Egzamin z wykładu monograficznego

Teoria kategorii w podstawach informatyki
semestr zimowy 2020/21

Pojęcia, terminologia i notacja:

Przyjmujemy zwykłą definicję sygnatury algebraicznej Σ, domyślnie $\Sigma = \langle S, \Omega\rangle$, i Σ-algebry A, domyślnie przyjmując oznaczenia $|A| = \langle |A|_s\rangle_{s\in S}$ oraz, dla każdej nazwy operacji $f\colon s_1 \times \cdots \times s_n \to s$ w Ω, $f_A\colon |A|_{s_1} \times \cdots \times |A|_{s_n} \to |A|_s$ dla, odpowiednio, nośnika i operacji o nazwie f w Σ-algebrze A. Przyjmujemy też zwykłą definicję Σ-homomorfizmu. W razie potrzeby stosujemy też inne pojęcia i notacje z wykładu.

Rozważmy dowolną sygnaturę $\Sigma = \langle S, \Omega\rangle$.

Σ-*algebra z pudełkami* to Σ-algebra, której każdy element leży w swoim prostopadłościennym pudełku o podanych wymiarach — zatem jest to para $\langle A, p\rangle$, gdzie A jest Σ-algebrą, a $p = \langle p_s\colon |A_s| \to \mathcal{R}_+^3\rangle_{s\in S}$ ($\mathcal{R}_+$ to zbiór wszystkich nieujemnych liczb rzeczywistych). Dla $s \in S$, $a \in |A|_s$ i $p_s(a) = \langle x, y, z\rangle$ przyjmijmy notację $p_s^{dl}(a) = x$, $p_s^{sz}(a) = y$, $p_s^{wy}(a) = z$.

Dla Σ-algebr z pudełkami $\langle A, p\rangle$ i $\langle B, q\rangle$, ich *wymiarowy homomorphizm* $h\colon \langle A, p\rangle \to \langle B, q\rangle$ to taki Σ-homomorfizm algebr $h\colon A \to B$, który nie zmniejsza wymiarów pudełek, tzn. dla $s \in S$ i $a \in |A|_s$ zachodzi $p_s^{dl}(a) \le q_s^{dl}(h_s(a))$, $p_s^{sz}(a) \le q_s^{sz}(h_s(a))$ oraz $p_s^{wy}(a) \le q_s^{wy}(h_s(a))$. Natomiast *objętościowy homomorphizm* $h\colon \langle A, p\rangle \to \langle B, q\rangle$ to taki Σ-homomorfizm algebr $h\colon A \to B$, który nie zmniejsza objętości (iloczynu wymiarów) pudełek, tzn. dla $s \in S$ i $a \in |A|_s$ zachodzi $p_s^{dl}(a)p_s^{sz}(a)p_s^{wy}(a) \le q_s^{dl}(h_s(a))q_s^{sz}(h_s(a))q_s^{wy}(h_s(a))$.

Σ-*algebra ze sznurkami* to Σ-algebra, w której do każdego elementu doczepiono (być może nieskończony) sznurek o podanej długości — zatem jest to para $\langle A, l\rangle$, gdzie A jest Σ-algebrą, a $l = \langle l_s\colon |A_s| \to \mathcal{R}_{+\infty}\rangle$ ($\mathcal{R}_{+\infty}$ to zbiór wszystkich nieujemnych liczb rzeczywistych z dodanym dodatkowym elementem największym ∞). Σ-*algebra ze skończonymi sznurkami* to Σ-algebra ze sznurkami $\langle A, l\rangle$, w której wszystkie sznurki mają skończoną długość, tj. $l = \langle l_s\colon |A_s| \to \mathcal{R}_+\rangle_{s\in S}$. Dla Σ-algebr ze sznurkami $\langle A, l\rangle$ i $\langle A', l'\rangle$, ich *homomorphizm* $h\colon \langle A, l\rangle \to \langle A', l'\rangle$ to taki Σ-homomorfizm algebr $h\colon A \to A'$, który nie zmniejsza długości sznurków, tzn. dla $s \in S$ i $a \in |A|_s$ zachodzi $l_s(a) \le l'_s(h_s(a))$ (przy czym porządek na liczbach rzeczywistych rozszerzamy tak, że $r \le \infty$ dla wszystkich $r \in \mathcal{R}_+$).

Zadanie:

1. *Które z poniższych kategorii mają*
   - T. *obiekt końcowy*
   - BP. *(binarne) produkty (każdej pary obiektów)*
   - E. *ekwalizatory (każdej pary równoległych morfizmów)*
   - FC. *granice każdego skończonego diagramu*
   - P. *produkty (każdej rodziny obiektów)*
   - C. *granice każdego diagramu*
   - I. *obiekt poczatkowy*
   - BCP. *(binarne) koprodukty (każdej pary obiektów)*
   - CE. *koekwalizatory (każdej pary równoległych morfizmów)*
   - FCC. *kogranice każdego skończonego diagramu*
   - CP. *koprodukty (każdej rodziny obiektów)*
   - CC. *kogranice każdego diagramu*

   dla każdej sygnatury Σ? Udowodnij lub uzasadnij odpowiedź negatywną.
   - (a) $\mathbf{AlgWP}(\Sigma)$: kategoria Σ-algebr z pudełkami, z wymiarowymi homomorfizmami jako morfizmami, z ich zwykłym złożeniem;
   - (b) $\mathbf{AlgOP}(\Sigma)$: kategoria Σ-algebr z pudełkami, z objętościowymi homomorfizmami jako morfizmami, z ich zwykłym złożeniem;
   - (c) $\mathbf{AlgS}(\Sigma)$: kategoria Σ-algebr ze sznurkami, z ich homomorfizmami, z ich zwykłym złożeniem;
   - (d) $\mathbf{AlgSS}(\Sigma)$: kategoria Σ-algebr ze skończonymi sznurkami, z ich homomorfizmami, z ich zwykłym złożeniem.
2. *Które z poniższych funktorów mają*
   - L. *lewy sprzężony*
   - P. *prawy sprzężony*

   dla każdej sygnatury Σ? Udowodnij lub uzasadnij odpowiedź negatywną.
   - (a) $\mathcal{U}^{WP}_\Sigma\colon \mathbf{AlgWP}(\Sigma) \to \mathbf{Alg}(\Sigma)$: funktor zapominający o pudełkach,
     tzn. $\mathcal{U}^{WP}_\Sigma(\langle A, p\rangle) = A$ i $\mathcal{U}^{WP}_\Sigma(h\colon \langle A, p\rangle \to \langle B, q\rangle) = (h\colon A \to B)$;
   - (b) $\mathcal{U}^{OP}_\Sigma\colon \mathbf{AlgOP}(\Sigma) \to \mathbf{Alg}(\Sigma)$: funktor zapominający o pudełkach,
     tzn. $\mathcal{U}^{OP}_\Sigma(\langle A, p\rangle) = A$ i $\mathcal{U}^{OP}_\Sigma(h\colon \langle A, p\rangle \to \langle B, q\rangle) = (h\colon A \to B)$;
   - (c) $\mathcal{U}^{S}_\Sigma\colon \mathbf{AlgS}(\Sigma) \to \mathbf{Alg}(\Sigma)$: funktor zapominający o sznurkach,
     tzn. $\mathcal{U}^{S}_\Sigma(\langle A, l\rangle) = A$ i $\mathcal{U}^{S}_\Sigma(h\colon \langle A, l\rangle \to \langle B, k\rangle) = (h\colon A \to B)$;
   - (d) $\mathcal{U}^{SS}_\Sigma\colon \mathbf{AlgSS}(\Sigma) \to \mathbf{Alg}(\Sigma)$: funktor zapominający o sznurkach,
     tzn. $\mathcal{U}^{SS}_\Sigma(\langle A, l\rangle) = A$ i $\mathcal{U}^{SS}_\Sigma(h\colon \langle A, l\rangle \to \langle B, k\rangle) = (h\colon A \to B)$.

Uwagi:

- Można korzystać z omawianych na wykładzie konstrukcji i twierdzeń bez powtarzania ich dowodów.
- Odpowiedzi na powyższe pytania nie są niezależne. Na przykład, w oczywisty sposób są powiązane zadania 1.P.a, 1.T.a i 1.BP.a: dowód istnienia produktów wszystkich rodzin obiektów w każdej kategorii $\mathbf{AlgWP}(\Sigma)$ pokazywałby też istnienie obiektu końcowego (produktu pustej rodziny obiektów) i produktów binarnych w $\mathbf{AlgWP}(\Sigma)$, a kontrprzykład na istnienie produktu dwóch obiektów w kategorii $\mathbf{AlgWP}(\Sigma)$ byłby kontrprzykładem na istnienie produktów dowolnych rodzin obiektów w tej kategorii. Są też inne, być może mniej oczywiste powiązania. W takich przypadkach wystarczy to po prostu wskazać, nie powtarzając argumentacji. Tak naprawdę jest tu więc znacznie mniej pytań niż mogłoby się wydawać na pierwszy rzut oka.