^n) : \xi_0 = 0, \xi_t \in B_{\bar{\beta}},$
$t \in [-\bar{\alpha}, 0]\}$.

Dla dowolnego $0 < \bar{\beta} < \beta$ istnieje $\bar{\alpha} \in (0, \alpha)$, że $|\hat{\varphi}_t - \varphi| < \beta - \bar{\beta}$. Niech $\bar{\alpha}$ spełnia:

$|f(\sigma+t, \hat{\varphi}_t) - f(\sigma, \varphi)| \leq \nu\bar{\beta}$, $|\dot{\varphi}(0) - \dot{\varphi}(t)| \leq \nu\bar{\beta}$

dla $t\in[-\bar{\alpha},0]$. Następnie zdefiniujmy przekształcenie $T: B(\bar{\alpha},\bar{\beta})\to C([-\tau-\bar{\alpha},0],\mathbb{R}^n)$: $(T\xi)_0=0$

(****) $(T\xi)(t-\tau)=A^{-1}(\sigma+t,\hat{\phi}_t)\Big(\int_{-\tau+}^{0} d_\theta\eta(t,\hat{\phi}_t,\theta)\xi_t(\theta)$

$-f(\sigma+t,\hat{\phi}_t)+f(\sigma,\phi)-g(\sigma+t,\hat{\phi}_t,\xi_t)+\dot{\phi}(t)-\dot{\phi}(0)\Big)$, $t\in[\bar{\alpha},0]$

Z założenia $\dot{\phi}(0)=f(\sigma,\phi)$ zatem punkty stałe ξ przekształcenia T w $B(\bar{\alpha},\bar{\beta})$ dają rozwiązanie x równania (*) na $[\sigma-\tau-\alpha,\sigma]$ z $x(\sigma+t)=$ $=\hat{\phi}(t)+\xi(t)$, $t\in[-\bar{\alpha},0]$.

Pokażemy, że T jest kontrakcją na $B(\bar{\alpha},\bar{\beta})$.
Z równania (****) i definicji $\bar{\alpha},\bar{\beta}$:

$|(T\xi)(t-\tau)|\le\nu\bar{\beta}+\nu\bar{\beta}+\nu\bar{\beta}+\nu\bar{\beta}=\bar{\beta}$,

$|(T\xi)(t-\tau)-(T\bar{\xi})(t-\tau)|\le\nu|\xi_t-\bar{\xi}_t|+\nu|(\xi_t-\bar{\xi}_t)|\le\frac{1}{2}|\xi_t-\bar{\xi}_t|$

$\forall t\in[-\alpha,0]$, $\xi,\bar{\xi}\in B(\bar{\alpha},\bar{\beta})$. Zatem T ma jedyny punkt stały w $B(\bar{\alpha},\bar{\beta})$. $\square$

Załóżmy teraz, że spełnione są założenia tw. o istnieniu rozwiązań. Wtedy $\forall(\sigma,\phi)\in\Omega$ istnieje $t_{\sigma,\phi}$ oraz funkcja x, która jest nieprzedłużalnym rozwiązaniem rozwiązaniem równania (1) na $[\sigma-\tau,t_{\sigma,\phi})$ przez (σ,ϕ).
Niech $\Omega_\sigma\subset\mathcal{C}$ będzie zdefiniowane jako $\{\phi\in\mathcal{C}:(\sigma,\phi)\in\Omega\}$. Zdefiniujmy przekształcenie $T(t,\sigma):\Omega_\sigma\to\mathcal{C}$, że $T(t,\sigma)\phi=x_t(\sigma,\phi)$ dla $t\in[\sigma,t_{\sigma,\phi})$, $\phi\in\Omega$. Przekształcenie to nazwiemy mapą rozwiązań równania (1).

<u>Wn.</u> Niech $\Omega\subset\mathbb{R}\times\mathcal{C}$ otwarty i $f:\Omega\to\mathbb{R}^n$ ciągła, $T(t,\sigma):\Omega_\sigma\to\mathcal{C}$, $t\in[\sigma,t_{\sigma,\phi})$ - mapa rozwiązań. Jeśli f jest atomowa w $-\tau$ na Ω, to $T(t,\sigma)$ jest różnowartościowa.

XXVIII) D. Jeśli $T(t,\sigma)$ nie jest różnowartościowa, to istnieją ψ, ϕ, $\psi \neq \phi$, że $x_{t_1}(\sigma,\phi) = x_{t_1}(\sigma,\psi)$ dla pewnego $t_1 > \sigma$ oraz $x_t(\sigma,\phi) \neq x_t(\sigma,\psi)$ dla $\sigma \le t < t_1$. Niech $x = x(\sigma,\phi)$, $y = x(\sigma,\psi)$, to $\dot{x}(t) = f(t,x_t)$ i $\dot{y}(t) = f(t,y_t)$ dla $\sigma \le t \le t_1$. Ponieważ f jest atomowa w $-r$ na Ω, to istnieje $\alpha = \alpha(t_1) > 0$, że istnieje jednoznaczne rozwiązanie równania (1) na $[t_1 - r - \alpha, t_1]$ przez $(t_1, x_{t_1}) = (t_1, y_{t_1})$. Stąd $x_t = y_t$ dla $t_1 - \alpha \le t \le t_1$ - sprzeczne z definicją t_1. □

Rozpatrzymy teraz pewne przykłady.

Niech

$$(L) \qquad \dot{x}(t) = \int_{-r}^{0} d_\theta \eta(t,\theta)\, x(t+\theta) \stackrel{def}{=} L(t,x_t),$$

gdzie $A(t) = \eta(t,-r^+) - \eta(t,-r)$ jest ciągła oraz

$$\left| \int_{-r}^{-r+s} d_\theta \eta(t,\theta)\, \psi(\theta) - A(t)\psi(-r) \right| \le \gamma(t,s) \sup_{-r \le \theta \le -r+s} |\psi(\theta)|$$

dla ciągłej funkcji $\gamma(t,s)$, $t \in \mathbb{R}$, $s \ge 0$, $\gamma(t,0) = 0$. Jeśli $\det A(t) \neq 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$, to $L(t,\phi)$ jest atomowy w $-r$ na $\mathbb{R} \times \mathcal{C}$ i mapa $T(t,\sigma)$ jest różnowartościowa.

Następnie rozpatrzymy równanie niejednorodne

$$(L\text{-}N) \qquad \dot{x}(t) = L(t,x_t) + N(t,x_t) \stackrel{def}{=} F(t,x_t),$$

gdzie L zdefiniowane jak w (L), $N(t,\phi)$ jest ciągła na $\mathbb{R} \times \mathcal{C}$ oraz pochodna $N_\phi(t,\phi)$ jest ciągła i $|N_\phi(t,\phi)| \le \mu(|\phi|)$ na $\mathbb{R} \times \mathcal{C}$, gdzie μ jest funkcją ciągłą, $\mu(0) = 0$. Jeśli $|\det A(t)| \ge a > 0$ na $\mathbb{R}$, to $F(t,\phi)$ jest atomowa w $-r$ na $\mathbb{R} \times U$, gdzie U jest dostatecznie małym otoczeniem 0 w C, co można pokazać stosując metodę opisaną po definicji atomowości funkcji. Zatem znów mapa rozwiązań jest różnowartościowa.

Na koniec rozpatrzmy równanie logistyczne

$$\dot{x}(t) = -\alpha x(t-1)(1+x(t)), \quad \alpha>0.$$

Mamy $f(t,\phi) = -\alpha\phi(-1)(1+\phi(0))$ oraz

$$f_\phi(t,\phi)\psi = -\alpha\psi(-1)(1+\phi(0)) - \alpha\phi(-1)\psi(0) = df(\phi)\psi$$

$$A(t,\phi) = -\alpha(1+\phi(0)) = -A(\phi)$$

Faktycznie, ponieważ $\eta(\theta)$ dla ustalonej ϕ:

$$\eta(0)=0, \quad \eta(\theta) = -\alpha\phi(-1) \quad \theta\in(-1,0),$$

$$\eta(-1) = -\alpha(1+\phi(0)) - \alpha\phi(-1), \quad \text{to}$$

$$-A(\phi) = \eta(-1) - \eta(\theta) = -\alpha(1+\phi(0))$$

~~Uwaga: A nie jest wyznaczone jednoznacznie - może różnić się znakiem w zależności od η.~~

Jeśli $\phi(0)\neq -1$, to f jest atomowa w -1 i mapa $T(t,\sigma)$ jest różnowartościowa dopóki $x(\sigma,\phi)(t)\neq -1$. Ale

$$x(t) = -1 + (1+\phi(0))\, e^{-\int_\sigma^t \alpha x(s-1)\,ds} \quad t\geq\sigma,$$

zatem każde rozwiązanie z $\phi(0)\neq -1$ ma tę własność, że $x(t)\neq -1$.

Na zbiorze $C_{-1} = \{\phi\in C : \phi(0) = -1\}$ mapa nie jest różnowartościowa. Dokładniej $T(t,\sigma)\phi$ jest funkcją stałą równą 1 dla $t\geq\sigma$ oraz $\phi\in C_{-1}$

XXIX/ TEORIA STABILNOŚCI

Przejdziemy teraz do omówienia metod badania stabilności i ograniczoności rozwiązań DDE. W dalszym ciągu rozpatrujemy równanie (1), gdzie $f: \mathbb{R}\times\mathcal{C}\to\mathbb{R}^n$ jest ciągła. Co więcej, zakładamy, że $x(\sigma,\phi)(t)$ jest ciągła względem (σ,ϕ,t) w swojej dziedzinie określoności.
Założenie, że f jest określona na całym $\mathbb{R}\times\mathcal{C}$ można osłabić, $f: (\alpha,\infty)\times\Omega \to \mathbb{R}^n$, $\Omega\subset\mathcal{C}$ otwarte, także jest objęta poniższą teorią. Cały zbiór $\mathbb{R}\times\mathcal{C}$ bierzemy dla uproszczenia notacji.
Będziemy mówić o stabilności rozwiązania trywialnego $x=0$. W ogólnym przypadku definicje można przenieść na dowolne rozwiązanie $y(t)$ równania (1) rozpatrując rozwiązanie $z=0$ równania

$$\dot{z}(t) = f(t, z_t+y_t) - f(t,y_t).$$

Def. Niech $f(t,0)=0$ $\forall t\in\mathbb{R}$. Rozwiązanie $x=0$ równania (1.1) nazwiemy stabilnym, jeśli $\forall \sigma\in\mathbb{R}$ $\forall \varepsilon>0$ $\exists \underset{\delta(\sigma,\varepsilon)}{\delta}>0$ $\forall \phi\in B(0,\delta)$ $x_t(\sigma,\phi)\in B(0,\varepsilon)$ $\forall t\geq\sigma$.
Rozwiązanie $x=0$ nazwiemy asymptotycznie stabilnym, jeśli jest stabilne i $\exists b_0>0$ $\forall \phi\in B(0,b_0)$ $x(\sigma,\phi)(t)\xrightarrow[t\to\infty]{}0$.
Rozwiązanie $x=0$ nazwiemy jednostajnie stabilnym, jeśli $\delta(\sigma,\varepsilon)$ nie zależy od σ, $\delta=\delta(\varepsilon)$.
Rozwiązanie $x=0$ jest jednostajnie asymptotycznie stabilne, jeśli jest jednostajnie stabilne i $\exists b_0$ $\forall \eta>0$ $\exists t_0(\eta)$ $\forall \phi\in B(0,b_0)$ $x_t(\sigma,\phi)\in B(0,\eta)$ dla $t\geq\sigma+t_0(\eta)$ dla dowolnego $\sigma\in\mathbb{R}$.

W przypadku pewnych typów równań stabilność jednostajna jest równoważna stabilności:

<u>Lemat:</u> Jeśli istnieje $\omega > 0$, że $f(t+\omega,\phi) = f(t,\phi)$ $\forall (t,\phi) \in \mathbb{R} \times \mathcal{C}$, to rozwiązanie $x=0$ jest stabilne (asymptotycznie stabilne) $\Leftrightarrow$ jest jednostajnie stabilne (jednostajnie asymptot. stab.)

D. Niech $x=0$ będzie stabilne.

Zauważmy, że $x_{t+\sigma}(\sigma,\phi) = x_{t+\sigma+k\omega}(\sigma+k\omega,\phi)$ $k\in\mathbb{Z}, \forall t \geq 0$, $\sigma\in\mathbb{R}$. Rzeczywiście, po lewej stronie mamy rozwiązanie $x_t(\sigma,\phi)$, $t\geq\sigma$, czyli $x_t(\sigma,\phi)(\theta) = x(t+\theta)$ jest rozwiązaniem (1) i $x_\sigma = \phi$, ale $\dot{x}(t+\theta) = f(t+\theta,\phi) = f(t+\theta+k\omega,\phi) = \dot{x}(t+\theta+k\omega)$ i $x_{\sigma+k\omega} = \phi$. Wobec tego wystarczy wykazać, że $\delta = \delta(\varepsilon)$ dla $\sigma\in[0,\omega]$. Z ciągłej zależności rozwiązania od (σ,ϕ,t) istnieje $\delta_1 \leq \delta$, że $\forall \sigma\in[0,\omega]$ $\phi\in B(0,\delta_1) \Rightarrow x_\omega(\sigma,\phi) \in B(0,\delta(\varepsilon,\omega))$. Jednak dla $\sigma\in[0,\omega]$ i $t\geq 0$ $x_{t+\omega}(\sigma,\phi) = x_{t+\omega}(\omega, x_\omega(\sigma,\phi))$. Zatem jeśli $\phi\in B(0,\delta_1)$, to $x_t(\omega,\phi)\in B(0,\varepsilon)$, $t\geq\omega$.

W dowodzie asymptotycznej stabilności potrzebne są dodatkowe własności, których nie wykazaliśmy, więc dowód pomijamy. $\square$

<u>Def.</u> Rozwiązanie $x(\sigma,\phi)$ równania (1) jest ograniczone, jeśli istnieje $\beta = \beta(\sigma,\phi)$, że $|x(\sigma,\phi)(t)| < \beta(\sigma,\phi)$ $\forall t \geq \sigma - \tau$.

Rozwiązanie x jest jednostajnie ograniczone, jeśli $\forall \alpha > 0$ $\exists \beta = \beta(\alpha)$, że $\forall \sigma\in\mathbb{R}$ $\forall \phi\in\mathcal{C}$ $|\phi| < \alpha \Rightarrow |x(\sigma,\phi)(t)| \leq \beta(\alpha)$ $\forall t \geq \sigma$.

XXX] Rozwiązanie x jest krańcowo ograniczone, jeśli $\exists \beta : \forall (\sigma, \phi) \in \mathbb{R} \times \mathcal{C}\ \exists t_0(\sigma, \phi)$ że $|x(\sigma, \phi)(t)| < \beta$ dla $t \geq \sigma + t_0(\sigma, \phi)$.
Rozwiązanie x jest jednostajnie krańcowo ograniczone, jeśli $\exists \beta : \forall \alpha > 0\ \exists t_0(\alpha) > 0$, że $|x(\sigma, \phi)(t)| \leq \beta$ dla $t \geq \sigma + t_0(\alpha)$ dla wszystkich $\sigma \in \mathbb{R}$ i $\phi \in \mathcal{C}, |\phi| \leq \alpha$.

Omówimy teraz metodę funkcjonałów Lapunowa badania stabilności i ograniczoności rozwiązań. Jeśli $V: \mathbb{R} \times \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ jest ciągłym funkcjonałem i $x(\sigma, \phi)$ jest rozwiązaniem równania (1), to definiujemy górną prawostronną pochodną $V(t, \phi)$ wzdłuż rozwiązania

$$\dot{V}(t, \phi) = \limsup_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \left[V(t+h, x_{t+h}(t, \phi)) - V(t, \phi) \right].$$

Tw. 51. Niech $f: \mathbb{R} \times \mathcal{C} \to \mathbb{R}^n$ przeprowadza zbiory postaci $\mathbb{R} \times \Omega$, $\Omega \subset \mathcal{C}$ ograniczony, w zbiory ograniczone w $\mathbb{R}^n$ i niech $u, v, w : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ będą ciągłymi funkcjami niemalejącymi, $u(s), v(s) > 0$ dla $s > 0$, $u(0) = v(0) = 0$. Jeśli istnieje ciągły funkcjonał $V: \mathbb{R} \times \mathcal{C} \to \mathbb{R}$, że

$$u(|\phi(0)|) \leq V(t, \phi) \leq v(|\phi|),$$
$$\dot{V}(t, \phi) \leq -w(|\phi(0)|),$$

to rozwiązanie $x = 0$ równania (1) jest jednostajnie stabilne. Jeśli $w(s) > 0$ dla $s > 0$, to $x = 0$ jest jednostajnie asymptotycznie stab.

D. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta \in (0, \varepsilon)$, że $v(\delta) < u(\varepsilon)$. Jeśli $\phi \in B(0, \delta)$, $\sigma \in \mathbb{R}$, to $\dot{V}(t, x_t(\sigma, \phi)) \leq 0$ dla $t \geq \sigma$ oraz zachodzą nierówności

$u(|x(\sigma,\phi)(t)|) \le V(t, x_t(\sigma,\phi)) \le V(\sigma,\phi) \le v(\delta) < u(\varepsilon)$ $t \ge \sigma$

Zatem $|x(\sigma,\phi)(t)| < \varepsilon$ dla $t \ge \sigma$ i $|\phi| < \delta < \varepsilon$.

Stąd x jest jednostajnie stabilne.

Jeśli $u(s) \underset{s\to\infty}{\to} \infty$ i $\alpha > 0$ jest dane, to $\exists \beta > 0$, że $u(\beta) = v(\alpha)$. Zatem jeśli $|\phi| \le \alpha$, to $|x(\sigma,\phi)(t)| \le \beta$ dla $t \ge \sigma$, czyli x jest jednostajnie ograniczone.

Niech $\delta_0 = \delta(1)$ będzie stałą dla $\varepsilon = 1$ w jednostajnej stabilności. Chcemy wykazać, że $\forall \varepsilon > 0$ $\exists t_0(\delta_0, \varepsilon) > 0$, że jeśli $|\phi| < \delta_0$, to $|x_t(\sigma,\phi)| < \varepsilon$ dla $t \ge \sigma + t_0(\delta_0, \varepsilon)$. Niech $\delta = \delta(\varepsilon)$ będzie stałą z jednostajnej stabilności. Załóżmy, że rozwiązanie $x(\sigma,\phi)$ z $|\phi| < \delta_0$ spełnia $|x_t| \ge \delta$, $t \ge \sigma$. Wynika stąd, że każdy przedział długości τ zawiera s, że $|x(s)| \ge \delta$. Mamy więc ciąg t_k: $t_k \in (\sigma + (2k-1)\tau, \sigma + 2k\tau)$ $k = 1, 2, \dots$, $|x(t_k)| \ge \delta$.

Z założenia dotyczącego f, skoro x jest jednostajnie ograniczone, to istnieje L, że $|\dot{x}(t)| < L$ $\forall t \ge \sigma$. Wobec tego na przedziałach $t_k - \frac{\delta}{2L} \le t \le t_k + \frac{\delta}{2L}$ musimy mieć $|x(t)| > \frac{\delta}{2}$. Stąd

$$\dot{V}(t, x_t) \le -w\left(\frac{\delta}{2}\right) \quad t \in \left(t_k - \frac{\delta}{2L}, t_k + \frac{\delta}{2L}\right)$$

Wybierając dostatecznie duże L otrzymamy przedziały, które nie przecinają się. Stąd

$$V(t_k, x_{t_k}) - V(\sigma,\phi) \le -w\left(\frac{\delta}{2}\right)\frac{\delta}{L}(k-1).$$

Niech $K(\delta_0, L)$ będzie najmniejszą liczbą całkowitą $K(\delta_0, L) \ge v(\delta_0) / \frac{\delta}{L} w(\frac{\delta}{2})$. Jeśli $k > 1 + K(\delta_0, L)$, to

XXXI/ $V(t_k, x_{t_k}) < v(\delta_0) - w(\frac{\delta}{2})\frac{\delta}{L}\frac{v(\delta_0)}{w(\frac{\delta}{2})\frac{\delta}{L}} \leq 0,$

sprzeczne z założoną dodatnością. Wobec tego dla pewnego $s = s(\sigma, \phi)$: $\sigma \leq s \leq \sigma + 2\tau K(\delta_0, L)$ mamy $|x_s| < \delta$, czyli $|x_t| < \varepsilon$ dla $t \geq \sigma + 2\tau K(\delta_0, L)$. Stąd wynika jednostajna as. stab. $\square$

Skonstruujemy teraz odpowiedni funkcjonał w celu wykorzystania tw. S1 dla równania

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-\tau), \quad \tau > 0,$$

$A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ stałe macierze. Załóżmy, że wartości własne A mają ujemne cz. rzecz. i weźmy dodatnią macierz symetryczną, że $A^TC + CA = -D$, D - dodatnia. Niech E będzie także macierzą dodatnią i

$$V(\phi) = \phi^T(0)C\phi(0) + \int_{-\tau}^{0} \phi^T(\theta)E\phi(\theta)d\theta.$$

Wtedy dla pewnych stałych $\nu, K > 0$ $\nu|\phi(0)|^2 \leq V(\phi) \leq K|\phi|^2$. Mamy też

$$\dot{V}(\phi) = -\phi^T(0)D\phi(0) + 2\phi^T(0)CB\phi(-\tau) + \phi^T(0)E\phi(0) - \phi^T(-\tau)E\phi(-\tau)$$

Rozpatrzmy prawą stronę $\dot{V}$ jako formę kwadratową względem $\phi(0)$ i $\phi(-\tau)$. Spróbujmy wyznaczyć A, B, C oraz E, że macierz

$$\begin{pmatrix} D-E & -\frac{CB+(CB)^T}{2} \\ -\frac{CB+(CB)^T}{2} & E \end{pmatrix}$$

jest dodatnio zdefiniowana. Wiemy, że D i E są dodatnie. Łatwo widzimy, że jeśli $B = 0$, to wystarczy, by $D - E > 0$. Z ciągłej zależności wnioskujemy, że dla małych B macierz jest dodatnia, czyli $x=0$ jest asymptotycznie stabilne.

Dokładniej, niech $E<D$ oraz

$$x^T(D-E)x \geq \lambda|x|^2, \quad x^T E x \geq \mu|x|^2.$$

Wtedy $\dot V(\phi) \leq -\lambda|\phi(0)|^2 + 2\|CB\||\phi(0)||\phi(-\tau)| - \mu|\phi(-\tau)|^2$.

Jeśli $\lambda\mu - \|CB\|^2 > 0$, to $\dot V(\phi) \leq -k(|\phi(0)|^2 + |\phi(-\tau)|^2)$, $\delta > 0$, zatem tw. 51 implikuje stabilność.

Oczywiście szacowania otrzymane w ten sposób nie są optymalne, ale nie ma w nich zależności od τ w sposób jawny. W związku z tym dodatniość macierzy daje nam stabilność rozwiązania $x=0$ dla dowolnego τ.

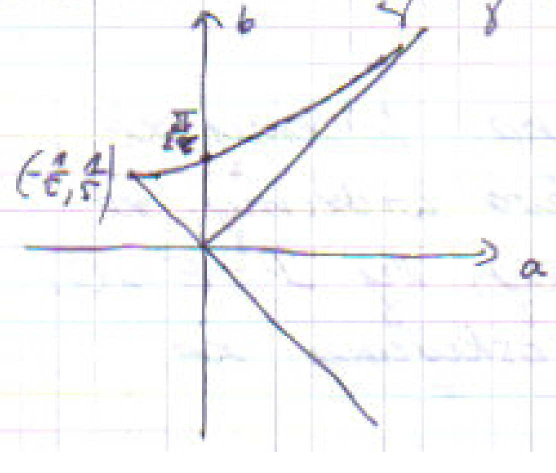
Zauważmy, że w przypadku równania skalarnego $\dot x(t) = ax(t) + bx(t-\tau)$ możemy zdefiniować $V(\phi) = \frac{1}{2}\phi^2(0) + \mu\int_{-\tau}^{0}\phi^2(\theta)d\theta$

$$\dot V(\phi) = -(a-\mu)\phi^2(0) - b\phi(0)\phi(-\tau) - \mu\phi^2(-\tau)$$

i dodatniość macierzy jest równoważna spełnieniu nierówności $a>\mu>0$, $4(a-\mu)\mu > b^2$.

Maksymalny $|b|$ dostajemy dla $\mu = \frac{a}{2}$.

Przy $\mu = \frac{a}{2}$ widzimy, że $x=0$ jest as. stab. dla $|b|<a$. Jest to też obszar, gdzie stabilność nie zależy od τ. Pełny obszar stabilności otrzymujemy badając pierwiastki $\lambda = -a - be^{-\lambda\tau}$.



Jest on zadany parametrycznie jako

$$a = -b\cos\omega\tau$$

$$b\sin\omega\tau = \tau$$

$$0 < \omega < \frac{\pi}{\tau}.$$

XXXII) Przejdziemy teraz do zastosowania funkcjonałów Łapunowa w kontekście niestabilności.

Tw. 52. Niech $x(\sigma,\phi)$ będzie rozwiązaniem równania (1) przechodzącym przez (σ,ϕ). Niech V będzie ciągłym ograniczonym funkcjonałem na $\mathcal{C}$. Jeśli istnieje $\gamma>0$ oraz $\mathcal{U}\subset\mathcal{C}$ otwarty, że:

(1) $V(\phi)>0$ na $\mathcal{U}$, $V(\phi)=0$ na brzegu $\mathcal{U}$,
(2) 0 należy do domknięcia $\mathcal{U}\cap B(0,\gamma)$,
(3) $V(\phi)\le u(|\phi(0)|)$ na $\mathcal{U}\cap B(0,\gamma)$,
(4) $\dot V^* \ge w(|\phi(0)|)$ na $[0,\infty)\times\mathcal{U}\cap B(0,\gamma)$,

gdzie $\dot V^*=\liminf_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\left(V(x_{t+h}(t,\phi))-V(\phi)\right)$, $u(s)$, $w(s)$ są ciągłymi, rosnącymi dodatnimi funkcjami dla $s>0$, to rozwiązanie $x=0$ jest niestabilne. Dokładniej, każde rozwiązanie $x_t(\sigma,\phi)$ dla $\phi\in\mathcal{U}\cap B(0,\gamma)$ osiąga brzeg kuli $B(0,\gamma)$ w skończonym czasie.

D. Niech $\phi\in\mathcal{U}\cap B(0,\gamma)$, $\sigma\in\mathbb{R}$. Wtedy $V(\phi)>0$. Zał. (3) implikuje $|\phi(0)|\ge u^{-1}(V(\phi))$, a z (3) i (4) wynika, że rozwiązanie $x_t=x_t(\sigma,\phi)$ spełnia $|x(t)|\ge u^{-1}(V(x_t))\ge u^{-1}(V(\phi))$ dopóki pozostaje w zbiorze $\mathcal{U}\cap B(0,\gamma)$. Wobec tego

$$\dot V^*(x_t)\ge w(|x(t)|)\ge w(u^{-1}(V(\phi)))>0 \quad x_t\in\mathcal{U}\cap B(0,\gamma)$$

Niech $\eta=w(u^{-1}(V(\phi)))$. Mamy więc

$$V(x_t)\ge V(\phi)+\eta(t-\sigma) \quad \text{o ile } x_t\in\mathcal{U}\cap B(0,\gamma).$$

Z (1) i (4) wynika, że x_t nie może wyjść z $\mathcal{U}\cap B(0,\gamma)$ przez brzeg $\mathcal{U}$. Ponieważ V jest ograniczone na $\mathcal{U}\cap B(0,\gamma)$, to musi istnieć t_1: $x_{t_1}\in B(0,\gamma)$. Zał. (2) implikuje, że w każdym otoczeniu zera znajdziemy ϕ, że $\phi \in \mathcal{U} \cap B(0,\delta)$. Zatem $x=0$ jest niestabilne. $\square$

Zastosujmy to tw. do równania $\dot{x}(t) = -ax(t) - bx(t-\tau)$ z $a+b<0$. Chcemy wykazać, że $x=0$ jest niestabilne dla pewnego τ.

Zdefiniujemy funkcjonał Lapunowa, który może być użyteczny nie tylko w tym konkretnym przypadku, ale także dla innych równań, w tym niekoniecznie liniowych i autonomicznych.

Niech F - funkcja kl. C^1 oraz
$$V(x_t) = \frac{x^2(t)}{2} - \frac{1}{2}\int_{t-\tau}^{t} F(t-u)(x(u)-x(t))^2\,du.$$
Mamy:
$$\dot{V}^*(x_t) = \dot{V}(x_t) = x(t)\cdot\dot{x}(t) + \frac{1}{2}F(\tau)(x(\tau)-x(t))^2$$
$$-\frac{1}{2}\int_{t-\tau}^{t}\dot{F}(t-u)(x(u)-x(t))^2\,du + \int_{t-\tau}^{t}F(t-u)(x(u)-x(t))\dot{x}(t)\,du =$$
$$= \int_{t-\tau}^{t}\Big[-\frac{a+b}{\tau}x^2(t) - \frac{b}{\tau}(x(t-\tau)-x(t))x(t) + \frac{1}{2\tau}F(\tau)(x(t-\tau)-x(t))^2$$
$$-\frac{1}{2}\dot{F}(t-u)(x(u)-x(t))^2 + F(t-u)(x(u)-x(t))\big(-(a+b)x(t)$$
$$-b(x(t-\tau)-x(t))\big)\Big]\,du$$

Potraktujmy wyrażenie podcałkowe jako formę kwadratową zmiennych $x(t)$, $x(t-\tau)-x(t)$, $x(u)-x(t)$.

Macierz tej formy ma postać:
$$\begin{pmatrix} -\frac{(a+b)}{\tau} & -\frac{b}{2\tau} & -\frac{a+b}{2}F(t-u) \\ -\frac{b}{2\tau} & \frac{1}{2\tau}F(\tau) & -\frac{b}{2}F(t-u) \\ -\frac{(a+b)}{2}F(t-u) & -\frac{b}{2}F(t-u) & -\frac{1}{2}\dot{F}(t-u) \end{pmatrix}$$

Forma jest dodatnio określona, jeśli:
$$\Delta_1 = -\frac{a+b}{\tau} > 0 \iff a+b<0$$
$$\Delta_2 = -\frac{a+b}{2\tau^2}F(\tau) - \frac{b^2}{4\tau^2} > 0 \iff 2(a+b)F(\tau) + b^2 < 0$$
$$\Delta_3 = -\frac{1}{2}\dot{F}(\theta)\Delta_2 - \frac{(a+b)^2}{8\tau}F^2(\theta)F(\tau) > 0 \qquad \theta \in [0,\tau]$$

XXXIII/ Jeśli $a+b<0$, to można znaleźć (dodatnią) F kl. C^1 oraz $\tau_0(a,b)$, że dla $0 \le \theta \le \tau < \tau_0(a,b)$ powyższe nierówności są spełnione. Wobec tego istnieje $q>0$, że

$$\dot{V}(\phi) \geq \tau q \phi^2(0), \quad V(\phi) \leq \frac{\phi^2(0)}{2} \quad \forall \phi \in \mathcal{C}.$$

Określamy $\mathcal{U} = \{\phi \in \mathcal{C} : \phi^2(0) > \int_{-\tau}^{0} F(-\theta)(\phi(\theta)-\phi(0))^2 d\theta\}$

Taki zbiór $\mathcal{U}$ spełnia założenia tw. S2, zatem $x=0$ jest niestabilne.

Przejdziemy teraz do zastosowania metody funkcjonałów Lapunowa w przypadku równań autonomicznych. Rozważmy

$$(A1) \quad \dot{x}(t) = f(x_t),$$

$f: \mathcal{C} \to \mathbb{R}^n$ jest pełnociągła i rozwiązania równania (A1) zależą w sposób ciągły od danych początkowych. Oznaczmy $x(\phi)$ rozwiązanie przechodzące przez $(0, \phi)$.

Niech $V: \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ będzie ciągłym funkcjonałem. Zdefiniujmy pochodną V wzdłuż rozwiązania (A1) jako

$$\dot{V}(\phi) = \limsup_{h \to 0^+} \frac{1}{h}\left[V(x_h(\phi)) - V(\phi)\right].$$

<u>Def.</u> Powiemy, że $V: \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ jest funkcjonałem Lapunowa dla równania (A1) na zbiorze $G \subset \mathcal{C}$, jeśli V jest ciągły na $\operatorname{cl} G$ oraz $\dot{V} \leq 0$ na G.

Niech $S = \{\phi \in \operatorname{cl} G : \dot{V}(\phi) = 0\}$

$M \subset S$ – największy podzbiór niezmienniczy względem równania (A1).

<u>Tw. S3.</u> Jeśli V jest funkcjonałem Lapunowa

na G oraz $x_t(\phi)$ jest ograniczonym rozwiązaniem równania (A1) pozostającym w $\mathcal{G}$, to $x_t(\phi) \to M$ przy $t \to \infty$.

D. Jeśli $|x_t(\phi)| < k$, $x_t(\phi) \in \mathcal{G}$ dla $t \geq 0$, to $\{x_t(\phi)\}$ należy do zbioru zwartego w $\mathcal{G}$ i ma niepusty zbiór ω-graniczny $\omega(\gamma^+(\phi))$.
Mamy więc, że $V(x_t(\phi))$ jest nierosnąca, ograniczona z dołu, zatem $V(x_t(\phi)) \to c$ przy $t \to \infty$.
Z ciągłości V na $cl\,\mathcal{G}$ istniejc $\psi \in \omega(\gamma^+(\phi))$, $V(\psi) = c$. Ponieważ zbiór ω-graniczny jest niezmienniczy, to $\dot{V}(\psi) = 0$. Zatem $x_t(\phi) \to M$. □

<u>Tw. S4.</u> Jeśli V jest funkcjonałem Lapunowa na $\mathcal{U}_l = \{\phi \in \mathcal{C} : V(\phi) < l\}$ i istnieje stała $K = K(l)$, że $\phi \in \mathcal{U}_l \Rightarrow |\phi(0)| < K$, to każde rozwiązanie $x_t(\phi)$ dla $\phi \in \mathcal{U}_l$ zbiega do M przy $t \to \infty$.

D. Jeśli $\phi \in \mathcal{U}_l$ i $\dot{V} \leq 0$ na $\mathcal{U}_l$, to $x_t(\phi) \in \mathcal{U}_l$ dla $t \geq 0$. Mamy więc $|x(\phi)(t)| < K$ dla $t \geq 0$, czyli rozwiązanie jest ograniczone. Na podstawie tw. S3 wnioskujemy stabilność. □

<u>Wniosek W5:</u> Niech $V: \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ ciągły i istnieją nieujemne funkcje $a(s)$, $b(s)$, $a(s) \xrightarrow[s \to \infty]{} \infty$,

$$a(|\phi(0)|) \leq V(\phi), \quad \dot{V}(\phi) \leq -b(|\phi(0)|).$$

Wtedy rozwiązanie $x=0$ równania (A1) jest stabilne i każde rozwiązanie jest ograniczone. Jeśli funkcja $b(s)$ jest dodatnia dla $s > 0$, to każde rozwiązanie zbiega do 0 przy $t \to \infty$.

D. Pierwsza część wynika bezpośrednio z tw. S4.

XXXIV) Jeśli b jest dodatnia, to warunki tw. 54 są spełnione dla dowolnego l.
Co więcej $S = \{\phi : \phi(0) = 0\}$ i $M = \{0\}$. $\square$

Tw. 55. o niestabilności

Niech $0 \in cl\,\mathcal{U}$, $\mathcal{U} \subset \mathcal{C}$ otwarty, $\mathcal{N} \subset \mathcal{C}$ - otwarte otoczenie 0 w $\mathcal{C}$. Załóżmy, że

(1) V jest funkcjonałem Lapunowa na $\mathcal{G} = \mathcal{N} \cap \mathcal{U}$,

(2) $M \cap \mathcal{G}$ jest albo pusty, albo składa się tylko z 0,

(3) $V(\phi) < \eta$ na $\mathcal{G}$ dla $\phi \neq 0$,

(4) $V(0) = \eta$ oraz $V(\phi) = \eta$ na $\partial\mathcal{G} \cap \mathcal{N}$.

Jeśli $\mathcal{N}_0$ jest ograniczonym otoczeniem 0 zawartym w sposób właściwy w $\mathcal{N}$, to $\phi \neq 0$ w $\mathcal{G} \cap \mathcal{N}_0$ implikuje, że istnieje takie t, że $x_t \in \partial\mathcal{N}_0$.

D. Jeśli $\phi \in \mathcal{G} \cap \mathcal{N}_0$, $\phi \neq 0$, to $V(x_t(\phi)) \leq V(\phi) < \eta$ dla $t \geq 0$ dopóki x_t pozostaje w $\mathcal{N}_0 \cap \mathcal{G}$.
Jeśli $x_t(\phi) \in \mathcal{N}_0 \cap \mathcal{G}$ $\forall t \geq 0$, to zbiór ω-graniczny $\omega(\gamma^+(\phi)) \in \mathcal{N}_0 \cap \mathcal{G}$ i jest to zbiór niezmienniczy. Stąd (2) gwarantuje, że $\omega(\gamma^+(\phi)) = \{0\}$. Ale $V(0) = \eta$ - sprzeczność.
Zatem $\exists t > 0$: $x_t(\phi) \in \partial(\mathcal{N}_0 \cap \mathcal{G})$.
Z (4) wynika, że $x_t(\phi) \in \partial\mathcal{N}_0$. $\square$

Rozpatrzmy następujący przykład zastosowania tw. 55. Niech $\dot{x}(t) = ax^3(t) + bx^3(t-r)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Niech

$$V(\phi) = -\frac{\phi^4(0)}{2a} + \int_{-r}^{0} \phi^6(\theta)\,d\theta \implies$$

$$\dot{V}(\phi) = -\left(\phi^6(0) + \frac{2b}{a}\phi^3(0)\phi^3(-r) + \phi^6(-r)\right).$$

Stąd V jest funkcjonałem Lapunowa na $\mathcal{C}$ dla $|b| \le |a|$. Jeśli $a<0$, to $V(\varphi) \ge \frac{\varphi^4(0)}{2|a|}$ i wniosek WS implikuje, że $x=0$ jest stabilne i każde rozwiązanie jest ograniczone. $M=\{0\}$, x - as. stab.

Jeśli $a<0$, $b=a$, to $S=\{\varphi : \varphi(0)=-\varphi(-r)\}$. Zatem zbiór M tworzymy z funkcji początkowych dla rozwiązań spełniających $x(t)=-x(t-r)$ dla dowolnego $t\in\mathbb{R}$, zatem $\dot{x}(t)=0 \Rightarrow x(t)=c$. Ale $x(t)=-x(t-r) \Rightarrow c=0$, zatem $x=0$ jest glob. as. stab.

Jeśli $a<0$, $b=-a$, to $S=\{\varphi : \varphi(0)=\varphi(-r)\}$. Wobec tego M jest zbiorem funkcji stałych. Niech $\varphi\in\mathcal{C}$ i $V(x_t(\varphi)) \to c$ przy $t\to\infty$. Wtedy $\omega(\varphi)\in V^{-1}(c)\cap M$. Ponieważ $V(\alpha)$ jest wielomianem szóstego stopnia dla funkcji stałej, więc $V^{-1}(c)\cap M$ składa się ze skończonej liczby funkcji stałych. Ze spójności $\omega(\varphi)$ wnioskujemy, że $\omega(\varphi)$ jest jednopunktowy, więc każde rozwiązanie zbiega do stałej.

Jeśli $a>0$, $|b|<a$ (lub $b=a$), to $G=\{\varphi : V(\varphi)<0\}$ jest niepusty i dodatnio niezmienniczy. Jak wcześniej, $M=\{0\}$. Zatem tw. 55 implikuje niestabilność.

Omówimy teraz pokrótce kilka bardziej skomplikowanych przykładów.

(P1) $\dot{x}(t)=a(t)x(t)-b(t)x(t-r)$, a, b - ograniczone funkcje ciągłe, $a(t)\ge\delta>0$ $\forall t$.

Niech $V(\varphi)=\frac{1}{2}\varphi^2(0)+\frac{\delta}{2}\int_{-r}^{0}\varphi^2(\theta)\,d\theta$

XXXV] Mamy $\dot V(\phi) = -(a-\frac{\delta}{2})\phi^2(0) - b\phi(0)\phi(-\tau) - \frac{\delta}{2}\phi^2(-\tau)$,
zatem jeśli $(2a(t)-\delta)\delta > b^2(t)$ $\forall t$, to $x=0$ jest jednostajnie asymptotycznie stabilne.
W szczególności, jeśli $|b(t)| < \delta$ $\forall t \in \mathbb{R}$, to $x=0$ jest jedn. as. stab.
Co więcej, τ nie musi być stałe w tym przykładzie. Niech $\tau = \tau(t)$ będzie ograniczoną funkcją kl. C^1. Zróżniczkujmy V względem t wzdłuż rozwiązania.

$$\dot V(x_t) = x(t)\cdot \dot x(t) + \frac{\delta}{2}\left(x^2(t) - x^2(t-\tau)(1-\dot\tau(t))\right) =$$
$$= -ax^2(t) - bx(t)x(t-\tau) + \frac{\delta}{2}x^2(t) - \frac{\delta}{2}(1-\dot\tau(t))x^2(t-$$
$$= -(a - \frac{\delta}{2})x^2(t) - bx(t)x(t-\tau) - \frac{\delta}{2}(1-\dot\tau(t))x^2(t-\tau)$$

Macierz $\begin{pmatrix} a-\frac{\delta}{2} & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & \frac{\delta}{2}(1-\dot\tau(t)) \end{pmatrix}$ jest dodatnio określona jeśli $a > \frac{\delta}{2}$ oraz $(a-\frac{\delta}{2})(\frac{\delta}{2}(1-\dot\tau(t))) > \frac{b^2}{4}$.
Skoro $a > \frac{\delta}{2}$, to musi być $1-\dot\tau(t) > 0$, czyli $\dot\tau < 1$.

(P2.) Pokażemy teraz, że dla równania
$$\dot x(t) = -ax(t) - bx(t-\tau)$$
można zdefiniować funkcjonał Lapunowa, który dokładniej wyznacza obszar stabilności. Niech $\alpha, \beta : [-\tau, 0] \to \mathbb{R}$, $\gamma : [-\tau,0]\times[-\tau,0] \to \mathbb{R}$ są kl. C^1,
$$V(\phi) = \phi^2(0) + 2\phi(0)\int_{-\tau}^{0}\alpha(\theta)\phi(\theta)\,d\theta + \int_{-\tau}^{0}\beta(\theta)\phi^2(\theta)\,d\theta + \int_{-\tau}^{0}\int_{-\tau}^{0}\phi(\xi)\phi(\eta)\gamma(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta.$$
Udowodnimy teraz następujący lemat.

Lem. Jeśli istnieją α, β, γ i H – forma kwadratowa dodatnio zdefiniowana, że $\dot V(\phi) = -H(\phi)$ $\forall \phi \in C$, wtedy równanie charakterystyczne

$\lambda + a + be^{-\lambda r} = 0$ nie ma pierwiastków na osi urojonej. Co więcej, jeśli $V > 0$, to wszystkie wartości własne mają cz. rzeczywiste ujemne. Prawdziwa jest także implikacja odwrotna.

D. Załóżmy, że istnieje takie H oraz pierwiastek na osi urojonej. Wtedy istnieje rozwiązanie okresowe, $x_t \neq 0$. Zatem $V(x_t)$ jest funkcją okresową i $\dot{V}(x_t) = -H(x_t) < 0$ $\forall t$ – sprzeczność.

Niech $V > 0$. Jeśli jakieś wartości własne mają cz. rzeczywist dodatnie, to istnieje x, dla którego $V(x_t)$ jest nieograniczone, co jest sprzeczne z $0 < V(x_t) < V(\phi)$ dla $t \geq 0$.

Jeśli nie ma pierwiastków o cz. rzecz. dodatnich i V nie jest dodatnie, to mamy ϕ, że $V(\phi) \leq 0$ i rozwiązanie $x(\phi)$ spełnia $x_t \neq 0$ dla $t \in [0, \varepsilon)$ dla ε dost. małego. Stąd $V(x_t) < 0$, $t \in (0, \varepsilon)$. Stąd istnieje $\psi \neq 0$, że $V(\psi) < 0$, co daje sprzeczność z tw. 55. □

Pozostaje oczywiście problem wyznaczenia odpowiednich α, β, δ, H. Można to zrobić w następujący sposób – najpierw przybliżyć równanie układem skończenie wymiarowym, dla którego znane są metody wyznaczania funkcjonału Lapunowa, a następnie przejść do granicy, by otrzymać odpowiedni funkcjonał dla równania wyjściowego.

XXXVI/ Załóżmy dla uproszczenia, że $\tau = 1$.

Ustalmy $\phi \in C$, $N \in \mathbb{N}$ oraz $h = \frac{1}{N}$. Przybliżamy pochodną za pomocą ilorazu różnicowego i dostajemy równanie różnicowe

$$(R) \quad x(t+h) = (1-ah)x(t) - bhx(t-Nh).$$

Punkt $x^0 = (\phi(0), \phi(-h), \dots, \phi(-Nh)) \in \mathbb{R}^{N+1}$ odpowiada warunkowi początkowemu $x_0 = \phi$.

Zdefiniujmy ciąg

$$x^k = (x(kh), x(kh-h), \dots, x(kh-Nh)) \in \mathbb{R}^{N+1}, \ k \geq 0$$

Wektor x^k jest warunkiem początkowym dla równania (R) w chwili $t = kh$. Dla małych h ciąg x^k powinien stanowić sensowną aproksymację rozwiązania $x(\phi)$ w punktach $(x(\phi)(kh), \dots, x(\phi)(kh-1))$.

Równanie (R) definiuje przekształcenie liniowe

$$A: \mathbb{R}^{N+1} \to \mathbb{R}^{N+1}, \quad x^{k+1} = Ax^k, \text{ gdzie}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1-ah & d \\ e_1^T & L \end{bmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 1 & & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$e_1 = [1, 0 \dots 0]$, $d = [0 \dots 0, -bh]$.

Wartości własne równania (R) spełniają

$$N(\lambda - 1) + a + b\lambda^{-N} = 0.$$

Niech $\lambda = \exp(\frac{\mu}{N} + o(\frac{1}{N}))$ i $N \to \infty$. Wtedy μ spełnia równanie charakt. $\mu + a + be^{-\mu} = 0$.

Zatem jeśli $\mathrm{Re}\,\mu < 0$, to $|\lambda| < 1$ dla d.d. N.

Wobec tego funkcja Lapunowa dla (R) powinna pomóc w wyznaczeniu funkcjonału Lapunowa dla równania wyjściowego.

Niech W będzie macierzą symetryczną $(N+1)\times(N+1)$

$$W = \begin{pmatrix} \sigma & s \\ s^T & Q \end{pmatrix}, \ \sigma \in \mathbb{R}, \ s \in \mathbb{R}^N.$$

Jeśli $W_0(x) = x^T W x$ jest formą kwadratową na $\mathbb{R}^{N+1}$, to $\Delta W_0(x^k) = W_0(x^{k+1}) - W_0(x^k)$ spełnia $\Delta W_0(x) = x^T(A^T W A - W)x$.
Naszym celem jest takie zdefiniowanie tej formy, by W_0 było dodatnie, a $\Delta W_0(x)$ – ujemne.
Najprościej zdefiniować W_0, że wszystkie, poza diagonalą, wyrazy $A^T W A - W$ są zerowe.
Wtedy $\quad q_{ij} = q_{ji} = q_{i-1,j-1} \quad i \neq j \quad Q = (q_{ij})$

$$(1-ah)s_i - s_{i-1} + q_{1,i} = 0 \quad i = 2, \dots, N$$
$$-bh\sigma(1-ah) - s_N - bhs_1 = 0$$
$$-bhs_i - q_{1,N+2-i} = 0 \quad i = 2, \dots, N.$$

Stąd Q ma postać

$$Q = \begin{pmatrix} k_1 & p_2 & \dots & p_N \\ p_2 & k_2 & \dots & p_{N-1} \\ & & \ddots & p_{N-2} \\ & & & \vdots \\ p_N & p_{N-1} & \dots & k_N \end{pmatrix}$$

z $k_1, \dots, k_N$ – dowolne stałe oraz $p_j = -bh\, s_{N+2-j}$ $j = 2..N$

Z kolei s_j wyznaczamy z zależności

$$(*_s) \quad \begin{aligned} \frac{s_{j-1} - s_j}{h} &= -as_j - bs_{N+2-j} \quad j = 2..N \\ s_N + bhs_1 &= -bh\sigma(1-ah), \end{aligned}$$

przy czym w dalszym ciągu trzeba wyznaczyć σ.
Skoro chodzi o to, by W_0 i $\Delta W_0/h$ aproksymowały funkcjonał Lapunowa i jego pochodną i miały sens przy $h \to 0$, to biorąc $\sigma = N$ oraz $\tilde{W}_0 = W_0/N$ dostaniemy, co trzeba.
Co więcej, dla $x = [\phi(0), \phi(-h), \dots, \phi(-Nh)]$

$$\tilde{W}_0 x = \phi^2(0) + 2\phi(0)\sum_{i=1}^{N} s_i \phi(-ih)h + \sum_{i=1}^{N} k_i \phi^2(-ih)h - b\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \phi(-ih)\phi(-jh)\, s_{N+1-|i-j|}\, h^2$$

oraz

XXXVII/ $$\frac{\Delta \tilde{W}_0 x}{h} = \phi^2(0)(-2a + k_1 + 2s_1 + a^2 h - 2ah)$$
$$+\phi^2(-1)(-k_N + b^2 h) - \sum_{i=1}^{N} \frac{k_i - k_{i+1}}{h} \phi^2(-ih)h,$$
gdzie s_i spełniają $(*_s)$ z $\delta = N = h^{-1}$, przy czym podwójna suma $\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=N}^{N}$ nie zawiera składnika z $i=j$.

Biorąc formalnie granicę przy $h \to 0$ otrzymujemy funkcjonał na C:
$$V(\phi) = \phi^2(0) + 2\phi(0) \int_{-1}^{0} s(\theta)\phi(\theta)d\theta + \int_{-1}^{0} k(\theta)\phi^2(\theta)d\theta$$
$$-b \int_{-1}^{0}\int_{-1}^{0} \phi(\xi)\phi(\eta) s(|\xi - \eta| - 1)\, d\xi\, d\eta,$$
$$\dot V(\phi) = \phi^2(0)(-2a + k(0) + 2s(0)) - \phi^2(-1)k(-1) - \int_{-1}^{0} \dot k(\theta)\phi^2(\theta)d\theta$$
Ponadto funkcja s z zależności $(*_s)$ spełnia
$$(**_s) \quad \begin{aligned} \dot s(\theta) &= -a s(\theta) - b s(-1-\theta) \quad \theta \in [-1, 0] \\ s(-1) &= -b. \end{aligned}$$
Niech s będzie funkcją spełniającą $(**_s)$ oraz k - dowolną funkcją kl. C^1. Wtedy $\dot V$ jest pochodną V wzdłuż rozwiązania naszego równania wyjściowego. Chcemy teraz zastosować udowodniony Lemat do funkcjonału V.

Załóżmy, że równanie $(**_s)$ ma rozwiązanie spełniające $a > s(0)$.

Istnieje taka funkcja k, że $k(\theta) > 0$, $\dot k(\theta) > 0$ i $\dot V(\phi) < 0$ $\forall \phi \neq 0$. Z lematu wynika, że wtedy nie ma wartości własnych na osi urojonej. Jeśli pokażemy, że znajdujemy się w obszarze stabilności (niestabilności), to $V > 0$ (V nieokreślone), ~~to~~ więc [redacted] V pozostaje dodatnie (nieokreślone) tak długo, jak długo istnieje

odpowiednie s.
Jeśli istnieje rozwiązanie $(**_s)$, że
$$a - s(0) < 0$$
i zdefiniujemy $V_0 = -V$, to istnieje funkcja k, że $k(-1) = 0$, $\dot{k}(\theta) < 0$ i $2a - 2s(0) - k(0) < 0$, czyli $\dot{V}_0 < 0$. Podobne jak poprzednio rozumowanie prowadzi do zbadania stabilności (niestabilności) w danym obszarze.
Musimy na koniec przeanalizować istnienie rozwiązań równania $(**_s)$. Równanie to jest równoważne następującemu zagadnieniu
$$\ddot{q}(\theta) + (b^2 - a^2) q(\theta) = 0,$$
$$q(-1) = 1, \quad \dot{q}(0) + a q(0) = -b, \quad s = -bq.$$
Jeśli $a^2 \neq b^2$, $\lambda = \sqrt{a^2 - b^2}$, $(\lambda + a)e^{\lambda} - b \neq 0$, to
$$q(\theta) = \frac{1}{2}\left(e^{\lambda(\theta+1)} + e^{-\lambda(\theta+1)}\right) - \frac{(\lambda+a)e^{\lambda} + b}{(\lambda+a)e^{\lambda} - b}\left(\frac{1}{2}\right)\left(e^{\lambda(\theta+1)} - e^{-\lambda(\theta+1)}\right).$$
Jeśli $a^2 = b^2$ i $a \neq -1$, to
$$q(\theta) = \frac{1-b}{1+a} - \frac{b+a}{1+a}\theta \qquad \theta \in [-1, 0].$$
Wyznaczmy zbiór, na którym $a - s(0) \neq 0$.
$\Gamma_+ = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : a > 0, a^2 > b^2\}$, $\Gamma_- = \{(a,b) : a < 0, a^2 > b^2\}$, $\Gamma = \Gamma_+ \cup \Gamma_-$. Jeśli $(a,b) \in \Gamma$, $b = ka$, $|k| < 1$ i $\lambda = |a|\sqrt{1-k^2}$, to $a + s(0) = \frac{\lambda((a+b)e^{-\lambda} + \lambda)}{\lambda + a - be^{-\lambda}}$ oraz $a - s(0) \neq 0$ w Γ, jeśli $1 + ke^{-\lambda} + \operatorname{sign} a \sqrt{1-k^2} \neq 0$.
To wyrażenie jest stale niezerowe dla $|k| < 1$.
Zatem punkty $(a,b) = (a, ka)$, $|k| < 1$ muszą leżeć albo w obszarze stabilności, albo w obszarze niestabilności. Dla $b = 0$ $\overline{a>0}$ mamy stabilność, to Γ_+ jest w obsz. stab.
Jeśli $a^2 = b^2$, $a = -1$, to $a - s(0) = \frac{a+b}{1+a} \neq 0$ $a \neq -b$.
Stąd półprosta $a = b$, $a > 0$ leży w obszarze asymptotycznej stabilności, gdyż nie może

XXXVIII) Brak czysto urojonych wartości własnych i punkty $a^2=b^2$, $a>0$ leżą na brzegu Γ_+.
Z kolei w Γ_- mamy niestabilność, gdyż dla $b=0$, $a<0$ jest niestabilność.
Jeśli $a^2<b^2$, to $\lambda=\pm i\omega$, $\omega=\sqrt{b^2-a^2}$, a takie możemy zapisać q w postaci

$$q(\theta)=\cos\omega(\theta+1)+\frac{\sin(\omega-\xi)}{1+\cos(\omega-\xi)}\sin\omega(\theta+1),$$

gdzie ξ spełnia $a+b\cos\xi=0$, $0\le\xi\le\pi$.
Mamy $a-s(0)=-\frac{\omega\sin(\omega-\xi)}{1+\cos(\omega-\xi)}$,
więc $a-s(0)\neq 0 \iff \sin(\omega-\xi)\neq 0$,
$\omega=(b^2-a^2)^{\frac{1}{2}}=b\sin\xi$. Taka krzywa jest zadana parametrycznie przez $a=-b\cos\xi$,
$b\sin\xi=\xi$, $0\le\xi\le\pi$, zatem w taki sam sposób jak analizując równanie charakterystyczne.
Pozostaje przedyskutować obszar $b^2>a^2$.
Zauważmy, że półprosta $a=0$, $b>\frac{\pi}{2}$, $a=0$, $b<0$ są w rejonach niestabilności, więc możemy zastosować argumenty j.w.

(P3) Niech $\dot{x}(t)=a(t)x^3(t)+b(t)x^3(t-\tau)$,
gdzie a,b ciągłe, ograniczone, $a(t)\ge\sigma>0$, $|b(t)|\le q\sigma$, $q\in(0,1)$. Niech

$$V(\phi)=\frac{\phi^4(0)}{2}-\frac{\sigma}{2}\int_{-\tau}^{0}\phi^6(\theta)\,d\theta$$

biorąc $\mathcal{U}=\{\phi\in\mathcal{C}:\ \phi^4(0)>\frac{\sigma}{2}\int_{-\tau}^{0}\phi^6(\theta)\,d\theta\}$
pokażemy, że $x=0$ jest niestabilne.
Z kolei dla $a(t)\le-\sigma<0$, $|b(t)|\le q\sigma$ definiujemy $V(\phi)=\frac{\phi^4(0)}{2}+\frac{\sigma}{2}\int_{-\tau}^{0}\phi^6(\theta)\,d\theta$
i pokażemy, że $x=0$ jest jednostajnie as. stab.

W przypadku autonomicznym $a, b = const$, $a \neq 0$
Zdefiniujmy najpierw $V(\phi) = -\frac{\phi^4(0)}{2a} + \int_{-\tau}^{0} \phi^6(\theta)d\theta$.
Wtedy $\dot{V}(\phi) = -\left(\phi^6(0) + 2\frac{b}{a}\phi^3(0)\phi^3(-\tau) + \phi^6(-\tau)\right)$.
Zatem jeśli $|b| \leq |a|$, to V jest f. Lap. na $\mathcal{C}$.
Jeśli $a < 0$, to $V(\phi) \geq \frac{\phi^4(0)}{2|a|}$, więc $x = 0$ jest stabilne i każde rozwiązanie jest ograniczone.
Jeśli $a < 0$ i $|b| < |a|$, to $S = \{\phi \in \mathcal{C} : \phi(0) = \phi(-\tau) = 0\}$, czyli $M = \{0\}$, skąd mamy glob. as. stab.
Jeśli $a < 0$ i $b = a$, to $S = \{\phi \in \mathcal{C} : \phi(0) = -\phi(-\tau)\}$.
Zatem M to zbiór funkcji początkowych, że rozwiązania spełniają $x(t) = -x(t-\tau)$ $\forall t \in \mathbb{R}$, czyli $\dot{x}(t) = 0 \Rightarrow x(t) = c$, ale $c = -c \Rightarrow c = 0$, czyli znów $M = \{0\}$ i $x = 0$ jest glob. as. stab.
Jeśli $a < 0$ i $b = -a$, to $S = \{\phi \in \mathcal{C} : \phi(0) = \phi(-\tau)\}$.
Stąd mamy $M = \{$zbiór funkcji stałych$\}$. Załóżmy, że $V(x_t(\phi)) \xrightarrow[t \to \infty]{} c$. Wtedy $\omega(\phi) \subset V^{-1}(c) \cap M$, a ten zbiór składa się ze skończonej liczby funkcji stałych.

R) Rozpatrzmy $\dot{x}(t) = -\int_{-\tau}^{0} a(-\theta) g(x(t+\theta))d\theta = -\int_{t-\tau}^{t} a(t-u) g(x(u))du$ dla:
$a(s) \geq 0$, $\dot{a}(\tau) = 0$, $\dot{a}(s) \leq 0$, $\ddot{a}(s) \geq 0$ $s \in [0, \tau]$
$G(x) = \int_0^x g(s)ds \to \infty$ przy $|x| \to \infty$
Zauważmy, że $\ddot{x}(t) + a(0)g(x(t)) = -\int_{t-\tau}^{t} \dot{a}(t-u)g(x(u))du = -\dot{a}(\tau)\cdot\int_{-\tau}^{0} g(x(t+\theta))d\theta + \int_{-\tau}^{0} \ddot{a}(-\theta)\left(\int_{\theta}^{0} g(x(t+u))du\right)d\theta$
Definiujemy $V(\phi) = G(\phi(0)) - \frac{1}{2}\int_{-\tau}^{0} \dot{a}(-\theta)\left[\int_{\theta}^{0} g(\phi(u))du\right]^2 d\theta$
Mamy $\dot{V}(\phi) = \frac{1}{2}\dot{a}(\tau)\left(-\int_{-\tau}^{0} g(\phi(\theta))d\theta\right)^2 - \frac{1}{2}\int_{-\tau}^{0} \ddot{a}(-\theta)\left(\int_{-\theta}^{0} g(\phi(u))du\right)^2 d\theta \leq 0 \Rightarrow$ rozwiązania są ograniczone.

XXXIX) Liniowe układy autonomiczne.

Rozpatrzymy teraz szczególny przypadek równań postaci

$$(L1) \qquad \dot{x}(t) = L(x_t)$$

$L: \mathcal{C} \to \mathbb{R}^n$ jest operatorem liniowym ciągłym. Istnieje więc funkcja macierzowa $\eta(\theta)$, $\theta \in [-\tau, 0]$ o ograniczonej wariacji (wahaniu), że

$$L(\phi) = \int_{-\tau}^{0} (d\eta(\theta))\phi(\theta) \quad \phi \in \mathcal{C}.$$

Niech $\phi \in \mathcal{C}$ i $x(\phi)$ jest jednoznacznym rozwiązaniem przechodzącym przez $(0, \phi)$. Definiujemy operator rozwiązania jako

$$T(t)\phi = x_t(\phi).$$

<u>Lemat.</u> Operator $T(t)$, $t \geq 0$, ma następujące własności:

(i) Rodzina $\{T(t), t \geq 0\}$ jest półgrupą przekształceń liniowych.

(ii) $T(t)$ jest ograniczone dla $t \geq 0$, $T(0) = \mathbb{I}$, $T(t)$ jest mocno ciągłe na $[0, \infty)$, tzn.

$$\lim_{s \to t} |T(t)\phi - T(s)\phi| = 0 \quad \text{dla } t \geq 0, \phi \in \mathcal{C}.$$

(iii) $T(t)$ jest zwarty (całkowicie ciągły) dla $t \geq \tau$, tzn. $T(t)$ jest ciągły i przeprowadza zbiory ograniczone na zbiory zwarte po domknięciu.

D. (i) Liniowość $T_t(a\phi + \psi) = x_t(a\phi + \psi)$

$$\dot{x}(a\phi + \psi)(t) = L(x_t(a\phi + \psi)) = \int_{-\tau}^{0} d\eta(\theta)\, x_t(a\phi + \psi)(\theta) = \int_{-\tau}^{0} d\eta(\theta)\, x(a\phi + \psi)(t + \theta)$$

Niech $x_t(\phi)$, $x_t(\psi)$ - rozwiązania z war. pocz. $(0, \phi)$, $(0, \psi)$, czyli $\dot{x}(\phi)(t) = L(x_t(\phi))$ i $\dot{x}(\psi)(t) = L(x_t(\psi))$, zatem $a\dot{x}(\phi)(t) + \dot{x}(\psi)(t) = a L(x_t(\phi)) + L(x_t(\psi)) = L(a x_t(\phi) + x_t(\psi))$.

Niech $y(t) = ax(\phi)(t) + x(\psi)(t)$. Wtedy $y_0 = ax_0(\phi) + x_0(\psi) = a\phi + \psi$, czyli $\dot{y}(t) = L(y_t)$ daje rozwiązanie przechodzące przez $(0, a\phi+\psi)$. Z jednoznaczności rozwiązań dostajemy liniowość operatora $T(t)$, bo $y(t) = x(a\phi+\psi)(t)$.

$T(t)$ jest półgrupą, gdyż $T(0)(\phi) = x_0(\phi) = \phi = \mathbb{I}$ oraz $T(t)T(s) = T(t+s)$.

Faktycznie $T(t)T(s)\phi = T(t)x_s(\phi) = x_t(x_s(\phi))$
$T(t+s)(\phi) = x_{t+s}(\phi) \qquad t, s \geq 0$.

Zauważmy, że dla $t=0$ mamy $T(0)T(s)\phi = = x_0(x_s(\phi)) = x_s(\phi)$ oraz $T(0+s)\phi = x_s(\phi)$, zatem jest to rozwiązanie, które przechodzi przez ten sam punkt, więc z jednoznaczności dostajemy wymaganą równość.

(ii) Ponieważ L jest liniowy i ciągły, to istnieje l, że $|L(\phi)| \leq l|\phi|$, $\phi \in \mathcal{C}$.

Z definicji T mamy

$$(T(t)\phi)(\theta) = \phi(t+\theta) \qquad t+\theta \leq 0$$

$$T(t)\phi(\theta) = \phi(0) + \int_0^{t+\theta} L(T(s)\phi)\,ds \quad t+\theta > 0.$$

Zatem $|T(t)\phi| \leq |\phi| + \int_0^t l|T(s)\phi|\,ds$, a z lematu Gronwalla:

$$|T(t)\phi| \leq e^{lt}|\phi| \qquad t \geq 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{C}$$

Stąd mamy, że $T(t)$ jest ograniczony.

Z własności półgrupy wystarczy więc, że $\lim_{t\to 0^+} |T(t)\phi - \phi| = 0$, aby otrzymać mocną ciągłość na $[0, \infty)$.

Ale $|T(t)\phi(\theta) - \phi(\theta)| = \begin{cases} |\phi(t+\theta) - \phi(\theta)|, & t+\theta \leq 0 \\ \left|\phi(0) + \int_0^{t+\theta} L(T(s)\phi)\,ds - \phi(\theta)\right|, & t+\theta > 0 \end{cases}$

XL) Ponieważ ϕ jest jednostajnie ciągła, to

$\forall \varepsilon\ \exists \delta\ \forall t, \theta\ \ \underset{\theta\in[-\tau,0]\ \ t+\theta\le 0}{0<t<\delta} \Rightarrow |\phi(t+\theta)-\phi(\theta)|<\varepsilon$

analogicznie $|\phi(0)-\phi(\theta)|<\varepsilon$ dla $t+\theta>0$, czyli $\theta>-t>-\delta$.

Mamy też $\left|\int_0^{t+\theta} L(T(s)\phi)\,ds\right| \le t\cdot l e^{lt}|\phi| < \varepsilon$ dla d.m. t. Zatem $|T(t)\phi-\phi|<\varepsilon$, czyli $\lim_{t\to 0^+}|T(t)\phi-\phi|=0$.

(iii) Niech $S=\{\phi\in \mathcal{C}: |\phi|\le R\}$. Wtedy $\forall \psi\in T(t)S$, $t\ge\tau$, zachodzi $|\psi|\le e^{lt}R$, czyli $|\dot\psi|\le l e^{lt}R$.

Mamy więc funkcje jednostajnie ograniczone o tej samej stałej Lipschitza, zatem $T(t)S$ dla $t\ge\tau$ należy do zbioru zwartego w S. $\square$

Jeśli $\{T(t), t\ge 0\}$ jest mocno ciągłą półgrupą operatorów liniowych to generator infinitezymalny A półgrupy $T(t)$ definiujemy jako

$$A\phi=\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}\left(T(t)\phi-\phi\right)$$

o ile granica istnieje (oczywiście rozumiana jako zbieżność w normie $\mathcal{C}$).

Wyznaczmy generator naszej półgrupy.

$\forall\theta\in[-\tau,0)$ mamy $T(t)\phi(\theta)-\phi(\theta)=\phi(t+\theta)-\phi(\theta)$

czyli $\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}\left(T(t)\phi(\theta)-\phi(\theta)\right)=\frac{d\phi(\theta^+)}{d\theta}$, pochodna prawostronna w punkcie θ, o ile istnieje.

Dla $\theta=0$ mamy

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}\left(T(t)\phi(0)-\phi(0)\right)=\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}\int_0^t L(T(s)\phi)\,ds = L(T(0)\phi)=L(\phi).$$

Z definicji A widzimy, że zbiór wartości $\mathcal{R}(A)\subset\mathcal{C}$. Wobec tego $\phi\in\mathcal{D}(A)\Leftrightarrow$ ϕ ma ciągłą prawostronną pochodną na

$[-r,0)$ oraz $A\phi(0) = L(\phi)$, czyli $\dot\phi(0) = L(\phi)$.

Mamy więc

$$(G1)\quad A\phi(\theta) = \begin{cases} \frac{d\phi(\theta)}{d\theta}, & \theta \in [-r,0), \\ L(\phi), & \theta = 0. \end{cases}$$

<u>Lemat</u>: Generator infinitezymalny A półgrupy rozwiązań równania (L1) jest zadany wzorem (G1), dziedzina $\mathcal{D}(A)$ jest gęsta w $\mathcal{C}$ i dla $\phi \in \mathcal{D}(A)$ zachodzi

$$\frac{d}{dt} T(t)\phi = T(t)A\phi = AT(t)\phi.$$

D. Lewa strona wzoru oznacza oczywiście pochodną Frecheta operatora rozwiązania $x_t(\phi)$. Niech $x_t(\phi) \overset{\text{ozn.}}{=} x_t$.

Policzmy wariację Gateaux w punkcie $\theta \in [-r,0]$ w kierunku u:

$$\delta x_t(\theta)u = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} x(t+\theta+su) = \dot x(t+\theta)u.$$

Przekształcenie to jest liniowe i ciągłe względem u. Z różniczkowalności x mamy

$$\frac{x_t(\theta+\Delta\theta) - x_t(\theta) - \dot x(t+\theta)\Delta\theta}{\Delta\theta} \xrightarrow[\Delta\theta\to 0]{} 0,$$

czyli $Dx_t(\theta) = \dot x(t+\theta)$.

Z drugiej strony ze wzoru (G1) mamy

$$AT(t)\phi(\theta) = \begin{cases} \frac{d}{d\theta} T(t)\phi(\theta), & \theta<0, \\ L(T(t)\phi), & \theta = 0, \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \frac{d}{d\theta} x_t(\phi)(\theta), & \theta<0, \\ L(x_t(\phi)), & \theta=0, \end{cases} = \begin{cases} \frac{d}{d\theta} x(\phi)(t+\theta), & \theta<0, \\ \dot x(\phi)(t), & \theta=0, \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \frac{d}{dt} x(\phi)(t+\theta), & \theta<0, \\ \dot x(\phi)(t), & \theta=0. \end{cases}$$

Zatem $Dx_t(\phi) = AT(t)\phi$.

Przemienność A i $T(t)$ wynika z ogólnej własności półgrupy. $\square$

XLI) W dalszym ciągu zajmiemy się analizą spektrum operatora A. Przypomnijmy, że jeśli $B : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ jest liniowy, $\mathcal{B}$ - p. Banacha, to

- rezolwenta $\varrho(B) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \mathbb{I} - B$ ma ograniczony operator odwrotny z dziedziną gęstą w $\mathcal{B}\}$
- spektrum $\sigma(B) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \notin \varrho(B)\}$

W ogólnym przypadku

$$\sigma(B) = R\sigma(B) + C\sigma(B) + P\sigma(B)$$

$R\sigma(B)$ - spektrum rezidualne $\{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda \mathbb{I} - B)^{-1}$ istnieje, ale nie ma gęstej dziedziny$\}$

$C\sigma(B)$ - spektrum ciągłe $\{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda \mathbb{I} - B)^{-1}$ jest nieograniczony z gęstą dziedziną$\}$

$P_\sigma(B)$ - spektrum punktowe $\{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \mathbb{I} - B$ nie ma operatora odwrotnego$\}$.

$\lambda \in P_\sigma(B)$ nazywamy wartościami własnymi

$0 \neq \phi \in \mathcal{B} : (\lambda \mathbb{I} - B)\phi = 0$ nazywamy wektorami własnymi.

- jądro $\mathcal{N}(B) = \{\phi \in \mathcal{B} : B\phi = 0\}$.

Dla danego $\lambda \in \sigma(B)$ $\mathcal{M}_\lambda(B) \subset \mathcal{B}$ uogólniona podprzestrzeń własna = najmniejsza podprzestrzeń zawierająca wszystkie elementy z jądra $\mathcal{N}((\lambda \mathbb{I} - B)^k)$, $k = 1, 2, \ldots$

Chcemy badać własności operatora rozwiązań $T(t)$. W ogólnym przypadku operator ten jest nieznany. Liczymy, że uda nam się go scharakteryzować za pomocą A.

Lemat: Niech A będzie generatorem półgrupy rozwiązań $\{T(t), t \geq 0\}$. Wtedy $\sigma(A) = P_\sigma(A)$

i $\lambda \in \sigma(A) \Leftrightarrow$ gdy λ spełnia równanie charakterystyczne

(ch) $\quad \det \Delta(\lambda) = 0, \quad \Delta(\lambda) = \lambda \mathbb{I} - \int_{-r}^{0} e^{\lambda\theta} d\eta(\theta).$

Pierwiastki równania (ch) mają części rzeczywiste ograniczone z góry. Dla dowolnego $\lambda \in \sigma(A)$ uogólniona podprzestrzeń własna $\mathcal{M}_\lambda(A)$ ma skończony wymiar. Istnieje taki k, że $\mathcal{M}_\lambda(A) = \mathcal{N}(A - \lambda\mathbb{I})^k$ oraz

$$\mathcal{C} = \mathcal{N}(A-\lambda\mathbb{I})^k \oplus \mathcal{R}(A-\lambda\mathbb{I})^k.$$

D. Pokażmy, że rezolwenta $\varrho(A)$ składa się z tych λ, które nie spełniają (ch) oraz że każde λ spełniające (ch) należy do $P_\sigma(A)$.

$\lambda \in \varrho(A) \Leftrightarrow$ równanie $(A - \lambda\mathbb{I})\phi = \psi$ ma rozwiązanie $\phi \in \mathcal{D}(A)$ $\forall \psi$ w zbiorze gęstym w $\mathcal{C}$ i rozwiązanie zależy w sposób ciągły od ψ.

$\phi \in \mathcal{D}(A)$ jest różniczkowalne w sposób ciągły i $A\phi(\theta) = \dot\phi(\theta)$. Zatem $\lambda \in \varrho(A) \Leftrightarrow$

$$\dot\phi(\theta) - \lambda\phi(\theta) = \psi(\theta) \qquad \theta \in [-r, 0], \text{ czyli}$$

$$\phi(\theta) = e^{\lambda\theta} b + \int_0^\theta e^{\lambda(\theta - s)} \psi(s)\, ds \quad \theta \in [-r, 0]$$

Ale $\phi \in \mathcal{D}(A) \Leftrightarrow \dot\phi \in \mathcal{C}$ i $\dot\phi(0) = L(\phi)$, czyli $\lambda b + \psi(0) = \int_{-r}^{0} d\eta(\theta) \left(e^{\lambda\theta} b + \int_0^\theta e^{\lambda(\theta-s)} \psi(s) ds\right)$.

Po uproszczeniu

$$\Delta(\lambda) b = -\psi(0) + \int_{-r}^{0}\int_0^\theta e^{\lambda(\theta-s)} d\eta(\theta)\psi(s)ds \stackrel{\text{def.}}{=} -(\alpha, \psi),$$

gdzie α jest ciągłą funkcją macierzową na $[0, r]$, że $\alpha(s) = e^{-\lambda s}\mathbb{I}$, $s \in [0, r]$,

$$(\alpha, \psi) = \alpha(0)\psi(0) - \int_{-r}^{0}\int_0^\theta \alpha(s - \theta) d\eta(\theta) \psi(s) ds.$$

XLII) Ponieważ $(\alpha, \cdot) : \mathcal{C} \to \mathbb{R}^n$, $(\alpha, \mathcal{C}) = \mathbb{R}^n$, to rozwiązanie istnieje dla wszystkich $\psi \in \mathcal{C}$ wtw. $\Delta(\lambda) \neq 0$. Co więcej, dla $\Delta(\lambda) \neq 0$ rozwiązanie zależy w sposób ciągły od ψ. Stąd $\varrho(A) = \{\lambda : \det \Delta(\lambda) \neq 0\}$.

Jeśli $\det \Delta(\lambda) = 0$, to $\exists \phi \neq 0$, że $(A - \lambda \mathbb{I})\phi = \varphi$, czyli $\lambda \in P_\sigma(A)$.

Funkcja charakterystyczna jest całkowitą funkcją λ, czyli jej zera są skończonego rzędu, zatem operator rezolwenty $(A - \lambda\mathbb{I})^{-1}$ ma biegun rzędu k w λ_0, jeśli λ_0 jest zerem $\det\Delta(\lambda)$ rzędu k. Z ogólnych własności wynika, że $\mathcal{M}_\lambda(A)$ ma odpowiednie własności.

Ponieważ funkcja charakterystyczna jest wielomianem zmiennej λ ze współczynnikiem wiodącym równym 1 i pozostałymi współczynnikami zależącymi od λ poprzez całkowanie funkcji $e^{\lambda\theta}$ na $[-\tau, 0]$, to części rzeczywiste wartości własnych są ograniczone z góry. $\square$

Wiemy już, że $\lambda \in \sigma(A) \Rightarrow \mathcal{M}_\lambda(A) = \mathcal{N}(A - \lambda\mathbb{I})^k$ dla pewnego k. Zauważmy, że $A\mathcal{M}_\lambda(A) \subseteq \mathcal{M}_\lambda(A)$, ponieważ jeśli $\phi \in \mathcal{M}_\lambda(A)$, to $(A - \lambda\mathbb{I})^k\phi = 0$, natomiast $A(A - \lambda\mathbb{I})^k =$
$= (A^2 - \lambda A\mathbb{I})(A - \lambda\mathbb{I})^{k-1} = (A - \lambda\mathbb{I})A(A - \lambda\mathbb{I})^{k-1} = (A - \lambda\mathbb{I})^k A$.

Niech $\mathcal{M}_\lambda(A)$ ma wymiar d i niech $\phi_1^\lambda, \ldots, \phi_d^\lambda$ będzie bazą. Ozn. $\Phi_\lambda = (\phi_1^\lambda, \ldots, \phi_d^\lambda)$.

Ponieważ $A\mathcal{M}_\lambda(A) \subset \mathcal{M}_\lambda(A)$, to istnieje $d \times d$

macierz B_λ, że $A\Phi_\lambda = \Phi_\lambda B_\lambda$. Zauważmy, że jedyną wartością własną B_λ jest λ. Faktycznie, dla dowolnego wektora a
$(A-\lambda\mathbb{I})^k \Phi_\lambda a = 0 \Rightarrow \Phi_\lambda (B_\lambda - \lambda\mathbb{I})^k a = 0$.
Stąd $(B_\lambda - \lambda\mathbb{I})^k a = 0$ dla wszystkich a, zatem $(B_\lambda - \lambda\mathbb{I})^k = 0$, czyli wartości własne dostajemy λ.

Wzór $A\Phi_\lambda = \Phi_\lambda B_\lambda$ wraz z $A\Phi_\lambda(\theta) = \frac{d}{d\theta}\Phi_\lambda(\theta)$ implikuje $\Phi_\lambda(\theta) = \Phi_\lambda(0)e^{B_\lambda \theta}$ $\theta \in [-r, 0]$ (domykamy z prawej strony z ciągłości).

Stąd dostajemy też (z wykorzystaniem $T(t)\Phi_\lambda = \Phi_\lambda e^{B_\lambda t}$ $t \geq 0$), że
$$(T(t)\Phi_\lambda)(\theta) = \Phi_\lambda(0)e^{B_\lambda(t+\theta)} \quad \theta \in [-r, 0].$$

Powyższa zależność pozwala zdefiniować operator $T(t)$ na $\mathcal{M}_\lambda(A)$ dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$. Widzimy więc, że na uogólnionej podprzestrzeni własnej $\mathcal{M}_\lambda(A)$ równanie (L1) ma tę samą strukturę co ODE.

Skoro $T(t)A\phi = AT(t)\phi$ $\forall \phi \in \mathcal{D}(A)$, to
$T(t)\mathcal{R}(A-\lambda\mathbb{I})^k \subset \mathcal{R}(A-\lambda\mathbb{I})^k$.

Powtarzając powyższą argumentację dostajemy

__Tw.__ Niech $\Lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$ będzie skończonym zbiorem wartości własnych równania (1) i niech $\Phi_\Lambda = (\Phi_{\lambda_1}, \ldots, \Phi_{\lambda_p})$, $B_\Lambda = \mathrm{diag}(B_{\lambda_1}, \ldots, B_{\lambda_p})$, gdzie Φ_{λ_j} – baza uogólnionej p. własnej dla λ_j oraz $A\Phi_{\lambda_j} = \Phi_{\lambda_j} B_{\lambda_j}$, $j = 1, \ldots, p$. Wtedy jedyną wartością własną B_{λ_j} jest λ_j oraz dla każdego wektora a o takim samym wymiarze jak Φ_Λ rozwiązanie $T(t)\Phi_\Lambda a$ może być zdefiniowane na $\mathbb{R}$: $T(t)\Phi_\Lambda a = \Phi_\Lambda e^{B_\Lambda t} a$,
$\Phi_\Lambda(\theta) = \Phi_\Lambda(0)e^{B_\Lambda \theta}$, $\theta \in [-r, 0]$.

1 Projekt zaliczeniowy

Przykłady zastosowań:

(1) Ruch samochodów na drogach.

Kontrola i sterowanie ruchem drogowym to b. ważny problem w dzisiejszych czasach. Trzeba decydować gdzie ustawić światła, gdzie znaki stopu, ile pasów powinny mieć nowe drogi itp.

W warunkach dużego ruchu, gdy kierowcy jadą jeden za drugim, przyspieszenie czy zwolnienie przez pojedynczy samochód może stanowić niewielkie zaburzenie, które albo się zachowa w czasie, albo może stać się większe, co sugeruje wrażliwość na warunki początkowe. Może to powodować problemy w ruchu drogowym, a nawet prowadzić do wypadków.

Punktem wyjściowym modelowania ruchu drogowego jest prawo zachowania dla samochodów - zakłada się, że samochody nie powstają i nie są niszczone. W przestrzeni o współrzędnej x, jeśli $\rho(t,x)$ oznacza gęstość samochodów, to

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x},$$

gdzie $\partial q(t,x)/\partial x$ jest wypływem przez brzeg.

Dla zagadnień ruchu drogowego, jeśli u oznacza średnią prędkość samochodów, to $q = \rho u$. Załóżmy, że średnia prędkość zależy tylko od ρ, czyli $u = u(\rho)$. Ta funkcja może być wyznaczona eksperymentalnie (zliczając liczbę samochodów przejeżdżających w ciągu godziny). Można ją także przybliżać za pomocą prostych modeli. Ruch samochodów „w korku" można opisać za pomocą modelu, w którym x_n opisuje ruch samochodu z nr n i przyspieszenie tego samochodu zależy od ruchu samochodu bezpośrednio go poprzedzającego. Zakładając natychmiastową reakcję kierowcy mamy

$$\frac{d^2 x_n}{dt^2} = -\lambda\left(\frac{dx_n}{dt} - \frac{dx_{n-1}}{dt}\right), \quad \lambda > 0$$

czyli przyspieszenie proporcjonalne do różnicy prędkości między tym samochodem a bezpośrednio go poprzedzającym. Współczynnik λ mierzy intensywność reakcji na zmiany prędkości. W rzeczywistości trudno przypuszczać, że kierowca reaguje natychmiastowo. Jeśli τ – opóźnienie reakcji kierowcy, dostajemy

$$\ddot{x}_n(t) = -\lambda\left(\dot{x}_n(t-\tau) - \dot{x}_{n-1}(t-\tau)\right),$$

a po scałkowaniu

$$\dot{x}_n(t) = -\lambda\left(x_n(t-\tau) - x_{n-1}(t-\tau)\right) + d_n,$$

czyli równanie uzależniające prędkość samochodów w chwili t od odległości między nimi w chwili $t-\tau$.

Załóżmy, że w sytuacji sajonarnej odległość między samochodami jest jednakowa, czyli

$$\dot{x}_n = -\lambda(x_n - x_{n-1}) + d.$$

Z kolei gęstość samochodów w opisywanym przypadku to $x_{n-1} - x_n = \frac{1}{\rho}$, zatem $u = \frac{\lambda}{\rho} + d$.

(2) Zmiany polaryzacji w laserze.
Eksperymenty wykazały, że zmiany polaryzacji wiążą się z optycznym sprzężeniem zwrotnym. Jeśli mamy pionowy laser wnękowy emitujący powierzchniowo, to jest on poddawany sprzężeniu zwrotnemu przez lustro odległe o L. W rezultacie światło powracające do lasera odpowiada sygnałowi lasera w chwili $t-\tau$, gdzie $\tau = \frac{2L}{c}$, $c = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$ - prędkość światła, $L = 20,2\,cm$ - odległość laser - lustro. Porównując do skali czasowej lasera, czyli długości życia fotonu $\sim 1\,ps$, takie opóźnienie jest znaczące, należy się więc spodziewać wpływu tego opóźnienia na odpowiedź lasera. Eksperymenty wykazują, że lasery (niezależnie od typu) wykazują efekty hoppingowe związane z szumem z oscylacjami o okresie bliskim τ.
Zaproponowano równanie
$$\dot{x} = x - x^3 + cx(t-\tau) + \sqrt{2D}\,\xi(t),$$
gdzie $\xi(t)$ to Gaussowski biały szum, zaś D, to poziom tego szumu. W przypadku braku szumu $(D=0)$ mamy skalarne DDE.
Dokładniej można ten problem opisać za pomocą układu na intensywność pola lasera $I(t)$ i nośników elektrycznych $N(t)$.
$$\dot{I} = 2NI$$
$$T \cdot \dot{N} = P - N - (1+2N)\left(I + \eta I(t-\tau)\right),$$
gdzie $T = \tau_n / \tau_p$, τ_n - czas życia nośników,

τ_p - czas życia fotonów, $P \sim J/J_{th} - 1$ reprezentuje prąd pompujący, J_{th} - wartość progowa prądu.
Sprzężenie zwrotne można w tym układzie wprowadzać i modelować na różne sposoby.
Bazując na tego typu równaniach możemy analizować tworzenie obrazów laserowych.

③ Dynamika populacji.
Najpopularniejszym skalarnym równaniem populacyjnym z opóźnieniem jest równanie Hutchinsona, a najpopularniejsze dane dotyczące pojedynczej populacji to dane Nicholsona dla populacji muchy mięsnej. Niestety, oscylacje uzyskiwane w modelu Hut. nie zgadzają się z tymi danymi. Najlepsze dopasowanie daje $\lambda = r\tau = 2,1$, okres oscylacji $4,54\tau$, co przy obserwowanym okresie ~40 dni daje opóźnienie rzędu ~9 dni, a w rzeczywistości jest ≈14 dni.
Wobec tego Gurney zaproponował inny model:

$$\dot{N} = rN(t-\tau)\exp\left(-\frac{N(t-\tau)}{K}\right) - mN.$$

Dla tego równania można dostać $\tau = 14,1$ dni, czyli tyle, ile jest.

④ Modele krwiotwórczości.

W tej klasie zagadnień także można opierać się na skalarnym DDE.
Równolegle powstały dwa modele: Ważewskiej-Czyżewskiej-Lasoty i Glassa-Mackeya.
Jeśli poziom krwinek czerwonych w krwiobiegu jest niski, komórki produkują hormon zwany erytropoetyną, który stymuluje produkcję prekursorów i ich dojrzewanie. Dojrzewanie trwa kilka dni, po upływie których dojrzałe krwinki są uwalniane do krwi, a poziom erytropoetyny spada. Mamy więc ujemne sprzężenie zwrotne z opóźnieniem. Ogólna postać modelu:

$$\dot{E} = f(E(t-\tau)) - \gamma E$$

E – gęstość krwinek w krwiobiegu,
f – napływ krwinek ze szpiku pod wpływem erytropoetyny, γ – śmiertelność krwinek.
Mackey zaproponował funkcję typu Hilla

$$f(s) = f_0 \frac{\theta^p}{s^p+\theta^p},$$

podczas gdy Lasota funkcję wykładniczą. Przewaga modelu W-C-L jest taka, że powstaje on z prawa zachowania, ma więc dobrą bazę heurystyczną.
Z kolei w przypadku modelu G-M mamy większe bogactwo dynamiki – tylko dla $p<1$ obie funkcje (czyli W-C-L & G-M) mają podobny przebieg, natomiast dla $p>1$ w modelu G-M pojawia się punkt przegięcia.

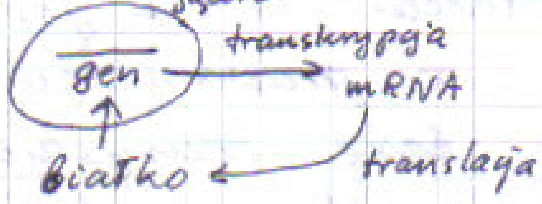
Co więcej, przy $p \to \infty$ funkcję f możemy aproksymować funkcją skokową $f(s) = 0$ dla $s > 1$ oraz $f(s) = f_0$ dla $s < 1$.
Można więc łatwo przeanalizować pojawiające się oscylacje.

⑤ Model oddychania.

W bardzo podobny sposób jak regulację krwinek można modelować ludzki oddech.

⑥ Oscylacje genetyczne.

W wielu przypadkach obserwuje się oscylacje w ekspresji genów i coraz częściej do opisu takich zagadnień stosuje się zamiast skomplikowanych ścieżek sygnałowych uproszczone (krótsze?) modele z opóźnieniem. Prosty przykład takich oscylacji dostajemy w układzie oscylatora sprzężonego dla genu, jego produktu i odpowiadającego mu mRNA. Prosty schemat tego sprzężenia:



Dla przykładu opiszemy model sprzężenia dla białka Hes 1. Jeśli M - stężenie mRNA, P - stężenie białka, to $\dot{M} = \alpha_m G(P(t-\tau)) - \mu_m M$, $\dot{P} = \alpha_p M - \mu_p P$, $G(s) = \frac{1}{1+(s/s_0)^n}$, s_0 - poziom represji, n - współczynnik Hilla.

(7) Modelowanie ludzkiej postawy.

Załóżmy, że mamy osobę z zawiązanymi oczami. Niewielkie odchylenie od postawy całkowicie pionowej powoduje postanie momentu obrotowego związanego z grawitacją. Prosty model zachwiań związanych z równoważeniem tego momentu obrotowego bazuje na odwrotnym równaniu wahadła

$$I\ddot{\theta} = mgh\sin\theta + T_c$$

θ - odchylenie od pionu, T_c - korekcyjny moment obrotowy generowany w odpowiedzi na inercję, I - moment inercyjny, h - położenie środka masy, m - masa.

Inercyjną orientację można estymować jako $y = -W\theta$, przy czym $W(t) \approx 1$ dla zamkniętych oczu. Korekcja następuje z pewnym opóźnieniem τ, stąd

$$T_c = K_p y(t-\tau) + K_D \dot{y}(t-\tau) + K_I \int y(t-\tau)dt,$$

gdyż korekcja bierze pod uwagę zarówno położenie jak i prędkość.