Egzamin z wykładu monograficznego

Teoria kategorii w podstawach informatyki
semestr zimowy 2022/23

Pojęcia, terminologia i notacja:

Poset to para $\mathbf{X} = \langle X, \preceq \rangle$, gdzie X jest dowolnym zbiorem, a $\preceq \subseteq X \times X$ to relacja częściowego porządku na X (tj. $\preceq$ jest zwrotna, przechodnia i antysymetryczna). Monotoniczny morfizm $f : \mathbf{X} \to \mathbf{X}'$, gdzie $\mathbf{X} = \langle X, \preceq \rangle$ i $\mathbf{X}' = \langle X', \preceq' \rangle$ są posetami, to taka funkcja $f : X \to X'$, że dla $x, y \in X$, jeśli $x \preceq y$ to $f(x) \preceq' f(y)$.

Zbiór skierowany w posecie $\mathbf{X} = \langle X, \preceq \rangle$ to taki zbiór $D \subseteq X$, że dla każdych $x, y \in D$ mamy $x \preceq z$ i $y \preceq z$ dla pewnego $z \in D$. Dodatkowo, zbiór skierowany $D \subseteq X$ jest *idealny*, gdy dla każdego $x \in D$ i $y \in X$, jeśli $y \preceq x$ to $y \in D$. Oczywiście, zbiór pusty $\emptyset \subseteq X$ jest idealnym zbiorem skierowanym.

Słaby cepeot to taki poset $\mathbf{X} = \langle X, \preceq \rangle$, w którym każdy idealny zbiór skierowany $D \subseteq X$ ma kres górny $\bigsqcup_{\mathbf{X}} D \in X$; kres górny zbioru pustego, czyli element najmniejszy w $\langle X, \preceq \rangle$, oznaczamy $\perp_{\mathbf{X}} = \bigsqcup_{\mathbf{X}} \emptyset$. *Cepeot* to taki poset $\mathbf{X} = \langle X, \preceq \rangle$, w którym każdy zbiór skierowany $D \subseteq X$ ma kres górny $\bigsqcup_{\mathbf{X}} D \in X$.

Dla słabych cepeotów $\mathbf{X} = \langle X, \preceq \rangle$ i $\mathbf{X}' = \langle X', \preceq' \rangle$, słabo ciągły morfizm $f : \mathbf{X} \to \mathbf{X}'$ to taka funkcja $f : X \to X'$, która zachowuje kresy górne niepustych idealnych zbiorów skierowanych, tzn. dla każdego niepustego idealnego zbioru skierowanego $D \subseteq X$ w $\mathbf{X}$, $f(\bigsqcup_{\mathbf{X}} D) = \bigsqcup_{\mathbf{X}'} f(D)$. Słabo ciągły morfizm $f : \mathbf{X} \to \mathbf{X}'$ jest *rzetelny*, gdy zachowuje też kres zbioru pustego, tzn. $f(\perp_{\mathbf{X}}) = \perp_{\mathbf{X}'}$.

Dla cepeotów $\mathbf{X} = \langle X, \preceq \rangle$ i $\mathbf{X}' = \langle X', \preceq' \rangle$, ciągły morfizm $f : \mathbf{X} \to \mathbf{X}'$ to taka funkcja $f : X \to X'$, która zachowuje kresy górne niepustych zbiorów skierowanych, tzn. dla każdego niepustego zbioru skierowanego $D \subseteq X$ w $\mathbf{X}$, $f(\bigsqcup_{\mathbf{X}} D) = \bigsqcup_{\mathbf{X}'} f(D)$. Ciągły morfizm $f : \mathbf{X} \to \mathbf{X}'$ jest *rzetelny*, gdy zachowuje też kres zbioru pustego, tzn. $f(\perp_{\mathbf{X}}) = \perp_{\mathbf{X}'}$.

Powyższe definiuje następujące kategorie (z naturalnym złożeniem morfizmów jako funkcji):

- **PO**: kategoria posetów z monotonicznymi morfizmami między nimi.
- **ICPO**: kategoria słabych cepeotów ze słabo ciągłymi morfizmami między nimi.
- **SICPO**: kategoria słabych cepeotów z rzetelnymi słabo ciągłymi morfizmami między nimi.
- **CPO**: kategoria cepeotów z ciągłymi morfizmami między nimi.
- **SCPO**: kategoria cepeotów z rzetelnymi ciągłymi morfizmami między nimi.

Mamy też oczywiste funktory, które zapominają o relacji porządku (jak zwykle, **Set** to kategoria zbiorów z funkcjami między nimi):

- $\mathcal{S}_{\mathbf{PO}} : \mathbf{PO} \to \mathbf{Set}$ — tu $\mathcal{S}_{\mathbf{PO}}(\langle X, \preceq \rangle) = X$, $\mathcal{S}_{\mathbf{PO}}(f : \mathbf{X} \to \mathbf{X}') = f$, podobnie dla kolejnych funktorów
- $\mathcal{S}_{\mathbf{ICPO}} : \mathbf{ICPO} \to \mathbf{Set}$
- $\mathcal{S}_{\mathbf{SICPO}} : \mathbf{SICPO} \to \mathbf{Set}$
- $\mathcal{S}_{\mathbf{CPO}} : \mathbf{CPO} \to \mathbf{Set}$
- $\mathcal{S}_{\mathbf{SCPO}} : \mathbf{SCPO} \to \mathbf{Set}$

W końcu, mamy też funktory inkluzji:

- $\mathcal{J}_{\mathbf{ICPO}} : \mathbf{ICPO} \to \mathbf{PO}$ — tu $\mathcal{J}_{\mathbf{ICPO}}(\mathbf{X}) = \mathbf{X}$, $\mathcal{J}_{\mathbf{ICPO}}(f : \mathbf{X} \to \mathbf{X}') = f$, podobnie dla kolejnych funktorów
- $\mathcal{J}_{\mathbf{SICPO}} : \mathbf{SICPO} \to \mathbf{PO}$
- $\mathcal{J}_{\mathbf{CPO}} : \mathbf{CPO} \to \mathbf{PO}$
- $\mathcal{J}_{\mathbf{SCPO}} : \mathbf{SCPO} \to \mathbf{PO}$

Zadanie:

1. *Która z poniższych kategorii*
   (a) **PO**
   (b) **ICPO**
   (c) **SICPO**
   (d) **CPO**
   (e) **SCPO**

   jest

   SZ. skończenie zupełna

   Z. zupełna

   SKZ. skończenie kozupełna

   KZ. kozupełna

   Dla każdego przypadku udowodnij lub uzasadnij odpowiedź negatywną.

2. *Które z poniższych funktorów*

   (a) $\mathcal{S}_{\mathbf{PO}} \colon \mathbf{PO} \to \mathbf{Set}$

   (b) $\mathcal{S}_{\mathbf{ICPO}} \colon \mathbf{ICPO} \to \mathbf{Set}$

   (c) $\mathcal{S}_{\mathbf{SICPO}} \colon \mathbf{SICPO} \to \mathbf{Set}$

   (d) $\mathcal{S}_{\mathbf{CPO}} \colon \mathbf{CPO} \to \mathbf{Set}$

   (e) $\mathcal{S}_{\mathbf{SCPO}} \colon \mathbf{SCPO} \to \mathbf{Set}$

   (f) $\mathcal{J}_{\mathbf{ICPO}} \colon \mathbf{ICPO} \to \mathbf{PO}$

   (g) $\mathcal{J}_{\mathbf{SICPO}} \colon \mathbf{SICPO} \to \mathbf{PO}$

   (h) $\mathcal{J}_{\mathbf{CPO}} \colon \mathbf{CPO} \to \mathbf{PO}$

   (i) $\mathcal{J}_{\mathbf{SCPO}} \colon \mathbf{SCPO} \to \mathbf{PO}$

   mają lewy sprzężony? Dla każdego przypadku udowodnij lub uzasadnij odpowiedź negatywną.

Uwagi:

- Można korzystać z konstrukcji i twierdzeń z wykładu bez powtarzania ich dowodów.
- Odpowiedzi na powyższe pytania nie są niezależne. Na przykład, w oczywisty sposób zadania 1.a.SZ i 1.a.Z sa powiązane: dowód zupełności kategorii **PO** pokazywałby też jej skończoną zupełność, a kontrprzykład na skończoną zupełność kategorii **PO** byłby też kontrprzykładem na jej zupełność. Są też inne, niekoniecznie aż tak oczywiste zależności. W takich przypadkach wystarczy to po prostu wskazać, nie powtarzając argumentacji. Tak naprawdę jest tu więc znacznie mniej pytań niż mogłoby się wydawać na pierwszy rzut oka.

Szkic rozwiązania:

Dla dowolnego posetu $\mathbf{X} = \langle X, \preceq \rangle$, dla $Y \subseteq X$, niech $Y{\downarrow} = \{x \in X \mid x \preceq y, \text{dla pewnego } y \in Y\}$. Dla $x, y \in X$, $x \preceq y$ iff $\{x\}{\downarrow} \subseteq \{y\}{\downarrow}$ (oczywiste).

Definiujemy dalej: $cl_{\mathbf{X}}(Y) \subseteq X$ to najmniejszy ze zbiorów $Z \subseteq X$ takich, że $Y \subseteq Z$, $Z{\downarrow} \subseteq Z$ i dla każdego skierowanego $D \subseteq Z$, jeśli D ma kres górny w $\mathbf{X}$ to $\bigsqcup_{\mathbf{X}} D \in Z$ ($cl_{\mathbf{X}}(Y)$ istnieje, bo rodzina takich zbiorów Z jest niepusta i zamknięta na przecięcia teoriomnogościowe). Dla $x \in X$, $cl_{\mathbf{X}}(\{x\}) = cl_{\mathbf{X}}(\{x\}{\downarrow}) = \{x\}{\downarrow}$.

I jeszcze: dla $\mathcal{Y} \subseteq 2^X$ (gdzie 2^X to rodzina wszystkich podzbiorów X), $cl^*_{\mathbf{X}}(\mathcal{Y}) \subseteq 2^X$ to najmniejsza z rodzin $\mathcal{Z} \subseteq 2^X$ takich, że $cl_{\mathbf{X}}(Y) \in \mathcal{Z}$ dla każdego $Y \in \mathcal{Y}$, oraz $cl_{\mathbf{X}}(\bigcup \mathcal{D}) \in \mathcal{Z}$ dla każdej skierowanej (względem inkluzji) rodziny $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{Z}$ ($cl^*_{\mathbf{X}}(\mathcal{Y})$ istnieje, bo rodzina takich rodzin $\mathcal{Z}$ jest niepusta i zamknięta na przecięcia teoriomnogościowe).

Dwie konstrukcje domknięcia przez idealne zbiory skierowane:

- $\mathbf{I}(\mathbf{X}) = \langle I(\mathbf{X}), \subseteq \rangle$, gdzie $I(\mathbf{X}) = \{D \subseteq X \mid D \text{ idealny zbiór skierowany w } \mathbf{X}\}$. Wtedy:
  - Jeśli $\mathcal{D} \subseteq I(\mathbf{X})$ jest zbiorem skierowanym w $\mathbf{I}(\mathbf{X})$, to $\bigcup \mathcal{D} \subseteq X$ jest idealnym zbiorem skierowanym w $\mathbf{X}$, oraz $\bigsqcup_{\mathbf{I}(\mathbf{X})} \mathcal{D} = \bigcup \mathcal{D}$. Zatem $\mathbf{I}(\mathbf{X})$ jest cepeotem.
  - Dla dowolnego cepeotu $\mathbf{X}'$ i rzetelnych ciągłych morfizmów $f, g \colon \mathbf{I}(\mathbf{X}) \to \mathbf{X}'$, $f = g$ jeśli dla każdego $x \in X$, $f(\{x\}{\downarrow}) = g(\{x\}{\downarrow})$ (bo dla dowolnego skierowanego $D \subseteq X$, $D{\downarrow} = \bigsqcup_{\mathbf{I}(\mathbf{X})} \{\{x\}{\downarrow} \mid x \in D\}$ i rodzina $\{\{x\}{\downarrow} \mid x \in D\}$ jest skierowana w $\mathbf{I}(\mathbf{X})$).

- $\mathbf{I_p}(\mathbf{X}) = \langle I_p(\mathbf{X}), \subseteq \rangle$, gdzie $I_p(\mathbf{X}) = cl^*_{\mathbf{X}}(\{\{x\} \mid x \in X\})$. Wtedy:
  - Jeśli $\mathcal{D} \subseteq I_p(\mathbf{X})$ jest zbiorem skierowanym w $\mathbf{I_p}(\mathbf{X})$, to $cl_{\mathbf{X}}(\bigcup \mathcal{D}) \subseteq X$ jest kresem górnym $\mathcal{D}$ w $\mathbf{I_p}(\mathbf{X})$ — zatem $\mathbf{I_p}(\mathbf{X})$ jest cepeotem.
  - Jeśli $D \subseteq X$ jest zbiorem skierowanym w $\mathbf{X}$, a $d = \bigsqcup_{\mathbf{X}} D$ jest jego kresem górnym w $\mathbf{X}$, to $\{d\}{\downarrow} = cl_{\mathbf{X}}(\{d\}{\downarrow}) = cl_{\mathbf{X}}(\bigcup \{\{x\}{\downarrow} \mid x \in D\}) = \bigsqcup_{\mathbf{I_p}} \{\{x\}{\downarrow} \mid x \in D\}$ (i rodzina $\{\{x\}{\downarrow} \mid x \in D\}$ jest skierowana w $\mathbf{I_p}(\mathbf{X})$). Zatem włożenie $\{\_\}{\downarrow} \colon \mathbf{X} \to \mathbf{I_p}(\mathbf{X})$ zachowuje istniejące w $\mathbf{X}$ kresy zbiorów skierowanych.
  - Dla dowolnego cepeotu $\mathbf{X}'$ i rzetelnych ciągłych morfizmów $f, g \colon \mathbf{I_p}(\mathbf{X}) \to \mathbf{X}'$, $f = g$ jeśli dla każdego $x \in X$, $f(\{x\}{\downarrow}) = g(\{x\}{\downarrow})$ (bo dla dowolnej skierowanej rodziny $\mathcal{D} \subseteq I_p(\mathbf{X})$, jeśli $f(D) = g(D)$ dla wszystkich $D \in \mathcal{D}$ to $f(cl_{\mathbf{X}}(\bigcup \mathcal{D})) = f(\bigsqcup_{\mathbf{I_p}(\mathbf{X})} \mathcal{D}) = \bigsqcup_{\mathbf{X}'} f(\mathcal{D}) = \bigsqcup_{\mathbf{X}'} g(\mathcal{D}) = g(\bigsqcup_{\mathbf{I_p}(\mathbf{X})} \mathcal{D}) = g(cl_{\mathbf{X}}(\bigcup \mathcal{D}))$).

UWAGA: Jeśli $\mathbf{X} = \langle X, \preceq \rangle$ jest cepeotem, to dla dowolnego zbioru skierowanego $D \subseteq X$ w $\mathbf{X}$, $D{\downarrow} \subseteq X$ jest idealnym zbiorem skierowanym w $\mathbf{X}$, $\bigsqcup_{\mathbf{X}} D = \bigsqcup_{\mathbf{X}} D{\downarrow}$ oraz D jest niepuste wtedy i tylko wtedy gdy $D{\downarrow}$ jest niepuste. Zatem **ICPO** = **CPO** oraz **SICPO** = **SCPO**.

Odpowiedzi:

- Zupełność/kozupełność (skończoność nic nie zmienia):

  PO:

  Z. *TAK* — zwykłe konstrukcje obiektu końcowego (singleton), produktu (iloczyn kartezjański z porządkiem po współrzędnych) i ekwalizatora (jak w **Set**, z dziedziczonym porządkiem)

  KZ. *TAK* — początkowy: pusty; koprodukt: suma rozłączna; koekwalizator: dzielimy przez relację równoważności (jak w konstrukcji koekwalizatorów w **Set**), indukujemy quasi-porządek, dzielimy przez relację równoważności daną przez ten quasi-porządek. UWAGA: koeqwalizatory zachowują istniejące kresy górne (zbiorów skierowanych i nie tylko).

  CPO = ICPO:

Z. *NIE* — nie ma ekwalizatora: dla $f, g\colon \mathbf{X} \to \mathbf{X}'$, $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ moze być pusty (bo zbiów pusty nie jest cepeotem), wtedy nie będzie ekwalizatora

KZ. *NIE* — nie ma obiektu początkowego: w szczególności $\{\perp\}$ nie jest początkowy, bo wkłada się niejednoznacznie w zbiory z więcej niż jednym elementem

SCPO = SICPO:

Z. *TAK* — działają zwykłe konstrukcje obiektu końcowego, produktu i ekwalizatora, jak w **PO**

KZ. *TAK* — $\{\perp\}$ jest początkowy; koprodukt to "smashed sum"; koekwaliztor dostajemy w dwóch krokach: najpierw konstrukcja jak w **PO**, potem $\mathbf{I_p}$ z włożeniem $\{\_\}{\downarrow}$.

Lewe sprzężone:

(a) $\mathcal{S}_{\mathbf{PO}}\colon \mathbf{PO} \to \mathbf{Set}$: *TAK* — X z dyskretnym porządkiem jest wolne nad X.
(b,d) $\mathcal{S}_{\mathbf{CPO}}\colon \mathbf{CPO} \to \mathbf{Set}$: *NIE* — bo **CPO** nie ma obiektu początkowego, a **Set** ma.
(c,e) $\mathcal{S}_{\mathbf{SCPO}}\colon \mathbf{SCPO} \to \mathbf{Set}$: *TAK* — bo $\mathcal{S}_{\mathbf{SCPO}} = \mathcal{S}_{\mathbf{PO}};\mathcal{J}_{\mathbf{SCPO}}$.
(f,h) $\mathcal{J}_{\mathbf{CPO}}\colon \mathbf{CPO} \to \mathbf{PO}$: *NIE* — bo **CPO** nie ma obiektu początkowego, a **PO** ma.
(g,i) $\mathcal{J}_{\mathbf{SCPO}}\colon \mathbf{SCPO} \to \mathbf{PO}$: *TAK* — $\mathbf{I}(\mathbf{X})$ jest wolne nad $\mathbf{X}$.

Podsumowując:

	SZ	*Z*	*SKZ*	*KZ*
PO	*TAK*	*TAK*	*TAK*	*TAK*
ICPO	*NIE*	*NIE*	*NIE*	*NIE*
SICPO	*TAK*	*TAK*	*TAK*	*TAK*
CPO	*NIE*	*NIE*	*NIE*	*NIE*
SCPO	*TAK*	*TAK*	*TAK*	*TAK*

	L
$\mathcal{S}_{\mathbf{PO}}\colon \mathbf{PO} \to \mathbf{Set}$	*TAK*
$\mathcal{S}_{\mathbf{ICPO}}\colon \mathbf{ICPO} \to \mathbf{Set}$	*NIE*
$\mathcal{S}_{\mathbf{SICPO}}\colon \mathbf{SICPO} \to \mathbf{Set}$	*TAK*
$\mathcal{S}_{\mathbf{CPO}}\colon \mathbf{CPO} \to \mathbf{Set}$	*NIE*
$\mathcal{S}_{\mathbf{SCPO}}\colon \mathbf{SCPO} \to \mathbf{Set}$	*TAK*
$\mathcal{J}_{\mathbf{ICPO}}\colon \mathbf{ICPO} \to \mathbf{PO}$	*NIE*
$\mathcal{J}_{\mathbf{SICPO}}\colon \mathbf{SICPO} \to \mathbf{PO}$	*TAK*
$\mathcal{J}_{\mathbf{CPO}}\colon \mathbf{CPO} \to \mathbf{PO}$	*NIE*
$\mathcal{J}_{\mathbf{SCPO}}\colon \mathbf{SCPO} \to \mathbf{PO}$	*TAK*