Egzamin z wykładu monograficznego

Teoria kategorii w podstawach informatyki
semestr zimowy 2021/22

Pojęcia, terminologia i notacja:

Przyjmujemy zwykłą definicję sygnatury algebraicznej Σ, Σ-algebry i Σ-homomorfizmu; wykorzystujemy standardową notację z wykładu.

Niech $\Sigma = \langle S, \Omega \rangle$ będzie dowolną sygnaturą algebraiczną.

Algebry "ocenione" to algebry, w których elementy są "ocenione" albo pozytywnie (+), albo negatywnie (−), przy czym operacje zachowują istniejące oceny pozytywne.

Dokładniej: *oceniona Σ-algebra* to para $\langle A, o \rangle$, gdzie A jest Σ-algebrą, a $o = \langle o_s \colon |A|_s \to \{+,-\} \rangle_{s \in S}$ jest rodziną funkcji odwzorowujących elementy nośników algebry w dwuelementowy zbiór *ocen* $\{+,-\}$, przy czym dla każdej nazwy operacji $f \colon s_1 \times \ldots \times s_n \to s$ w Σ i elementów $a_1 \in |A|_{s_1}$, $\ldots$, $a_n \in |A|_{s_n}$, jeśli $o_{s_i}(a_i) = +$ dla któregoś $i = 1, \ldots, n$ to $o_s(f_A(a_1, \ldots, a_n) = +$.

Minimalistyczna Σ-algebra to dowolna oceniona Σ-algebra $\langle A, o \rangle$ taka, że dla każdej nazwy operacji $f \colon s_1 \times \ldots \times s_n \to s$ w Σ i elementów $a_1 \in |A|_{s_1}$, $\ldots$, $a_n \in |A|_{s_n}$, jeśli $o_{s_i}(a_i) = -$ dla wszystkich $i = 1, \ldots, n$ to $o_s(f_A(a_1, \ldots, a_n)) = -$.

Dla ocenionych Σ-algebr rozważamy Σ-formuły logiczne następującej postaci:

- równości: $\forall X.t = t'$,
- (pozytywne) formuły oceny: $\forall X.(t)^+$

gdzie X jest S-rodzajowym zbiorem (zmiennych), a $t, t' \in |T_\Sigma(X)|_s$ są Σ-termami ze zmienymi ze zbioru X. Relacja spełniania jest zdefiniowana w oczywisty sposób: dla dowolnej ocenionej Σ-algebry $\langle A, o \rangle$

- $\langle A, o \rangle \models \forall X.t = t'$ gdy $A \models \forall X.t = t'$, tj. dla każdego wartościowania $v \colon X \to |A|$, $t_A[v] = t'_A[v]$ (gdzie jak zwykle $t_A[v]$ oznacza wartość termu t w algebrze A przy wartościowaniu v)
- $\langle A, o \rangle \models \forall X.(t)^+$ gdy dla każdego wartościowania $v \colon X \to |A|$, $o_s(t_A[v]) = +$, gdzie $t \in |T_\Sigma(X)|_s$.

Homomorfizmy "oceniające" nie mogą obniżać oceny, a homomorfizmy "konserwatywne" nie mogą ocen zmieniać. Dokładniej: Σ-homomorfizm $h \colon A \to A'$ jest *oceniającym* homomorfizmem ocenionych Σ-algebr $\langle A, o \rangle$ i $\langle A', o' \rangle$ gdy dla każdego rodzaju $s \in S$ i $a \in |A|_s$, jeśli $o_s(a) = +$ to $o'_s(h_s(a)) = +$. Jeśli dla każdego rodzaju $s \in S$ i $a \in |A|_s$ także $o'_s(h_s(a)) = o_s(a)$ to h jest homomorfizmem *konserwatywnym* algebr ocenionych. W szczególności identyczności sa homorfizmami konserwatywnymi, złożenie homomorfizmów oceniających jest homomorfizmem oceniającym i złożenie homomorfizmów konserwatywnych jest homomorfizmem konserwatywnym.

Dla dowolnej sygnatury $\Sigma = \langle S, \Omega \rangle$ i zbioru Σ-formuł Φ, definiujemy następujące kategorie:

- $\mathbf{Set}^S$: kategoria S-rodzajowych zbiorów i funkcji między nimi, jak zwykle.
- $\mathbf{OAlg}(\Sigma, \Phi)$: kategoria ocenionych Σ-algebr spełniających wszystkie formuły w Φ i oceniających Σ-homomorfizmów między nimi,
- $\mathbf{KOAlg}(\Sigma, \Phi)$: kategoria ocenionych Σ-algebr spełniających wszystkie formuły w Φ i konserwatywnych Σ-homomorfizmów między nimi,
- $\mathbf{MAlg}(\Sigma, \Phi)$: kategoria minimalistycznych Σ-algebr spełniających wszystkie formuły w Φ i oceniających Σ-homomorfizmów między nimi,
- $\mathbf{KMAlg}(\Sigma, \Phi)$: kategoria minimalistycznych Σ-algebr spełniających wszystkie formuły w Φ i konserwatywnych Σ-homomorfizmów między nimi,

Warto zauważyć, że $\mathbf{MAlg}(\Sigma, \Phi)$ jest pełną podkategorią $\mathbf{OAlg}(\Sigma, \Phi)$, a $\mathbf{KMAlg}(\Sigma, \Phi)$ pełną podkategorią $\mathbf{KOAlg}(\Sigma, \Phi)$ oraz $\mathbf{KOAlg}(\Sigma, \Phi)$ jest (niekoniecznie pełną) podkategorią $\mathbf{OAlg}(\Sigma, \Phi)$, a $\mathbf{KMAlg}(\Sigma, \Phi)$ (niekoniecznie pełną) podkategorią $\mathbf{MAlg}(\Sigma, \Phi)$.

Definiujemy oczywiste funktory przyporządkowujące algebrom ich (S-rodzajowe) nośniki a homomorfizmom (S-rodzajowe) funkcje, którymi one są:

– $\mathbf{OG}_{\Sigma,\Phi} \colon \mathbf{OAlg}(\Sigma, \Phi) \to \mathbf{Set}^S$
– $\mathbf{KOG}_{\Sigma,\Phi} \colon \mathbf{KOAlg}(\Sigma, \Phi) \to \mathbf{Set}^S$
– $\mathbf{MG}_{\Sigma,\Phi} \colon \mathbf{MAlg}(\Sigma, \Phi) \to \mathbf{Set}^S$
– $\mathbf{KMG}_{\Sigma,\Phi} \colon \mathbf{KMAlg}(\Sigma, \Phi) \to \mathbf{Set}^S$

W powyższych oznaczeniach możemy pomijać pusty zbiór formuł Φ, tj. $\mathbf{OAlg}(\Sigma)$ oznacza $\mathbf{OAlg}(\Sigma, \emptyset)$, $\mathbf{MAlg}(\Sigma)$ oznacza $\mathbf{MAlg}(\Sigma, \emptyset)$, $\mathbf{OG}_\Sigma$ oznacza $\mathbf{OG}_{\Sigma,\emptyset}$, $\mathbf{MG}_\Sigma$ oznacza $\mathbf{MG}_{\Sigma,\emptyset}$, itp.

Zadanie:

1. *W których z poniższych kategorii instnieją*
   - T. obiekty końcowe
   - P. produkty każdej niepustej rodziny obiektów
   - E. equalizatory każdej pary morfizmów równoległych
   - Z. granice każdego diagramu
   - I. obiekty poczatkowe
   - KP. koprodukty każdej niepustej rodziny obiektów
   - KE. koequalizatory każdej pary morfizmów równoległych
   - KZ. kogranice każdego diagramu

   dla każdej sygnatury Σ i, gdzie stosowne, zbioru Σ-formuł Φ?
   - (a) $\mathbf{OAlg}(\Sigma)$
   - (b) $\mathbf{KOAlg}(\Sigma)$
   - (c) $\mathbf{MAlg}(\Sigma)$
   - (d) $\mathbf{KMAlg}(\Sigma)$
   - (e) $\mathbf{OAlg}(\Sigma, \Phi)$
   - (f) $\mathbf{KOAlg}(\Sigma, \Phi)$
   - (g) $\mathbf{MAlg}(\Sigma, \Phi)$
   - (h) $\mathbf{KMAlg}(\Sigma, \Phi)$

   Udowodnij lub uzasadnij odpowiedź negatywną.
2. *Które z poniższych funktorów mają lewy sprzężony dla każdej sygnatury Σ i, gdzie stosowne, zbioru Σ-formuł Φ?*
   - (a) $\mathbf{OG}_\Sigma \colon \mathbf{OAlg}(\Sigma) \to \mathbf{Set}^S$
   - (b) $\mathbf{KOG}_\Sigma \colon \mathbf{KOAlg}(\Sigma) \to \mathbf{Set}^S$
   - (c) $\mathbf{MG}_\Sigma \colon \mathbf{MAlg}(\Sigma) \to \mathbf{Set}^S$
   - (d) $\mathbf{KMG}_\Sigma \colon \mathbf{KMAlg}(\Sigma) \to \mathbf{Set}^S$
   - (e) $\mathbf{OG}_{\Sigma,\Phi} \colon \mathbf{OAlg}(\Sigma, \Phi) \to \mathbf{Set}^S$
   - (f) $\mathbf{KOG}_{\Sigma,\Phi} \colon \mathbf{KOAlg}(\Sigma, \Phi) \to \mathbf{Set}^S$
   - (g) $\mathbf{MG}_{\Sigma,\Phi} \colon \mathbf{MAlg}(\Sigma, \Phi) \to \mathbf{Set}^S$
   - (h) $\mathbf{KMG}_{\Sigma,\Phi} \colon \mathbf{KMAlg}(\Sigma, \Phi) \to \mathbf{Set}^S$

   Udowodnij lub uzasadnij odpowiedź negatywną.

Uwagi:

– Można korzystać z konstrukcji i twierdzeń z wykładu bez powtarzania ich dowodów.
– Odpowiedzi na powyższe pytania nie są niezależne. Na przykład, w oczywisty sposób zadania 1.Z.a i 1.Z.e sa powiązane: dowód zupełności kategorii $\mathbf{OAlg}(\Sigma, \Phi)$ pokazywałby też zupełność $\mathbf{OAlg}(\Sigma)$, a kontrprzykład na zupełność kategorii $\mathbf{OAlg}(\Sigma)$ byłby też kontrprzykładem na zupełność $\mathbf{OAlg}(\Sigma, \Phi)$. Są też inne, niekoniecznie aż tak oczywiste zależności. W takich przypadkach wystarczy to po prostu wskazać, nie powtarzając argumentacji. Tak naprawdę jest tu więc znacznie mniej pytań niż mogłoby się wydawać na pierwszy rzut oka.
– Dość trudne wydają się niektóre pytania dotyczące konstrukcji różnych granic i kogranic w kategoriach algebr minimalistycznych (bez aksjomatów, z aksjomatami bywa łatwiej). To część specjalna zadania — można te pytania pominąć (choć od doktorantów, którzy chcą zaliczyć wykład, oczekuję przynajmniej sensownej próby odpowiedzi na nie).

Szkic rozwiązania: Dla notacyjnej wygody, przy ustalonej ocenionej Σ-algebrze $\langle A, o\rangle$, dla $s \in S$ i $a \in |A|'_s$, będę pisać a^+ zamiast $o_s(a) = +$ oraz a^- zamiast $o_s(a) = -$.

Dla dowolnej Σ-algebry A, niech $(A)^- = \langle A, o^-\rangle$ gdzie $o^-_s(a) = -$ dla wszystkich $s \in S$, $a \in |A|_s$. Dalej, dla dowolnej algebry ocenionej $\langle A, o\rangle$ i podzbioru $Y \subseteq |A|$ nośnika algebry A, niech $\langle A, o[Y^+]\rangle$ oznacza ocenioną algebrę $\langle A, o'\rangle$ gdzie dla $s \in S$, $a \in |A|_s$, $o'_s(a) = +$ gdy $a \in Cl^+_A(Y)_s$ oraz $o'_s(a) = o_s(a)$ gdy $a \notin Cl^+_A(Y)_s$, gdzie $Cl^+_A(Y) \subseteq |A|$ jest najmniejszym podzbiorem nośnika Σ-algebry A, który zawiera Y oraz dla każdych $f\colon s_1 \times \ldots \times s_m \to s$ i $a_1 \in |A|_{s_1}, \ldots, a_m \in |A|_{s_m}$, jeśli dla jakiegoś $i = 1, \ldots, m$, $a_i \in Cl^+_A(Y)_{s_i}$ to $f_A(a_1, \ldots, a_m) \in Cl^+_A(Y)_s$.

Niech $\mathbf{P}\colon \mathbf{OAlg}(\Sigma) \to \mathbf{Alg}(\Sigma)$ bedzie oczywistym funktorem rzutowania $\mathbf{P}(\langle A, o\rangle) = A$, $\mathbf{P}(h\colon \langle A, o\rangle \to \langle A', o'\rangle) = (h\colon A \to A')$. Bez wprowadzania dodatkowych notacji bedziemy też używać $\mathbf{P}$ jako funktora z odpowiednich podkategorii $\mathbf{OAlg}(\Sigma)$ w odpowiednie podkategorie $\mathbf{Alg}(\Sigma)$.

Najpierw proste odpowiedzi pozytywne dla kategorii $\mathbf{OAlg}(\Sigma, \Phi)$, gdzie $\Phi = \Phi_e \cup \Phi_o$ dla zbioru równości Φ_e i zbioru formuł oceny Φ_o:

"1._.e" Rozważmy diagram D w $\mathbf{OAlg}(\Sigma, \Phi)$ o kształcie $\langle N, E, s, t\rangle$, gdzie $D_n = \langle A_n, o^n\rangle$, $n \in N$.

"Z" Niech A z rzutowaniami $\iota^n\colon A \to A_n$ bedzie granicą diagramu $\mathbf{P}(D)$ w $\mathbf{Alg}(\Sigma, \Phi_e)$. Dla $s \in S$, $a \in |A|_a$, niech $o_s(a) = -$ gdy $o^n_s(\iota^n_s(a)) = -$ dla jakiegoś $n \in N$, a $o_s(a) = +$ gdy $o^n_s(\iota^n_s(a)) = +$ dla wszystkich $n \in N$. Niech dalej $Y \subseteq |A|$ będzie zbiorem wartości w A termów w formułach oceny w Φ_o, tj. dla $s \in S$

$$Y_s = \{t_A[v] \mid \forall X.(t)^+ \in \Phi_o, t \in |T_\Sigma(X)|_s, v\colon X \to |A|\}$$

Wówczas oceniona Σ-algebra $\langle A, o[Y^+]\rangle$ z rzutowaniami $\iota^n\colon \langle A, o[Y^+]\rangle \to \langle A_n, o^n\rangle$, $n \in N$, jest granicą diagramu D w $\mathbf{OAlg}(\Sigma, \Phi)$.

Zatem: **1.{T,P,E,Z}.{a,e}: TAK**.

"KZ" Niech A z włożeniami $\iota^n\colon A_n \to A$ bedzie kogranicą diagramu $\mathbf{P}(D)$ w $\mathbf{Alg}(\Sigma, \Phi_e)$. Niech $Y \subseteq |A|$ będzie zbiorem dodatnio ocenionych elementów algebr w diagramie D "włożonych" w A:

$$Y_s = \{\iota^n_s(a_n) | s \in S, a_n \in |A_n|_s, o^n_s(s_n) = +\}$$

Niech dalej $Y' \subseteq |A|$ będzie zbiorem wartości w A termów w formułach oceny w Φ_o, tj. dla $s \in S$

$$Y'_s = \{t_A[v] \mid \forall X.(t)^+ \in \Phi_o, t \in |T_\Sigma(X)|_s, v\colon X \to |A|\}$$

Wówczas oceniona Σ-algebra $\langle A, o[(Y \cup Y')^+]\rangle$ z włożeniami $\iota^n\colon \langle A_n, o^n\rangle \to \langle A, o[Y^+]\rangle$, $n \in N$, jest kogranicą diagramu D w $\mathbf{OAlg}(\Sigma, \Phi)$.

Zatem: **1.{I,KP,KE,KZ}.{a,e}: TAK**.

"2.e" Dla $X \in |\mathbf{Set}^S|$, niech $A \in \mathbf{Alg}(\Sigma, \Phi_e)$ z jednością $\eta_X\colon X \to |A|$ będzie wolna nad X względem funktora $|\_|\colon \mathbf{Alg}(\Sigma, \Phi) \to \mathbf{Set}^S$. Niech dalej $Y \subseteq |A|$ będzie zbiorem wartości w A termów w formułach oceny w Φ_o, tj. dla $s \in S$

$$Y_s = \{t_A[v] \mid \forall X.(t)^+ \in \Phi_o, t \in |T_\Sigma(X)|_s, v\colon X \to |A|\}$$

Wówczas oceniona algebra $\langle A, o^-[Y^+]\rangle \in \mathbf{OAlg}(\Sigma, \Phi)$ z jednością $\eta_X\colon X \to |A|$ jest wolna nad X względem funktora $\mathbf{OG}_{\Sigma,\Phi} \to \mathbf{Set}^S$.

Zatem: **2.{a,e}: TAK**.

Odpowiedzi dla ocenionych algebr z konserwatywnymi homorfizmami (niemal wszystkie proste):

"1.{T,I}.b" Rozpatrzmy sygnaturę z jednym rodzajem s i stałą $a\colon s$. Niech $\langle A, o\rangle \in |\mathbf{KOAlg}(\Sigma)|$. Jeśli $o_s(a_A) = +$ to nie istnieje konserwatywny morfizm między $\langle A, o\rangle$ a $\langle A, o^-\rangle$; jeśli zaś $o_s(a_A) = -$ to nie istnieje konserwatywny morfizm między $\langle A, o\rangle$ a $\langle A, o[\{a_A\}^+]\rangle$ (w żadną stronę). W $\mathbf{KOAlg}(\Sigma)$ nie ma więc ani obiektu końcowego, ani początkowego.

Brak obiektu początkowego implikuje też nieistnienie lewego sprzężonego do $\mathbf{KOAlg}(\Sigma)$ z $\mathbf{Set}^S$ (bo lewe sprzężone są kociągłe, więc zachowują obiekty początkowe).
Zatem: **1.{T,Z,I,KZ}.{b,f}, 2.{b,f}: NIE**.

"1.{P,KP}.b" Rozpatrzmy sygnaturę z jednym rodzajem s i stałą $a\colon s$. W $\mathbf{KOAlg}(\Sigma)$ nie istnieje produkt ani koprodukt ocenionych algebr $\langle A, o\rangle$ i $\langle A', o'\rangle$ takich że $o_s(a_A) = +$ i $o_s(a_{A'}) = -$.
Zatem: **1.{P,KP}.{b,f}: NIE**.

"1.E.f" Rozważmy konserwatywne homomorfizmy $h_1, h_2\colon \langle A, o\rangle \to \langle A', o'\rangle$ w $\mathbf{KOAlg}(\Sigma, \Phi)$. Niech E bedzie podalgebrą A o nośniku $|E| = \{a \in |A| | h_1(a) = h_2(a)\}$, i niech o_E będzie o obcięte do $|E|$. Wówczas inkluzja $e\colon |E| \to |A|$ jest konserwatywnym homomorfizmem $e\colon \langle E, o_E\rangle \to \langle A.o\rangle$, który jest equalizatorem h_1 i h_2 w $\mathbf{KOAlg}(\Sigma, \Phi)$.
Zatem: **1.{E}.{b,f}: TAK**.

"1.KE.b" Rozpatrzmy sygnaturę Σ z rodzajami s, s' i jedną operacją binarną $f\colon s \times s \to s'$.
Niech A będzie następującą Σ-algebrą: $|A|_s = \{a, b\}$, gdzie $a \neq b$, $|A|_{s'} = \{a', z'\}$, a $f_A(a, b) = f_A(b, a) = a'$ i $f_A(a, a) = f_A(b, b) = z'$. Zdefinujmy Σ-algebrę B: $|B|_s = \{x_1, x_2, x_3\}$, $|S|_{s'} = \{x'_{12}, x'_{23}, x'_{1,3}, z'\}$ (wszystkie elementy wzajemnie różne) oraz $f_B(x_1, x_2) = f_B(x_2, x_1) = x'_{12}$, $f_B(x_2, x_3) = f_B(x_3, x_2) = x'_{23}$, $f_B(x_1, x_3) = f_B(x_3, x_1) = x'_{13}$ i $f_B(x_1, x_1) = f_B(x_2, x_2) = f_B(x_3, x_3) = z'$.
Rozważmy homomorfizmy $h, h'\colon A \to B$, gdzie $h_s(a) = x_1, h_s(b) = x_2, h'_s(a) = x_2, h'_s(b) = x_3$ (to definiuje też $h_{s'}(a') = x'_{12}$ i $h'_{s'}(a') = x'_{23}$ oraz $h_{s'}(z') = h'_{s'}(z') = z'$). h i h' są konserwatywnymi homomorfizmami $h, h'\colon \langle A, o^-\rangle \to \langle B, o^-[\{x_{13}\}^+]\rangle$.
Jeśli homomorfizm $k\colon B \to C$ spełnia $h; k = h'; k$ to $k_s(x_1) = k_s(x_2) = k_s(x_3)$, zatem także $k_{s'}(x'_{12}) = k_{s'}(x'_{23}) = k_{s'}(x'_{13})$, więc k nie może być konserwatywnym homomorfizmem z $\langle B, o^-[\{x_{13}\}^+]\rangle$, bo $(o^-[\{x_{13}\}^+])_{s'}(x'_{12}) = (o^-[\{x_{13}\}^+])_{s'}(x'_{23}) = -$, ale $(o^-[\{x_{13}\}^+])_{s'}(x'_{13}) = +$.
Zatem: **1.{KE}.{b,f}: NIE**.

Sytuacja z algebrami minimalistycznymi jest mniej oczywista. Przydatna będzie następująca obserwacja:

Zbudujmy Σ-algebrę minimalistycznych ocen $O \in |\mathbf{Alg}(\Sigma)|$, gdzie dla $s \in S$, $|O|_s = \{+, -\}$, a dla $f\colon s_1 \times \ldots \times s_n \to s$ i $x_1, \ldots, x_m \in \{+, -\}$, $f_O(x_1, \ldots, x_m) = +$ jeśli $+ \in \{x_1, \ldots, x_m\}$ i $f_O(x_1, \ldots, x_m) = -$ jeśli $x_1 = \ldots = x_m = -$. Oceniona Σ-algebra $\langle A, o\rangle$ jest minimalistyczna wtedy i tylko wtedy gdy $o\colon A \to O$ jest Σ-homomorfizmem. Jądro tego homomorfimzu $K(o) \subseteq |A| \times |A|$ jest kongruencją na A, która "utożsamia" elementy tak samo ocenione. Σ-homomorfizm $h\colon A \to A'$ jest konserwatywnym homomorfizmem minimalistycznych Σ-algebr $h\colon \langle A, o\rangle \to \langle A', o'\rangle$ wtedy i tylko wtedy gdy $h; o' = o\colon A \to O$ (w kategorii $\mathbf{Alg}(\Sigma)$).

"1.I.c" Zauważmy, że jeśli $\langle A, o\rangle$ jest minimalistyczna, to dla każdego termu bez zmiennych $t \in |T_\Sigma|_s$, $o_s(t_A) = -$. Z tego wynika, że $\langle T_\Sigma, o^-\rangle$ jest obiektem początkowym w $\mathbf{MAlg}(\Sigma)$ i w $\mathbf{KMAlg}(\Sigma)$.
Zatem: **1.I.{c,d}: TAK**.

"1.I.f" Dla dowolnej sygnatury Σ ze stałą $a\colon s$, nie istnieje żadna minimalistyczna Σ-algebra spełniająca formułę oceny $\forall\emptyset.(a)^+$.
Zatem: **1.{I,KZ,T,Z}.{g,h}, 2.{g,h}: NIE**.

"1.KP.c" Rozważmy rodzinę minimalistycznych Σ-algebr $\langle A_n, o^n\rangle \in |\mathbf{MAlg}(\Sigma)|$, $n \in N$.
Niech A z włożeniami $\iota^n\colon A_n \to A$ bedzie koproduktem rodziny $\langle A_n\rangle_{n\in N}$ w $\mathbf{Alg}(\Sigma)$. Niech $Y \subseteq |A|$ będzie zbiorem dodatnio ocenionych elelementów algebr rodziny "włożonych" w A:

$$Y_s = \{\iota^n_s(a_n) | s \in S, a_n \in |A_n|_s, o^n_s(s_n) = +\}$$

Wówczas oceniona Σ-algebra $\langle A, o[Y^+]\rangle$ z włożeniami $\iota^n\colon \langle A_n, o^n\rangle \to \langle A, o[Y^+]\rangle$, $n \in N$, jest minimalistyczna (dowód – równoważna konstrukcja poniżej) i jest koproduktem rodziny $\langle A_n, o^n\rangle \in |\mathbf{MAlg}(\Sigma)|$, $n \in N$, w $\mathbf{MAlg}(\Sigma)$.

Rozważmy algebrę termów z elementami algebr A_n, $n \in N$, jako "zmiennymi": $T_\Sigma(U)$, gdzie $U = \biguplus_{n\in N} |A_n|$ (będę pomijał włożenia ze składowych zbiorów w ich sumę rozłączną, pisząc $a \in U_s$ dla $s \in S$, $n \in N$, $a \in |A_n|_s$). Dodajmy oceny o elementów algebry $T_\Sigma(U)$: $o_s\colon |T_\Sigma(U)|_s \to \{+,-\}$, gdzie $o\colon T_\Sigma(U) \to O$ jest jedynym Σ-homomorfizmem, który rozszerza warościowanie $o_s\colon U \to \{+,-\}$ dane przez oceny elementów w algebrach rodziny: dla wszystkich $n \in N$ i $a \in |A_n|_s$, $o_s(a) = o^n_s(a)$.

Niech $\equiv\ \subseteq |T_\Sigma(U)| \times |T_\Sigma(U)|$ będzie najmniejszą kongruencją w algebrze $T_\Sigma(U)$ taką, że $f_{A_n}(a_1,\ldots,a_m) \equiv f(a_1,\ldots,a_m)$ dla wszystkich $f\colon s_1\times\ldots\times s_m \to s$, $n \in N$, $a_1 \in |A_n|_{s_1},\ldots,a_m \in |A_n|_{s_m}$. Przypomnijmy, że $T_\Sigma(U)/{\equiv}$ z włożeniami $\iota^n\colon A_n \to T_\Sigma(U)/{\equiv}$ danymi przez $\iota^n_s(a) = [a]_\equiv$ dla $n \in N$, $s \in S$ i $a \in |A_n|_s$ jest koproduktem rodziny A_n, $n \in N$, w $\mathbf{Alg}(\Sigma)$.

Zachodzi też $\equiv\ \subseteq K(o)$, bo dla $f\colon s_1 \times \ldots \times s_m \to s$, $n \in N$, $a_1 \in |A_n|_{s_1},\ldots,a_m \in |A_n|_{s_m}$, $o_s(f_{A_n}(a_1,\ldots,a_m)) = o^n_s(f_{A_n}(a_1,\ldots,a_m)) = f_O(o^n_{s_1}(a_1),\ldots,o^n_{s_m}(a_m)) = f_O(o_{s_1}(a_1),\ldots,o_{s_m}(a_m)) = o_s(f(a_1,\ldots,a_m))$ i $K(o)$ jest kongruencją w $T_\Sigma(U)$.

Dalej łatwo sprawdzić, że $\langle T_\Sigma(U), o\rangle$ z włożeniami $\iota^n\colon \langle A_n, o^n\rangle \to \langle T_\Sigma(U), o\rangle$ jest koproduktem rodziny $\langle A_n, o^n\rangle$, $n \in N$, w $\mathbf{MAlg}(\Sigma)$.

Łatwo też widać, że homomorfizmy $\iota_n\colon \langle A_n, o^n\rangle \to \langle T_\Sigma(U), o\rangle$, $n \in N$, są konserwatywne, więc konstrukcja działa także w $\mathbf{KMAlg}(\Sigma)$ i daje koprodukt także w tej kategorii.

Zatem: **1.KP.{c,d}: TAK**.

"1.KP.g" Rozważmy sygnaturę Σ z dwoma rodzajami s, s' i jedną operacją $f\colon s \times s \to s'$, oraz Σ-równość $\forall x, y{:}s'.x = y$. Rozważmy Σ-algebry A i A': $|A|_s = \{a_1, a_2\}$, $|A|_{s'} = \{a'\}$, $|A'|_s = \emptyset$, $|A'|_{s'} = \{x'\}$ (to też definiuje operacje f_A, $f_{A'}$). W kategorii $\mathbf{MAlg}(\Sigma, \{\forall x, y{:}s'.x = y\})$ nie istnieje koprodukt minimalistycznych algebr $\langle A, o^-\rangle$ i $\langle A', o^+\rangle$, gdzie $o^+_{s'}(x') = +$.

Przypuśćmy bowiem, że $\langle B, o\rangle$ z włożeniami $h_1\colon \langle A, o^-\rangle \to \langle B, o\rangle$ i $h_2\colon \langle A', o^+\rangle \to \langle B, o\rangle$ jest ich koproduktem. Niech $b_1 = (h_1)_s(a_1)$ i $b_2 = (h_1)_s(a_2)$. Łatwo pokazać, że $|B|_s = \{b_1, b_2\}$ i $b_1 \neq b_2$. Mamy też: $|B|_{s'} = \{b'\}$, gdzie $b' = (h_1)_{s'}(a') = (h_2)_{s'}(x')$ oraz $b' = f_{B'}(b_1, b_2)$ i $o'_{s'}(b') = +$. Zatem $o_{s'}(b_1) = +$ lub $o_{s'}(b_2) = +$. Niech $o_{s'}(b_1) = +$ (drugi przypadek jest symetryczny). Rozważmy minimalistyczną Σ-algebrę $\langle B, o'\rangle$, gdzie $o'_{s'}(b_1) = -$ i $o_{s'}(b_2) = +$, a $o'_{s'}(b') = +$. Wówczas $h_1\colon \langle A, o^-\rangle \to \langle B, o'\rangle$ i $h_2\colon \langle A', o^+\rangle \to \langle B, o'\rangle$, ale dla każdego homomorfizmu $k\colon B \to B$, jeśli $h_1;k = h_1$ to $k_{s'}(b_1) = b_1$, zatem k nie jest oceniającym homomorfizmem z $\langle B, o\rangle$ do $\langle B, o'\rangle$ — sprzeczność.

Zatem: **1.KP.g: NIE**.

"1.KE.c" Niech Σ będzie sygnaturą z dwoma rodzajami s, s' i jedną operacją dwuargumentową $f\colon s \times s \to s'$. Niech A będzie następująca Σ-algebrą: $|A|_s = \emptyset$, $|A|_{s'} = \{a\}$. Niech B będzie następującą Σ-algebrą: $|B|_s = \{x_1, x_2\}$, $|B|_{s'} = \{x', y', z'\}$ (wszystkie elementy wzajemnie różne), gdzie $f_B(x_1, x_2) = f_B(x_2, x_1) = x'$, $f_B(x_1, x_1) = f_B(x_2, x_2) = z'$. Elementy algebry B oceniamy następująco: $o_s(x_1) = o_s(x_2) = -$, $o_{s'}(x') = o_{s'}(z') = -$, $o_{s'}(y') = +$. Rozważmy dwa oceniające homomorfizmy minimalistycznych Σ-algebr: $h_1, h_2\colon \langle A, o^-\rangle \to \langle B, o\rangle$ zdefiniowane przez $(h_1)_{s'}(a) = x'$, $(h_1)_{s'}(a) = y'$.

Przypuśćmy, że istnieje koequalizator $k\colon \langle B, o\rangle \to \langle B', o'\rangle$ morfizmów h_1 i h_2 w $\mathbf{MAlg}(\Sigma)$.

Łatwo pokazać, że $f_{B'}(k_s(x_1), k_s(x_2)) = k_{s'}(x') = k_{s'}(y')$ i $o'_s(f_{B'}(k_s(x_1), k_s(x_2))) = o'_{s'}(k_{s'}(x')) = o'_{s'}(k_{s'}(y')) = +$. Zatem $o'_s(k_s(x_1)) = +$ lub $o'_S(k_s(x_2)) = +$. Niech $o'_s(k_s(x_1)) = +$, drugi przypadek jest symetryczny. Rozważmy minimalistyczną Σ-algebrę $\langle B', o''\rangle$, gdzie o'' jest takie jak o' poza $\{k_s(x_1), k_s(x_2)\}$, ale $o''_s(k_s(x_1)) = -$ i $o''_s(k_s(x_2)) = +$. Wówczas $k\colon \langle B, o\rangle \to \langle B', o''\rangle$ i $h_1;k = h_2;k$, ale dla każdego homomorfizmu $g\colon B' \to B'$, jeśli $k;g = k$ to $g_s(k_s(x_1)) = k_s(x_1)$, zatem g nie jest oceniającym homomorfizmem z $\langle B', o'\rangle$ do $\langle B', o''\rangle$ — sprzeczność.

Zatem: **1.KE.{c,g}: NIE**.

"1.T.c" Niech Σ będzie sygnaturą jednorodzajową ze stałą $a\colon s$. Przypuśćmy, że $\langle A, o\rangle$ jest obiektem końcowym w $\mathbf{MAlg}(\Sigma)$. Oczywiście $o_s(a_A) = -$.

Niech B będzie algebrą o dwuelementowym nośniku $|B|_s = \{x, a_B\}$ ($x \neq a_B$). Niech $k\colon B \to A$ będzie (jedynym) oceniającym Σ-homomorfizmem z $\langle B, o^-[\{x\}^+]\rangle$ do $\langle A, o\rangle$. Mamy więc $o_s(k_s(x)) = +$ i $k_s(x) \neq a_A$. Teraz: z minimalistycznej Σ-algebry $\langle B, o^-\rangle$ do $\langle A, o\rangle$ istnieją przynajmniej dwa różne oceniające homomorfizmy $h, h'\colon \langle B, o^-\rangle \to \langle A, o\rangle$ ($h_s(x) = k_s(x), h_s(a_B) = a_A$ i $h'_s(x) = h'_s(a_B) = a_A$) — sprzeczność.

Zatem: **1.T.{c,g}: NIE**.

"1.P.c" Rozważmy sygnaturę Σ z dwoma rodzajami $\{s, s'\}$ i jedną operacją binarną $f\colon s \times s \to s'$. Niech A będzie następującą Σ-algebrą: $|A|_s = \{a_1, a_2\}$, $|A|_{s'} = \{a', z'\}$, $f_A(a_1, a_2) = f_A(a_2, a_1) = f_A(a_1, a_1) = a'$, $f_A(a_2, a_2) = z'$. $\langle A, o\rangle$, gdzie $o_s(a_1) = +$, $o_s(a_2) = -$, $o_{s'}(a') = +$ i $o_{s'}(z') = -$, jest algebrą minimalistyczną (izomorficzną z $O \in |\mathbf{MAlg}(\Sigma)|$). Przypuśćmy, że w $\mathbf{MAlg}(\Sigma)$ istnieje produkt $\langle P, o'\rangle$ z rzutowaniami $h_1, h_2\colon \langle P, o'\rangle \to \langle A, o\rangle$ algebr $\langle A, o\rangle$ i $\langle A, o\rangle$. Rozważmy minimalistyczną algebrę $\langle A \times A, o^-\rangle$; niech $k\colon \langle A \times A, o^-\rangle \to \langle P, o'\rangle$ bedzie jedynym oceniającym homomorfizmem takim, że $k; h_1 = \pi_1$ i $k; h_2 = \pi_2$ (gdzie $\pi_1, \pi_2\colon A \times A \to A$ to zwykłe rzutowania iloczynu na pierwsza i drugą współrzędną, odpowiednio). Ponieważ $(h_2)_s(k_s(\langle a_1, a_2\rangle)) = a_2$ i $(h_1)_s(k_s(\langle a_2, a_1\rangle)) = a_2$, więc $o'_s(k_s(\langle a_1, a_2\rangle)) = o'_s(k_s(\langle a_2, a_1\rangle)) = -$. Zatem $o'_{s'}(f_P(k_s(\langle a_1, a_2\rangle), k_s(\langle a_2, a_1\rangle))) = -$. Z drugiej strony $(h_1)_s(k_s(\langle a_1, a_1\rangle)) = a_1$, więc $o'_s(k_s(\langle a_1, a_1\rangle)) = +$. Zatem $o'_{s'}(f_P(k_s(\langle a_1, a_1\rangle), k_s(\langle a_2, a_1\rangle))) = +$.
Ale $f_P(k_s(\langle a_1, a_1\rangle), k_s(\langle a_2, a_1\rangle)) = k_{s'}(f_{A\times A}(\langle a_1, a_1\rangle, \langle a_2, a_1\rangle)) = k_{s'}(\langle f_A(a_1, a_2), f_A(a_1, a_1)\rangle) = k_{s'}(\langle a', a'\rangle)$ oraz $f_P(k_s(\langle a_1, a_2\rangle), k_s(\langle a_2, a_1\rangle)) = k_{s'}(\langle f_A(a_1, a_2), f_A(a_2, a_1)\rangle) = k_{s'}(\langle a', a'\rangle)$ — sprzeczność.

Zatem: **1.P.{c,g}: NIE**.

"1.E.c" Działa konstrukcja equalizatora opisana w **1.E.f**: equalizator oceniających homomorfizmów $h, h'\colon \langle A, o\rangle \to \langle A', o'\rangle$ jest zadany przed poalgebrę E algebry A o nośniku $|E|_s = \{a \in |A|_s | h_s(a) = h'_s(a)\}$, z ocenami o_E odziedziczonymi z $\langle A, o\rangle$. Łatwo zauważyć, że jeśli $\langle A, o\rangle$ jest minimalistyczna, to $\langle E, o_E\rangle$ jest minimalistyczna i jeśli jakaś rozważana Σ-formuła jest spełniona w $\langle A, o\rangle$ to jest też spełniona w $\langle E, o_E\rangle$. To pokazuje istnienie equalizatorów w $\mathbf{MAlg}(\Sigma, \Phi)$. Ponadto, inkluzja z E do A jest konserwatywnym homomorfizmem z $\langle E, o_E\rangle$ w $\langle A, o\rangle$, co z kolei pokazuje istnienie equalizatorów w $\mathbf{KMAlg}(\Sigma, \Phi)$.

Zatem: **1.E.{c,g,d,h}**.

"2.c" Zauważmy, że oceniane algebry wolne definiowane dla przypadku **2.a** są minimalistyczne — są więc też wolne z $\mathbf{MAlg}(\Sigma)$, która jest pełną podkategorią $\mathbf{OAlg}(\Sigma)$, względem funktora $\mathbf{MG}_\Sigma\colon \mathbf{MAlg}(\Sigma) \to \mathbf{Set}^S$, który jest obcięciem funktora $\mathbf{OG}_\Sigma\colon \mathbf{OAlg}(\Sigma) \to \mathbf{Set}^S$ do $\mathbf{MAlg}(\Sigma)$.

Zatem: **2.c: TAK**.

I jeszcze o minimalistycznych algebrach z konserwatywnymi homomorfizmami.

"1.KZ.d" Kategoria $\mathbf{KMAlg}(\Sigma)$ jest kategorią przecinkową

$$(\mathbf{Id}_{\mathbf{Alg}(\Sigma)}\colon \mathbf{Alg}(\Sigma) \to \mathbf{Alg}(\Sigma), \mathbf{C}_O\colon \mathbb{1} \to \mathbf{Alg}(\Sigma))$$

która jest kozupełna (bo $\mathbf{Alg}(\Sigma)$ jest kozupełna i funktor identycznościowy jest kociągły).

Zatem: **1.{I,KP,KE,KZ}.d: TAK**.

"1.KP.h" Dla sygnatury Σ z jednym rodzajem s i bez operacji, rozważając równość $\forall x, y{:}s.x = y$. Oceniane algebry $\langle A, o\rangle \in |\mathbf{KMAlg}(\Sigma, \{\forall x, y{:}s.x = y\})|$ mają jednoelementowy nośnik, a ten element może być oceniony albo pozytywnie, albo negatywnie. Ponieważ morfizmy w $\mathbf{KMAlg}(\Sigma, \{\forall x, y{:}s.x = y\})$ są konserwatywne, w tej kategorii nie istnieje koprodukt minimalistycznych Σ-algebr $\langle\{x\}, o^-\rangle$ i $\langle\{x\}, o^+\rangle$, gdzie $o^+_s(x) = +$.

Zatem: **1.KP.h: NIE**.

"1.KE.h" Zauważmy, że jeśli $h\colon A \to B$ jest surjektywnym konserwatywnym Σ-homomorfizmem między minimalistycznymi Σ-algebrami $\langle A, o\rangle$ i $\langle A', o'\rangle$, to dla każdej rozważanej Σ-formuły φ, jeśli $\langle A, o\rangle \models \varphi$ to $\langle A', o'\rangle \models \varphi$. Koequalizatory w kategorii $\mathbf{KMAlg}(\Sigma)$ są konstruowane jak w $\mathbf{Alg}(\Sigma)$, zatem są surjektywne. Są więc też koequalizatorami w $\mathbf{KMAlg}(\Sigma, \Phi)$, dla dowolnego zbioru rozważanych Σ-formuł Φ.
Zatem **1.KE.{d,h}: TAK**.

"1.T.d" Kategoria $\mathbf{KMAlg}(\Sigma)$ jest kategorią $\mathbf{Alg}(\Sigma)\downarrow O$ obiektów kategorii Σ-algebr nad Σ-algebrą O. Obiektem końcowym w tej kategorii jest $\langle O, id_O\rangle$.
Zatem: **1.T.d: TAK**.

"1.P.d" Rozważmy niepustą rodzinę minimalistycznych Σ-algebr $\langle A_n, o^n\rangle$, $n \in N$. Niech P z rzutowaniami $\pi_n\colon P \to A_n$ będzie "pullbackiem" rodziny homomorfizmów $o^n\colon A_n \to O$ w $\mathbf{Alg}(\Sigma)$. P jest produktem A_n, $n \in N$, w $\mathbf{Alg}(\Sigma)\downarrow O$, a $\langle P, o\rangle$, gdzie $o = \pi_n; o^n$ dla dowolnego (i dla wszystkich) $n \in N$, jest produktem $\langle A_n, o^n\rangle$, $n \in N$, w $\mathbf{KMAlg}(\Sigma)$.
Innymi słowy: P jest podalgebrą produktu A_n, $n \in N$, w $\mathbf{Alg}(\Sigma)$ złożoną z "krotek" $\langle x_n\rangle_{n\in N}$ elementów $x_n \in |A_n|$ o wspólnej ocenie elementów: $o^n(x_n) = o^m(x_m)$ dla wszystkich $n, m \in N$. Co więcej, ta konstrukcja zachowuje prawdziwość rozważanych Σ-formuł: jesli φ jest równością lub formułą oceniającą oraz dla wszystkich $n \in N$, $\langle A_n, o^n\rangle \models \varphi$, to także $\langle P, o\rangle \models \varphi$.
Zatem: **1.T.{d,h}: TAK**.

"2.d" Z konstrukcji w **1.T.d**, funktor $\mathbf{KMG}_\Sigma$ nie jest ciągły, nie ma więc lewego sprzężonego.
Zatem: **2.d: NIE**.

Podsumowując:

	T	P	E	Z	I	KP	KE	KZ	LS
$\mathbf{OAlg}(\Sigma)$	*TAK*	*TAK*	*TAK*	*TAK*	*TAK*	*TAK*	*TAK*	*TAK*	*TAK*
$\mathbf{OAlg}(\Sigma, \Phi)$	*TAK*	*TAK*	*TAK*	*TAK*	*TAK*	*TAK*	*TAK*	*TAK*	*TAK*
$\mathbf{KOAlg}(\Sigma)$	*NIE*	*NIE*	*TAK*	*NIE*	*NIE*	*NIE*	*NIE*	*NIE*	*NIE*
$\mathbf{KOAlg}(\Sigma, \Phi)$	*NIE*	*NIE*	*TAK*	*NIE*	*NIE*	*NIE*	*NIE*	*NIE*	*NIE*
$\mathbf{MAlg}(\Sigma)$	*NIE*	*NIE*	*TAK*	*NIE*	*TAK*	*TAK*	*NIE*	*NIE*	*TAK*
$\mathbf{MAlg}(\Sigma, \Phi)$	*NIE*	*NIE*	*TAK*	*NIE*	*NIE*	*NIE*	*NIE*	*NIE*	*NIE*
$\mathbf{KMAlg}(\Sigma)$	*TAK*	*TAK*	*TAK*	*TAK*	*TAK*	*TAK*	*TAK*	*TAK*	*NIE*
$\mathbf{KMAlg}(\Sigma, \Phi)$	*NIE*	*TAK*	*TAK*	*NIE*	*NIE*	*NIE*	*TAK*	*NIE*	*NIE*