TOPOLOGIA I
Pomocnik studenta

Zintegrowane notatki do wykładu
na Wydziale MIM UW
Semestr zimowy r. akad. 2012/13

Stefan.Jackowski@mimuw.edu.pl

3 lutego 2013

Spis treści

Wstęp

Topologią jest dziedziną matematyki w której nadaje się precyzyjny, abstrakcyjny sens intuicjom związanym z pojęciami ciągłości, deformacji, spójności oraz analizy jakościowej wzajemnego położenia obiektów geometrycznych - stąd dawna nazwa topologii *Analysis situs*, czyli analiza położenia. Topologia bywa określana jako ”elastyczna geometria”; czyli nauka o relacjach geometrycznych abstrahujących od pomiarów odległości, ale dopuszczających ciągłe przekształcenia obiektów geometrycznych. Relacje przystawania czy izometrii znane z geometrii zastępują w topologii pojęcia homeomorfizmu lub jeszcze bardziej zgrubne homotopijnej równoważności obiektów geometrycznych. Niezmiennikiem homeomorfizmu jest np. zwartość i spójność przestrzeni; niezmiennikiem homotopijnych równoważności tylko spójność i jej wyżej wymiarowe odpowiedniki (”dziury w przestrzeni”).

Początki rozważań topologicznych znajdują się w pracach Leonarda Eulera, ale pierwszego całościowego ujęcia idei topologicznych dokonał Johann Benedict Listing w wydanej w 1847 roku książce *Vorstudien zur Topologie*, który wprowadził też nazwę "Topologia" od greckiego słowa tópos - miejsce. Kolejne przełomy w rozwoju topologii są związane ze sformułowaniem jej podstawowych i pojęć w terminach teorii mnogości, rozwiniętej przez Georga Cantora pod koniec XIX w. oraz z wprowadzeniem narzędzi algebraicznych do badania własności topologicznych przez Henri Poincaré na początku wieku XX. Do rozwoju topologii wybitnie przyczynili się w okresie międzywojennym warszawscy matematycy Kazimierz Kuratowski, Karol Borsuk i Samuel Eilenberg (od 1939 r. w USA).

Tak jak przewidywał Poincaré, metody topologiczne wywarły ogromny wpływ na badania matematyczne w wielu dziedzinach. Aż 15 matematyków otrzymało medal Fieldsa za osiągnięcia w dziedzinie topologii lub za osiągnięcia w geometrii i analizie globalnej motywowane ideami topologicznymi. Topologia przeplata się z niemal wszystkimi działami matematyki czystej, a w ostatnich latach jej idee są wykorzystywane coraz szerzej w informatyce teoretycznej i robotyce; obok tradycyjnych działów topologii: topologii mnogościowej (ogólnej), algebraicznej, geometrycznej coraz więcej mówi się o topologii obliczeniowej (computational topology).

Poniższe notatki stanowią zintegrowaną wersję prezentacji wyświetlanych podczas wykładu, uzupełnionych o wiele szczegółów i dowodów, które były szkicowane na tablicy lub pomijane. Studentów zachęcam do korzystania z tych notatek równolegle z lekturą skryptu S. Betley, J. Chaber, E.Pol, R.Pol *TOPOLOGIA I, wykłady i zadania*, wrzesień 2012 oznaczanego dalej BCPP. Zauważycie z pewnością pewne różnice zarówno w zakresie materiału, jak i rozkładu akcentów. Mam jednak nadzieję, że spojrzenie na topologię z różnych perspektyw pozwoli Wam lepiej zrozumieć jedne z najważniejszych idei matematyki. Notatki nie zawierają zadań, które są osobno opublikowane. Uwagi Czytelników mile widziane.

Rozdział 1

Ciągłość i topologia

Nadanie precyzyjnego sensu intiucyjnemu pojęciu ciągłości jest jednym z głównych tematów dziedziny matematyki, zwanej topologią. Definicja funkcji ciągłej znana z podstawowego wykładu Analizy Matematycznej dotyczy jednynie liczb rzeczywistych i wykorzystuje dwie struktury, w które wyposażone są liczby rzeczywiste: dodawanie i porządek. Definicja topologii w zbiorze motywowana jest pytaniem, jaka możliwie najsłabsza struktura jest potrzebna, aby mówić o ciągłości w taki sposób, by w znanych przypadkach pokrywało się ono z faktami z analizy matematycznej oraz z intuicją geometryczną związaną z potocznym rozumieniem tego pojęcia.

1.1 Ciągłość funkcji wg. Cauchy

Z Analizy Matematycznej znana jest następująca definicja ciągłości funkcji:

Definicja 1.1.1 (Cauchy[1])**.** Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie będzie funkcją rzeczywistą. Mówimy, że f jest ciągła jeśli dla każdego punktu $x_0 \in \mathbb{R}$ i dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że zachodzi implikacja:

$$|x_0 - x| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x_0) - f(x)| < \epsilon$$

Następne stwierdzenie mówi, że aby mówić o ciągłości wystarczy relacja porządku liczb rzeczywistych, a dokładniej warunek Cauchy można sformułować odwołując się jedynie do odcinków otwartych:

Stwierdzenie 1.1.1. *Funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciagła wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego odcinka otwartego $(c,d) \subset \mathbb{R}$ i dowolnego punktu $x \in f^{-1}((c,d))$ istnieje odcinek owarty $(a,b) \ni x$ taki, że $(a,b) \subset f^{-1}((c,d))$, czyli przeciwobraz $f^{-1}((c,d))$ jest sumą mnogościową odcinków otwartych.* □

Ponieważ przeciwobraz sumy zbiorów jest sumą przeciwobrazów ostatnie stwierdzenie można sformułować tak: odwzorowanie jest ciągłe jeśli przeciwobrazy sum mnogościowych odcinków otwartych są sumami mnogościowymi odcinków otwartych.

[1] Augustin Louis Cauchy (Paris 1789 - Sceaux (near Paris) 1857) pioneered the study of analysis, both real and complex, and the theory of permutation groups. He also researched in convergence and divergence of infinite series, differential equations, determinants, probability and mathematical physics. [Mac Tutor]

1.2 Topologie i przestrzenie topologiczne

Definicja topologii w dowolnym zbiorze jest motywowana własnościami podzbiorów prostej rzeczywistej będących sumami mnogościowymi odcinków otwartych, czyli takich podzbiorów $U \subset \mathbb{R}$, że dla każdego punktu $x \in U$ istnieją liczby $s < x < t$ takie, że $(s,t) \subset U$.

Definicja 1.2.1. Niech X będzie zbiorem. *Topologią* w zbiorze X nazywamy rodzinę podzbiorów $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ taką, że:

(T1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$

(T2) Dla dowolnej rodziny zbiorów $\{U_i\}_{i\in I}$ takich, że $U_i \in \mathcal{T}$ suma mnogościowa $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}$

(T3) Dla dowolnej **skończonej** rodziny zbiorów $\{U_i\}_{i\in I}$ takich, że $U_i \in \mathcal{T}$ ich część wspólna $\bigcap_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}$

Przestrzenią topologiczną nazywamy parę $(X, \mathcal{T})$, gdzie X jest zbiorem, a $\mathcal{T}$ ustaloną topologią. Zbiory należące do $\mathcal{T}$ nazywa się *otwartymi* w przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T})$.

Zauważmy kilka własności topologii jako podzbiorów zbioru potęgowego $\mathcal{P}(X)$:

- Zbiór topologii w X jest częściowo uporządkowany przez inkluzję rodzin.
- W dowolnym zbiorze X definiuje się dwie topologie: minimalną (antydyskretną) $\mathcal{T}_{\alpha\delta} = \{\emptyset, X\}$ oraz maksymalną (dyskretną) $\mathcal{T}_\delta = \mathcal{P}(X)$. Dla dowolnego zbioru X przestrzeń $(X, \mathcal{T}_{\alpha\delta})$ nazywamy *przestrzenią antydyskretną*, a przestrzeń $(X, \mathcal{T}_\delta)$ nazywamy *przestrzenią dyskretną*.
- Dla dowolnej topologii $\mathcal{T}$ w X : $\quad \mathcal{T}_{\alpha\delta} \subset \mathcal{T} \subset \mathcal{T}_\delta$.

Stwierdzenie 1.2.1. *Jeśli $\{\mathcal{T}_s\}_{s\in S}$ jest rodziną topologii w zbiorze X, to ich przecięcie $\bigcap \mathcal{T}_s$ też jest topologią.* □

1.3 Odwzorowania ciągłe i homemorfizmy

Definicja 1.3.1. Niech $(X, \mathcal{T}_X)$ oraz $(Y, \mathcal{T}_Y)$ będą przestrzeniami topologicznymi. Odwzorowanie zbiorów $f : X \to Y$ nazywa się *ciągłym* jeśli dla każdego zbioru $V \in \mathcal{T}_Y$ jego przeciwobraz $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$.

Powyższa definicja jest równoważna następującemu warunkowi, nawiązującemu do definicji ciągłości wg. Cauchy: $(X, \mathcal{T}_X) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{T}_Y)$ jest ciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{x\in X} \forall_{V \ni f(x)} \exists_{U \ni x}\, f(U) \subset V.$$

Zauważmy, że każde przekształcenie określone na przestrzeni dyskretnej o wartościach w dowolnej przestrzeni topologicznej oraz każde przekształcenie określone na dowolnej przestrzeni topologicznej o wartościach w przestrzeni antydyskretnej jest ciągłe.

Stwierdzenie 1.3.1. *Jeśli odwzorowania* $(X,\mathcal{T}_X) \xrightarrow{f} (Y,\mathcal{T}_Y) \xrightarrow{g} (Z,\mathcal{T}_Z)$ *są ciągłe, to ich złożenie* $(X,\mathcal{T}_X) \xrightarrow{g\circ f} (Z,\mathcal{T}_Z)$ *też jest ciągłe. Dla dowolnej przestrzeni topologicznej* $(X,\mathcal{T}_X)$ *odwzorowanie identycznościowe* $(X,\mathcal{T}_X) \xrightarrow{id_X} (X,\mathcal{T}_X)$ *jest ciągłe.*

Definicja 1.3.2. Przekształcenie ciągłe $f : (X,\mathcal{T}_X) \to (Y,\mathcal{T}_Y)$ nazywa się *homeomorfizmem* jeśli istnieje przekształcenie ciągłe $g : (Y,\mathcal{T}_Y) \to (X,\mathcal{T}_X)$ takie, że $f \circ g = Id_Y$ oraz $g \circ f = Id_X$.

Odnotujmy kilka własności homeomorifzmów:

- Homeomorfizm $(X,\mathcal{T}_X) \xrightarrow{f} (Y,\mathcal{T}_Y)$ jest bijekcją zbiorów $X \xrightarrow{f} Y$, ale nie każda ciągła bijekcja jest homeomorfizmem; np. jeśli zbiór X ma co najmniej dwa punkty, to identyczność $Id : (X,\mathcal{T}_\delta) \to (X,\mathcal{T}_{a\delta})$ jest ciągła, ale nie jest homeomorfizmem!

- Jeśli $(X,\mathcal{T}_X) \xrightarrow{f} (Y,\mathcal{T}_Y)$ jest homeomorfizmem, to obraz dowolnego zbioru otwartego jest zbiorem otwartym, bowiem jeśli g jest ciagłym przekształceniem odwrotnym, to $f(U) = g^{-1}(U)$ a ten zbiór na mocy ciągłości g jest otwarty.

- Jeśli $(X,\mathcal{T}_X) \xrightarrow{f} (Y,\mathcal{T}_Y)$ jest ciągłą bijekcją taką, to dla dowolnego zbioru $U \in \mathcal{T}_X$ jego obraz $f(U) \in \mathcal{T}_Y$, to f jest homeomorfizmem; uzasadnienie jak wyżej.

1.4 Zbiory domknięte

Definicja 1.4.1. Niech $(X,\mathcal{T})$ będzie przestrzenią topologiczną. Podzbiór $A \subset X$ nazywa się domknięty (w topologii $\mathcal{T}$) jeśli $X\backslash A \in \mathcal{T}$. Rodzinę podzbiorów domkniętych oznaczamy $\mathcal{F}_\mathcal{T}$

Zauważmy, że odwzorowanie $-^c : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ przypisujące każdemu zbiorowi jego dopełnienie ustala bijekcję między rodziną zbiorów otwartych $\mathcal{T}$ i rodziną zbiorów domkniętych $\mathcal{F}_\mathcal{T}$.

Ze wzorów De Morgana[2] wynikają następujące własności rodziny zbiorów domkniętych $\mathcal{F}_\mathcal{T}$, dwoiste do własności rodziny zbiorów otwartych $\mathcal{T}$, wymienionych w Definicji 1.2.1:

1. X, $\emptyset \in \mathcal{F}_\mathcal{T}$,
2. Dla dowolnej **skończonej** rodziny $\{A_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{F}_\mathcal{T}$ suma mnogościowa $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{F}_\mathcal{T}$,
3. Dla dowolnej rodziny $\{A_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{F}_\mathcal{T}$ ich część wspólna $\bigcap_{i\in I} A_i \in \mathcal{F}_\mathcal{T}$.

Odnotujmy fakty dotyczące ciągłości odwzorowań w terminach zbiorów domkniętych, analogiczne do sformułowanych poprzednio dla zbiorów otwartych.

1. Przeształcenie $(X,\mathcal{T}_X) \xrightarrow{f} (Y,\mathcal{T}_Y)$ jest ciągłe wtedy i tylko wtedy gdy przeciwobraz $f^{-1}(B)$ dowolnego podzbioru domknietego $B \subset Y$ jest domknięty w X.

[2] Augustus De Morgan (Madurai, Tamil Nadu, India 1806 - 1871 London, UK) became the first professor of mathematics at University College London and made important contributions to English mathematics. [Mac Tutor]

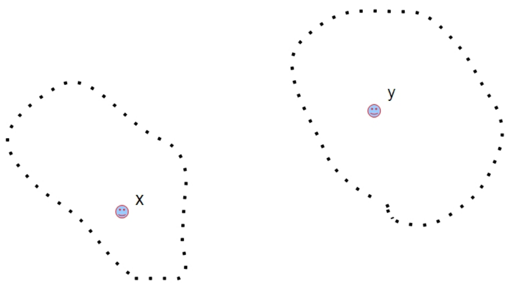
2. Jeśli $(X, \mathcal{T}_X) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{T}_Y)$ jest homeomorfizmem, to obraz dowolnego zbioru domkniętego jest zbiorem domkniętym.

3. Jeśli $(X, \mathcal{T}_X) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{T}_Y)$ jest ciągła bijekcją taką, że dla dowolnego zbioru domkniętego $A \subset X$ jego obraz $f(A) \subset Y$ jest zbiorem domkniętym to f jest homeomorfizmem.

1.5 Własność Hausdorffa

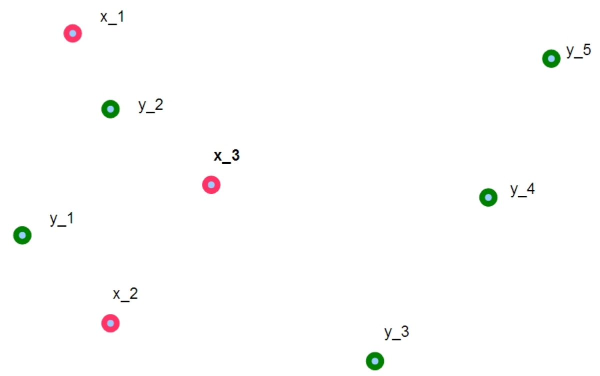
Definicja 1.5.1 (Własność Hausdorffa[3])**.** Przestrzeń topologiczną $(X, \mathcal{T})$ nazywamy przestrzenią Hausdorffa jeśli dla dowolnych różnych punktów $x_0, x_1 \in X$ istnieją zbiory $U_0, U_1 \in \mathcal{T}$ takie, że $x_0 \in U_0,\ x_1 \in U_1$ oraz $U_0 \cap U_1 = \emptyset$.

Otoczenia rozłączne punktów x i y (buźki)



Przykład 1.5.1. Na płaszczyźnie z topologią Zariskiego dowolne dwa niepuste zbiory otwarte mają niepuste przecięcie (na rysunku dwa zbiory - jeden po usunięciu punktów x_i, drugi y_j):

[3] Felix Hausdorff (Breslau (Wrocław) 1868 - Bonn 1942) worked in topology creating a theory of topological and metric spaces. He also worked in set theory and introduced the concept of a partially ordered set. [Mac Tutor]



Stwierdzenie 1.5.1. *Jeśli* $(X, \mathcal{T}_X) \xrightarrow{h} (Y, \mathcal{T}_Y)$ *jest homeomorfizmem i* $(X, \mathcal{T}_X)$ *jest przestrzenią Haudorffa, to* $(Y, \mathcal{T}_Y)$ *też jest przestrzenią Hausdorffa.* □

1.6 Topologie pochodzące od metryki

Definicja 1.6.1 (Metryka)**.** Metryką w zbiorze X nazywa się funkcję $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ spełniającą następujące warunki:

1. $d(x, y) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y$,
2. $d(x, y) = d(y, x)$, dla $x, y \in$X,
3. $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$, dla $x, y, z \in X$. (nier. trójkąta)

Liczba $d(x, y)$ nazywa się odległością punktów $x, y \in X$ w metryce d. Parę (X, d) nazywamy przestrzenią metryczną.

Uwaga 1.6.1. Jeśli $A \subset X$ jest dowolnym podzbiorem przestrzeni metrycznej (X, d_X), to obcięcie odwzorowania d do zbioru $A \times A$ zadaje metrykę na A - odpowiednią przestrzeń metryczną oznaczamy $(A, d_X|A)$.

Definicja 1.6.2. Kulą (otwartą) w przestrzeni metrycznej (X, d) o środku w punkcie $x_0 \in X$ i promieniu $r > 0$ nazywamy zbiór

$$B(x_0, r) := \{x \in X \mid d(x_0, x) < r\},$$

a kulą domkniętą zbiór $D(x_0, r) := \{x \in X \mid d(x_0, x) \leqslant r\}$

Stwierdzenie 1.6.1. *Niech* (X, d) *będzie przestrzenią metryczną. Rodzina podzbiorów zbioru* X*:*

$$\mathcal{T}(d) := \{U \subset X \mid \forall_{x \in U} \exists_{r > 0}\, B(x, r) \subset U\}$$

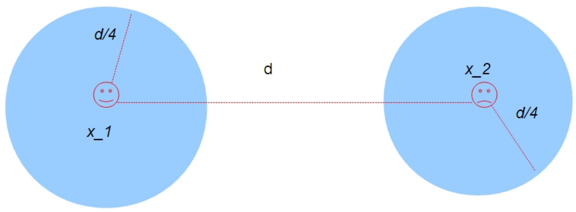
jest topologią w X*, spełniajacą warunek Hausdorffa.*

Dowód. Spełnienie przez zdefinowaną wyżej rodzinę warunków (1), (2) w definicji topologii 1.2.1 jest oczywiste. Jeśli $U_1, .., U_k \in \mathcal{T}(d)$ oraz $x \in U_1 \cap ... \cap U_k$ i dla każdego $i = 1, .., k$ istnieje liczba $r_i > 0$ taka, że $B(x, r_i) \subset U_i$, to dla $r := \min\{r_1, .., r_k\}$ zachodzi inkluzja $B(x, r) \subset U_1 \cap ... \cap U_k$.

Zauważmy, że dowolna kula otwarta $B(x, r) \in \mathcal{T}(d)$, bowiem dla dowolnego punktu $y \in B(x, r)$ z nierówności trójkata wynika, że dla $s := r - d(x, y)$ zachodzi inkluzja $B(y, s) \subset B(x, r)$.

Podobnie warunek Hausdorffa wynika natychmiast z warunku (1) i z nierówności trójkąta. Jeśli $x_1, x_2 \in X$ są różnymi punktami i $d := d(x_1, x_2) > 0$ to kule $B(x_1, \frac{d}{2})$ i $B(x_2, \frac{d}{2})$ są rozłącznymi otoczeniami otwartymi tych punktów. □

Uwaga 1.6.1. Podzbiór $U \in \mathcal{T}(d)$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest sumą kul otwartych.



Otoczenia rozłączne dwóch punktów w przestrzeni metrycznej.

Nie każda topologia pochodzi od metryki, choćby dlatego, ze nie każda ma własność Hausdorffa. Z drugiej strony dwie różne metryki mogą wyznaczać tę samą topologię. Np. dla dowolnej metryki d jej "obcięcie" z góry przez dowolną liczbę > 0 np. 1, czyli $d'(x, y) := \min\{d(x, y), 1\}$ wyznacza tę samą topologię co d. Stąd następna definicja:

Definicja 1.6.3 (Metryki równoważne i topologia metryzowalna)**.** Metryki d_1, d_2 w zbiorze X nazywają się *równoważne* jeśli $\mathcal{T}(d_1) = \mathcal{T}(d_2)$. Jeśli $(X, \mathcal{T})$ jest przestrzenią topologiczną taką, że istnieje metryka d na X taka, że $\mathcal{T} = \mathcal{T}(d)$ to mówimy, że przestrzeń $(X, \mathcal{T})$ jest *metryzowalna.*

Stwierdzenie 1.6.2. *Jeśli przestrzeń $(X, \mathcal{T}_X)$ jest metryzowalna, a przestrzeń $(Y, \mathcal{T}_Y)$ jest z nią homeomorficzna, to jest także metryzowalna.*

Dowód. Jeśli $g : (Y, \mathcal{T}_Y) \to (X, \mathcal{T}_X)$ jest homeomorfizmem, a $d_X : X \times X \to \mathbb{R}$ metryką taką, że $\mathcal{T}_X = \mathcal{T}(d_X)$ to definiujemy metrykę "przenosząc" ją przez odwzorowanie g : $d_Y : Y \times Y \to \mathbb{R}$ wzorem $d_Y(y_1, y_2) := d_X(g(y_1), g(y_2))$. □

Stwierdzenie 1.6.3. *Odwzorowanie* $(X, \mathcal{T}(d_X)) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{T}(d_Y))$ *jest ciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego punktu $x_0 \in X$ i dla każdej liczby $\epsilon > 0$ istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że $f(B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \epsilon)$.* □

Definicja 1.6.4. Ciąg punktów $\{x_n\}$ przestrzeni metrycznej (X, d) jest zbieżny do punktu $x_0 \in X$ wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnej liczby $\epsilon > 0$ istnieje liczba $n(\epsilon)$ taka, że dla wszystkich $n > n(\epsilon)$, $x_n \in B(x_0, \epsilon)$ tzn. $d(x_n, x_0) < \epsilon$.

Stwierdzenie 1.6.4. $(X, \mathcal{T}(d_X)) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{T}(d_Y))$ *jest ciągłe* $\iff$ *wtedy i tylko wtedy, gdy zachowuje granice ciągów, tzn.*

$$x_0 = \lim\{x_n\} \implies f(x_0) = \lim\{f(x_n)\}.$$

Dowód. Powtórz dowód równoważności definicji ciagłości wg Heinego i Cauchy znany z Analizy Matematycznej I. □

Rozdział 2

Generowanie topologii i baza

2.1 Generowanie topologii

Niech X będzie dowolnym zbiorem a $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ dowolną rodziną jego podzbiorów.

Definicja 2.1.1. Topologią *generowaną* przez rodzinę $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ nazywamy najmniejszą topologię w X zawierającą $\mathcal{U}$ - czyli przecięcie wszystkich topologii zawierających rodzinę $\mathcal{U}$. Oznaczamy ją $\mathcal{T}(\mathcal{U})$.

Konstrukcja topologii $\mathcal{T}(\mathcal{U})$:

1. dołączamy do $\mathcal{U}$ przecięcia skończenie wielu elementów rodziny $\mathcal{U}$ definiując rodzinę:
$$\mathcal{U}^{\cap} := \{U_1 \cap \cdots \cap U_k \,|\, U_i \in \mathcal{U}\}$$
Rodzina $\mathcal{U}^{\cap}$ jest już zamknięta ze względu na branie przecięć skończenie wielu zbiorów tzn. jeśli $V_1, V_2 \in \mathcal{U}^{\cap}$ to $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{U}^{\cap}$

2. Do rodziny $\mathcal{U}^{\cap}$ dołączamy wszystkie sumy zbiorów należących do $\mathcal{U}^{\cap}$ definiując rodzinę:
$$(\mathcal{U}^{\cap})^{\cup} := \{\bigcup_{i \in I} V_i \,|\, V_i \in \mathcal{U}^{\cap}\}$$
Rodzina $(\mathcal{U}^{\cap})^{\cup}$ jest zamknięta ze względu na branie sum zbiorów tzn. dla dowolnej rodziny $\{W_j\}_{j \in J} \subset (\mathcal{U}^{\cap})^{\cup}$ jej suma $\bigcup_{j \in J} W_j \in (\mathcal{U}^{\cap})^{\cup}$.

3. $\mathcal{T}(\mathcal{U}) = (\mathcal{U}^{\cap})^{\cup}$

Stwierdzenie 2.1.1. *Niech $(X, \mathcal{T})$ będzie dowolną przestrzenią topologiczną, Y będzie zbiorem oraz $\mathcal{V} \subset \mathcal{P}(Y)$ rodziną jego podzbiorów. Przekształcenie $f\colon (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}(\mathcal{V}))$ jest ciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego zbioru $V \in \mathcal{V}$ jego przeciwobraz $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$* .□

Przykład 2.1.1. Wybór rodziny generującej topologię nie jest oczywiście jednoznaczny; np. cała topologia generuje samą siebie. W przestrzeni metrycznej topologia $\mathcal{T}(d)$ jest generowana przez każdą z następujących rodzin:

1. Rodzinę wszystkich kul otwartych.

2. Rodzinę kul otwartych o promieniach wymiernych.

3. Rodzinę kul otwartych o promieniach $\frac{1}{n}$ dla $n = 1, 2, 3....$

i wiele innych.

2.2 Baza topologii

Definicja 2.2.1 (Baza topologii)**.** Podrodzinę $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ nazywamy *bazą* topologii $\mathcal{T}$ jeśli dowolny zbiór $U \in \mathcal{T}$ jest sumą mnogościową pewnych zbiorów należących do $\mathcal{B}$.

Jeśli przestrzeń topologiczna posiada bazę przeliczalną, to mówimy że spełnia *II aksjomat przeliczalności.*

Rodzina $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ jest bazą topologii $\mathcal{T}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego punktu $x \in X$ oraz zbioru otwartego $U \ni x$ istnieje zbiór $V \in \mathcal{B}$ taki, że $x \in V \subset U$. Istotnie, jest to warunek równoważny stwierdzeniu, że U jest sumą zbiorów należących do $\mathcal{B}$. W zapisie logicznym warunek, że zbiór jest otwarty, wyrazony w terminach bazy jest nastepujący:

$$U \in \mathcal{T} \iff \forall_{x \in U} \exists_{V \ni \mathcal{B}}\, x \in V \subset U.$$

Jeśli $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ jest bazą topologii $\mathcal{T}$ to oczywiście $\mathcal{B}$ generuje topologię $\mathcal{T}$, przy czym w opisanej wyżej procedurze generowania topologii przez rodzinę zbiorów wystarczy dokonać kroku drugiego, bowiem definicji bazy przecięcie skończenie wielu zbiorów otwartych jest sumą zbiorów z $\mathcal{B}$.

Stwierdzenie 2.2.1. *Rodzina $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ jest bazą topologii $\mathcal{T}(\mathcal{B})$ generowanej przez rodzinę $\mathcal{B}$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące dwa warunki:*

(B1) $\forall_{x \in X} \exists_{V \in \mathcal{B}}\ x \in V$, *czyli* $\bigcup\{U \mid U \in \mathcal{B}\} = X$

(B2) $\forall_{V_1, V_2 \in \mathcal{B}} \forall_{x \in V_1 \cap V_2} \exists_{V \in \mathcal{B}}\ x \in V \subset V_1 \cap V_2$

□

Stwierdzenie 2.2.2. *Niech $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ będą topologiami w zbiorze X a $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{T}_1$, i $\mathcal{B}_2 \subset \mathcal{T}_2$ odpowiednio pewnymi ich bazami. Inkluzja topologii $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego punktu $x \in X$ i zbioru bazowego $U_1 \in \mathcal{B}_1$ takiego, że $x \in U_1 \in \mathcal{B}_1$ istnieje zbiór U_2 taki, ze $x \in U_2 \subset U_1$.* □

Definicja 2.2.2. Mówimy, że rodzina podzbiorów $\{A_s\}_{s \in S}$ zbioru X jest jego *pokryciem* jeśli $\bigcup\limits_{s \in S} A_s = X$.

Stwierdzenie 2.2.3. *Jeśli przestrzeń $(X, \mathcal{T})$ posiada bazę przeliczalną, to z każdego pokrycia X zbiorami otwartymi $\{U_s\}_{s \in S} \subset \mathcal{T}$ można wybrać podpokrycie przeliczalne, czyli istnieją wskaźniki $s_1, s_2, ... \in S$ takie, że $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} U_{s_i} = X$.*

Ostatnie stwierdzenie wynika natychmiast z następującego lematu teorio-mnogościowego:

Lemat 2.2.1. *Załóżmy, że mamy dane dwa pokrycia zbioru* X: $\{A_s\}_{s\in S}$ *oraz* $\{B_t\}_{t\in T}$. *Jeśli dla każdego* $s \in S$ *i dla każdego punktu* $a \in A_s$ *istnieje zbiór* $B_{t(a)}$ *taki, że* $a \in B_{t(a)} \subset A_s$, *to istnieje podzbiór* $S' \subset S$ *mocy nie większej niż moc zbioru* T *taki, że* $\{A_s\}_{s\in S'}$ *jest także pokryciem.*

Dowód. Rozpatrzmy funkcję $\tau : \{(a,s) \mid a \in A_s,\ s \in S\} \to T$ taką, że $\forall_{(a,s)} a \in B_{\tau(a,s)} \subset A_s$ i oznaczmy przez $T' \subset T$ obraz τ, a więc $X = \bigcup\limits_{t'\in T'} B_{t'}$. Dla dowolnego $t' \in T'$ wybieramy po jednym elemencie $(a', s') \in \tau^{-1}(t')$ i definiujemy zbiór

$$S' := \{s' \in S \mid \exists_{t'\in T'}\, (a', s') \,\text{jest wybranym elementem}\, \tau^{-1}(t')\}.$$

Oczywiście $|S'| \leqslant |T'| \leqslant |T|$ oraz $\{A_{s'}\}_{s'\in S'}$ jest pokryciem, bowiem:

$$\bigcup_{s'\in S'} A_{s'} \supset \bigcup_{t'\in T'} B_{t'} = X.$$

□

Wniosek 2.2.1. *Jeśli przestrzeń* $(X, \mathcal{T})$ *spełnia II aksjomat przeliczalności (tzn. posiada bazę przeliczalną), to z dowolnej bazy można wybrać bazę przeliczalną.* □

Definicja 2.2.3 (Baza topologii w punkcie)**.** Niech $x \in X$ będzie ustalonym punktem. Podrodzinę $\mathcal{B}_x \subset \mathcal{T}$ nazywamy *bazą topologii* $\mathcal{T}$ *w punkcie* x jeśli dla każdego zbioru otwartego $U \ni x$ istnieje zbiór $V \in \mathcal{B}_x$ taki, że $x \in V \subset U$. Bazę w punkcie nazywamy także *bazą otoczeń* punktu x.

Jeśli przestrzeń topologiczna posiada bazę przeliczalną w każdym punkcie, to mówimy że spełnia *I aksjomat przeliczalności.*

Zauważmy, że jeśli $\mathcal{B}$ jest bazą przestrzeni $(X, \mathcal{T})$, to dla dowolnego $x \in X$ rodzina $\mathcal{B}_x := \{U \in \mathcal{B} \mid U \ni x\}$ jest bazą w punkcie x. Odwrotnie, mając bazy w punktach $\mathcal{B}_x$ dla wszystkich $x \in X$, rodzina $\mathcal{B} := \bigcup\limits_{x\in X} \mathcal{B}_x$ jest bazą przestrzeni $(X, \mathcal{T})$.

Przykład 2.2.1. Jeśli (X, d) jest przestrzenią metryczną to dla ustalonego punktu $x_0 \in X$ rodzina kul $\mathcal{B}(x_0) := \{B(x_0; \frac{1}{n}) \mid n = 1, 2, ...\}$ jest bazą topologii $\mathcal{T}(d)$ w punkcie x_0, a więc dowolna przestrzeń metryzowalna spełnia I aksjomat przeliczalności.

Rozdział 3

Wnętrze i domknięcie zbioru

Nie każdy podzbiór przestrzeni topologicznej jest otwarty lub domknięty. Dla danego podzbioru przestrzeni można jednak wskazać zarówno jego punkty wewnętrzne, jak też punkty leżące blisko tego zbioru, choć niekoniecznie do niego należące. Ta geometryczna intuicja jest sformalizowana w postaci definicj operacji wnętrza i domknięcia zbioru. Poniżej niech $(X, \mathcal{T})$ będzie ustaloną przestrzenią topologiczną.

3.1 Wnętrze zbioru

Definicja 3.1.1. *Wnętrzem zbioru* $A \subset X$ nazywamy maksymalny (ze względu na inkluzję) otwarty podzbiór w A, a więc sumę wszystkich podzbiorów otwartych zawartych w A:

$$\mathrm{Int}_{(X,\mathcal{T})}(A) := \bigcup\{U \mid U \subset A,\, U \in \mathcal{T}\}$$

Uwaga 3.1.1. Oznaczenie $\mathrm{Int}_{(X,\mathcal{T})}(A)$ podkreśla, że rozpatrujemy A jako podzbiór przestrzeni $(X, \mathcal{T})$. Jeśli jest jasne z kontekstu w jakiej przestrzeni topologicznej położony jest zbiór A stosowane są skrócone oznaczenia $\mathrm{Int}_X(A)$, $\mathrm{Int}(A)$ lub $\mathring{A}$.

Stwierdzenie 3.1.1. *Operacja brania wnętrza wyznacza odwzorowanie zbiorów potegowych* $\mathrm{Int}\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ *spełniające następujące warunki:*

1. $\forall A \subset X$, $\mathrm{Int}(A) \subset A$,
2. $U \in \mathcal{T} \iff \mathrm{Int}(U) = U$,
3. $\mathrm{Int}(\mathrm{Int}(A)) = \mathrm{Int}(A)$,
4. $\mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B) = \mathrm{Int}(A \cap B)$.

□

Stwierdzenie 3.1.2. *Punkt* $a \in \mathrm{Int}(A)$ *wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnej bazy w punkcie* a *istnieje zbiór* U *z tej bazy taki, że* $U \subset A$. □

3.2 Domknięcie zbioru

Definicja 3.2.1. *Domknięciem zbioru $A \subset X$* nazywamy minimalny (ze względu na inkluzję) domknięty podzbiór zawierający A, a więc przecięcie wszystkich podzbiorów domkniętych zawierających A:

$$\mathrm{cl}_{(X,\mathcal{T})}(A) := \bigcap \{C \,|\, C \supset A,\, X \setminus C \in \mathcal{T}\}$$

Uwaga 3.2.1. Oznaczenie $\mathrm{cl}_{(X,\mathcal{T})}(A)$ podkreśla, że domykamy A jako podzbiór przestrzeni X. Jeśli jest jasne z kontekstu w jakiej przestrzeni topologicznej domykamy nasz zbiór, stosowane jest skrócone oznaczenie $\mathrm{cl}_X(A), \mathrm{cl}(A)$ lub $\bar{A}$.

Stwierdzenie 3.2.1. *Operacja domknięcie wyznacza odwzorowanie zbiorów potęgowych* $\mathrm{cl}\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ *spełniające następujące warunki:*

1. $\forall A \subset X,\ \mathrm{cl}(A) \supset A,$
2. $\mathrm{cl}(A) = A \iff X \setminus A \in \mathcal{T},$
3. $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(A)) = \mathrm{cl}(A),$
4. $\mathrm{cl}(A) \cup \mathrm{cl}(B) = \mathrm{cl}(A \cup B).$

Stwierdzenie 3.2.2. $x \in \bar{A}$ *wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego zbioru otwartego* $U \ni x$ *(równoważnie dowolnego zbioru z pewnej bazy w punkcie $x \in X$) przecięcie ze zbiorem A jest niepuste: $U \cap A \neq \emptyset$*

Dowód. Niech $\mathcal{B}_x$ będzie ustaloną bazą w punkcie x. Rozpatrzmy zbiór

$$C := \{x \in X \,|\, \forall_{U \in \mathcal{B}_x}\, U \cap A \neq \emptyset\}.$$

Z definicji wynika, że $A \subset C$ oraz $X \setminus C$ jest zbiorem otwartym, a więc C jest zbiorem domkniętym, a więc $\bar{A} \subset C$. Zauważmy, że także $C \subset \bar{A}$. Istotnie, jeśli $x \notin \bar{A}$ to znaczy, że istnieje podzbiór domknięty $B \supset A$ taki, że $x \notin B$, a więc zbiór otwarty $X \setminus B$ zawiera x i nie przecina się z A. □

3.3 Zbiory gęste, brzegowe i ośrodkowość

Definicja 3.3.1. Podzbiór $A \subset X$ nazywa się *gęsty* w przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T})$ jeśli $\mathrm{cl}(A) = X$. Przestrzeń $(X, \mathcal{T})$ nazywa się *ośrodkowa* jeśli posiada gęsty podzbiór przeliczalny.

Stwierdzenie 3.3.1. *Niech $(X, \mathcal{T})$ będzie przestrzenią topologiczną.*

1. *Podzbiór $A \subset X$ jest gęsty wtedy i tylko wtedy, gdy ma niepuste przecięcie z dowolnym niepustym zbiorem otwartym (równoważnie: zbiorem z pewnej bazy).*
2. *Jeśli przestrzeń topologiczna spełnia II aksjomat przeliczalności (tzn. ma bazę przeliczalną), to jest ośrodkowa.*

3. *Jeśli metryzowalna przestrzeń topologiczna $(X, \mathcal{T})$ jest ośrodkowa, to spełnia II aksjomat przeliczalności.*

Dowód.
Ad 1. Wynika natychmiast ze Stw. 4.4
Ad 2. Wybierając z każdego zbioru bazy przeliczalnej po jednym punkcie otrzymujemy zbiór przeliczalny mający niepuste przecięcie z każdym zbiorem otwartym (bo każdy zbiór otwarty jest sumą zbiorów z bazy.)
Ad 3. Niech dla pewnej metryki d w X, $\mathcal{T} = \mathcal{T}(d)$. Jeśli $G \subset X$ jest zbiorem przeliczalnym gęstym, to rodzina zbiorów $\mathcal{B} := \{B(x, \frac{1}{n}) \,|\, x \in G,\, n \in \mathbb{N}\}$ jest przeliczalną bazą topologii $\mathcal{T}(d)$. □

Uwaga 3.3.1. "Założenie o metryzowalności przestrzeni topologicznej w ostatniej implikacji jest istotne, wystarczy rozpatrzeć prostą z topologią strzałki, która jest ośrodkowa, lecz nie spełnia II aksjomatu przeliczalności. "

3.4 Brzeg zbioru

Definicja 3.4.1. *Brzegiem* zbioru $A \subset X$ nazywamy zbiór

$$\mathrm{Fr}(A) := \mathrm{cl}(A) \cap \mathrm{cl}(X \setminus A).$$

Definicja 3.4.2. Podzbiór $A \subset X$ nazywa się *brzegowy* jeśli $\mathrm{Int}(A) = \emptyset$.

Stwierdzenie 3.4.1. *Zachodzą następujące równości zbiorów:*

1. $\mathrm{Int}(A) = A \setminus \mathrm{Fr}(A)$.
2. $\mathrm{Fr}(A) \cap \mathrm{Int}(A) = \emptyset$
3. $\mathrm{cl}(A) = \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Fr}(A)$
4. $X = \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Int}(X \setminus A)$ *i te zbiory są parami rozłączne.*

Uwaga 3.4.1. Zbiór jest brzegowy wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{cl}(A) = \mathrm{Fr}(A)$.

3.5 Wnętrze i domknięcie w terminach metryki

Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną oraz $A \subset X$. Opiszemy operacje wnętrza i domknięcie zbioru A w topologii $\mathcal{T}(d)$ w terminach metryki d .

Stwierdzenie 3.5.1. *Punkt $a \in \mathrm{Int}(A)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba $r > 0$ taka, że $B(a, r) \subset A$.* □

Stwierdzenie 3.5.2. *Punkt $x \in \mathrm{cl}(A)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciag elementów $a_n \in A$ zbieżny do punktu x.*

Dowód. Jeśli $x \in \bar{A}$, to dla dowolnej kuli $B(x, \frac{1}{n})$ istnieje punkt $a_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A$. Ciąg $\{a_n\}$ jest więc zbieżny do x.

Odwrotnie, jeśli ciąg $a_n \to x$, to w dowolnym otoczeniu punktu x leżą punkty ze zbioru A, a więc $x \in \bar{A}$. □

Domknięcie zbioru może być opisane w terminach intuicyjnej funkcji odstępu punktu od zbioru.

Stwierdzenie 3.5.3. *Funkcja odstępu punktu $a \in X$ od podzbioru $A \subset X$, $d(\cdot, A) : X \to \mathbb{R}$ określona wzorem $d(x, A) := \inf\{d(x.a) \,|\, a \in A\}$ jest ciągła oraz:*

$$d(x, A) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \mathrm{cl}(A).$$

Dowód. Sprawdzimy, że $d(\cdot, A)$ jest ciągła. Mamy oszacowanie: $|d(x, a) - d(y, a)| \leqslant d(x, y)$, a więc $|d(x, A) - d(y, A)| \leqslant d(x, y)$, skąd z definicji wg Heine natychmiast wynika ciągłość $d(\cdot, A)$. Odstęp $d(x, A) = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieje podzbiór ciag $\{a_n\} \subset A \, \{a_n\} \to x$, a więc $x \in \bar{A}$. □

Rozdział 4

Konstrukcje przestrzeni topologicznych

Mając daną przestrzeń topologiczną lub rodzinę przestrzeni można poprzez pewne standardowe konstrukcje budować nowe przestrzenie. Cztery konstrukcje (zwane także operacjami), które opisujemy w tym rozdziale to: podprzestrzeń, przestrzeń ilorazowa, produkt kartezjański i suma prosta. Nowe przestrzenie powstają przez wykonanie najpierw odpowiedniej konstrukcji na zbiorach, a potem zdefiniowanie w nich "naturalnej" topologii. Analogiczne konstrukcje występują w wielu innych teoriach matematycznych m.in. w algebrze liniowej i w teorii grup. Pierwszy podrozdział poświęcony jest definiowaniu topologii w zbiorze poprzez żądanie, aby były ciągłe przekształcenia należace do danej rodziny przekształceń określonych na tym zbiorze (lub prowadząca do tego zbioru). W następnych podrozdziałach omawiamy kolejno wspomniane wyżej konstrukcje.

4.1 Przeciąganie i popychanie topologii

Przeciąganie topologii

Niech X będzie ustalonym zbiorem a $\mathfrak{f} = \{f_i : X \to Y_i\}_{i\in I}$ rodziną przekształceń określonych na X o wartościach w przestrzeniach topologicznych $(Y_i, \mathcal{T}_i)$.

Definicja 4.1.1. $\mathcal{T}^*(\mathfrak{f})$ najmniejsza topologia w X, w której ciągłe są wszystkie odwzorowania

$$\{f_i\colon (X, \mathcal{T}^*(\mathfrak{f})) \to (Y_i, \mathcal{T}_i)\}_{i\in I}.$$

Stwierdzenie 4.1.1. *Topologia $\mathcal{T}^*(\mathfrak{f})$ jest generowana przez rodzinę zbiorów*

$$\{f_i^{-1}(U_i)\,|\,U_i \in \mathcal{T}_i,\ i \in I\}.$$

Bazą topologii $\mathcal{T}^*(\mathfrak{f})$ są zbiory $\{f_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap ... \cap f_{i_k}^{-1}(U_{i_k})\}$, gdzie $U_{i_k} \in \mathcal{T}_{i_k}$, $k \in \mathbb{N}$. □

Stwierdzenie 4.1.2. *Odwzorowanie $g : (Z, \mathcal{T}_Z) \to (X, \mathcal{T}^*(\mathfrak{f}))$ jest ciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $i \in I$ złożenie przekształceń $(Z, \mathcal{T}_Z) \xrightarrow{g} (X, \mathcal{T}^*(\mathfrak{f})) \xrightarrow{f_i} (Y_i, \mathcal{T}_i)$ jest ciągłe.* □

Popychanie topologii

Niech teraz Y będzie ustalonym zbiorem a $\mathfrak{g} := \{g_j : X_j \to Y\}_{j\in J}$ rodziną przekształceń określonych na przestrzeniach topologicznych $(X_j, \mathcal{T}_j)$ o wartościach w zbiorze Y.

Definicja 4.1.2. $\mathcal{T}_*(\mathfrak{g})$ największa topologia w Y, w której wszystkie odwzorowania $\{g_j : X_j \to Y\}_{j\in J}$ są ciągłe.

Stwierdzenie 4.1.3. $\mathcal{T}_*(\mathfrak{g}) = \{U \subseteq Y : \forall_{j\in J}\, g_j^{-1}(U) \in \mathcal{T}_j\}$ □

Stwierdzenie 4.1.4. *Odwzorowanie* $(Y, \mathcal{T}_*(\mathfrak{g})) \xrightarrow{f} (Z, \mathcal{T}_Z)$ *jest ciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego* $j \in J$ *złożenie* $(X_j, \mathcal{T}_j) \xrightarrow{g_j} (Y, \mathcal{T}_*(\mathfrak{g})) \xrightarrow{f} (Z, \mathcal{T}_Z)$ *jest ciągłe.* □

4.2 Podprzestrzeń

Rozpatrujemy przestrzeń $(X, \mathcal{T})$ i jej podzbiór $A \subset X$. Chcemy określić topologię $\mathcal{T}|A$ w tym zbiorze, wyznaczoną przez topologię w całej przestrzeni. Naturalnym żądaniem jest aby odwzorowanie włożenia $\iota\colon A \subset X$, $\iota(a) := a$ było ciągłe, a z drugiej strony topologia ta była jak najbliższa topologii w X. Definiujemy więc topologię $\mathcal{T}|A$ jako przeciagnięcie topologii $\mathcal{T}$ przez włożenie ι:

$$\mathcal{T}|A := \mathcal{T}^*(\iota) = \{\iota^{-1}(U) \,|\, U \in \mathcal{T}\} = \{U \cap A \,|\, U \in \mathcal{T}\}$$

Zauważmy, że jeśli $\mathcal{B}$ jest bazą topologii $\mathcal{T}$, to rodzina $\mathcal{B}|A := \{U \cap A\colon U \in \mathcal{B}\}$ jest bazą topologii $\mathcal{T}|A$ – podobnie dla bazy w punkcie.

Podobnie jak w przypadku zbiorów otwartych w $\mathcal{T}|A$, zbiory domknięte w topolgii podprzestrzeni to przecięcia zbiorów domkniętych w całej przestrzeni z tą podprzestrzenią: $\mathcal{F}_{\mathcal{T}|A} = \{B \cap A \subset A\colon B \in \mathcal{F}_{\mathcal{T}}\}$.

Stwierdzenie 4.2.1. *Dla dowolnego podzbioru* $B \subset A$ *zachodzi równość* $\mathrm{cl}_{(A,\mathcal{T}|A)}(B) = \mathrm{cl}_{(X,\mathcal{T})}(B) \cap A$. □

Podobna równość *nie zachodzi* dla wnętrza zbioru!

Stwierdzenie 4.2.2.

1. *Odwzorowanie* $(X', \mathcal{T}') \to (A, \mathcal{T}|A)$ *jest ciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy złożenie* $(X', \mathcal{T}') \xrightarrow{f} (A, \mathcal{T}|A) \xrightarrow{\iota} (X, \mathcal{T})$ *jest ciągłe.*

2. *Jeśli odwzorowanie* $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ *jest ciągłe oraz* $A \subset X$*, to obcięcie* $f|A : (A, \mathcal{T}_X|A) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ *też jest ciągłe.* □

Odnotujmy zachowanie poznanych własności topologii przy przechodzeniu do podprzestrzeni (tzw. dziedziczność własności):

Stwierdzenie 4.2.3.

1. *Podprzestrzeń przestrzeni Hausdorffa jest przestrzenią Hausdorffa.*

2. *Jeśli przestrzeń topologiczna spełnia I aksjomat przeliczalności (odp. II aksjomat przeliczalności), to dowolna jej podprzestrzeń też spełnia I aksjomat przeliczalności (odp. II aksjomat przeliczalności).*

3. *Dowolna podprzestrzeń przestrzeni metryzowalnej jest metryzowalna. Jeśli* (X, d) *jest przestrzenią metryczną oraz* $A \subset X$*, to zachodzi równość topologii* $\mathcal{T}(d)|A = \mathcal{T}(d|A)$*.*

4. *Dowolna podprzestrzeń ośrodkowej przestrzeni metryzowalnej jest ośrodkowa.* □

Przykład 4.2.1. Podprzestrzeń przestrzeni ośrodkowej nie musi być ośrodkowa (np. oś $y = 0$ na płaszczyźnie Niemyckiego). Wynika stąd także, że topologia płaszczyzny Niemyckiego nie jest metryzowalna.

4.3 Przestrzeń ilorazowa

Niech X będzie zbiorem, $R \subset X \times X$ relacją równoważności w tym zbiorze, a $q : X \to X/R$ odwzorowaniem przypisującym każdemu elementowi x jego klasę abstrakcji $[x]_R := \{y \in X : (x, y) \in R\}$. Zbiór klas abstrakcji jest podzbiorem zbioru potęgowego $\mathcal{P}(X)$. Odwzorowanie $q : X \to X/R \subset \mathcal{P}(X)$ jest oczywiście surjekcją. Odwrotnie, dowolna surjekcja zbiorów $p : X \to Y$ definiuje relację równoważności $R_p := \{(x', x'') \in X \times X \,|\, p(x') = p(x'')\}$ i odwzorowanie p wyznacza bijekcję $\bar{p}\colon X/R_p \xrightarrow{\simeq} Y$. Będziemy więc niżej rozpatrywać surjekcje zbiorów; rzutowanie na zbiór klas abstrakcji będzie szczególnym przypadkiem poniższej konstrukcji, dwoistej w pewnym sensie do poprzedniego przypadku, gdy rozważaliśmy injekcje (włożenia podzbiorów).

Definicja 4.3.1. Niech $(X, \mathcal{T})$ będzie przestrzenią topologiczną, a $p\colon X \to Y$ surjekcją na zbiór Y. Definiujemy topologię $\mathcal{T}_*(p)$ w zbiorze Y jako największą topologię, w której p jest ciągłe:

$$\mathcal{T}_*(p) = \{V \subset Y \,|\, p^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X\}$$

Stwierdzenie 4.3.1. *Odwzorowanie* $f\colon (Y, \mathcal{T}_*(p)) \to (Z, \mathcal{T}_Z)$ *jest ciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy złożenie* $(X, \mathcal{T}_X) \xrightarrow{p} (Y, \mathcal{T}_*(p)) \xrightarrow{f} (Z, \mathcal{T}_Z)$ *jest ciągłe.* □

Spośród poznanych własności topologii jedynie ośrodkowość zachowuje się przy konstrukcji przestrzeni ilorazowej. Zachodzi nawet nieco silniejsze twierdzenie:

Stwierdzenie 4.3.2. *Jeśli* $p\colon (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ *jest ciągłą surjekcją oraz* $(X, \mathcal{T}_X)$ *jest przestrzenią ośrodkową, to* $(Y, \mathcal{T}_Y)$ *też jest przestrzenią ośrodkową.*

Przykład 4.3.1 (Odcinek z rozdwojonym punktem). Przestrzeń ilorazowa przestrzeni Hausdorffa nie musi mieć własności Hausdorffa. Niech $X := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leqslant x_1 \leqslant 1,\ x_2 = 0 \,\text{lub}\, 1\}$ z topologią euklidesową, $Y = [-1, 1] \cup \{0'\}$ będzie *zbiorem*, $p : X \to Y$, $p(x_1, x_2) := x_1$ jeśli $(x_1, x_2) \neq (0, 1)$, $p(0, 1) := 0'$. W przestrzeni $(Y, \mathcal{T}_*(p))$ punkty $0, 0'$ nie posiadają rozłącznych otoczeń (a wszystkie inne pary różnych punktów mają).

Przykład 4.3.2. Przestrzeń ilorazowa przestrzeni metryzowalnej nie musi być metryzowalna, nawet jeśli jest Hausdorffa. Rozpatrzmy przestrzeń $\mathbb{R}/\sim$ gdzie $t_1 \sim t_2 \iff t_1 = t_2 \,\text{lub}\, t_1, t_2$ są liczbami całkowitymi. Przestrzeń $\mathbb{R}/\sim$ jest przestrzenią Hausdorffa nie ma jednak bazy przeliczalnej w punkcie $[0] \in \mathbb{R}/\sim$, a więc nie spełnia I aksjomatu przeliczalności. Wszystkie inne punkty mają przeliczalną bazę otoczeń, homeomorficznych z otoczeniami euklidesowymi.

Odwzorowania ilorazowe

Mając daną ciągłą surjekcję $f\colon (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ chcielibysmy czasem wiedzieć, czy topologia $\mathcal{T}_Y$ jest zdefiniowana przez odwzorowanie f, co może ułatwić konstruowanie odwzorowań ciągłych określonych na przestrzeni $(Y, \mathcal{T}_Y)$.

Definicja 4.3.2. Odwzorowanie ciągłe $f\colon (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ nazywa się *ilorazowe* jeśli jest surjekcją oraz jeśli przeciwobraz $f^{-1}(V)$ podzbioru $V \subset Y$ jest otwarty w $(X, \mathcal{T}_X)$, to $V \in \mathcal{T}_Y$.

Ponieważ ciągłość przekształcenia oznacza, że przeciwobrazy zbiorów otwartych są otwarte, więc warunek na to, aby surjekcja $f\colon (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ była przekształceniem ilorazowym mozna wyrazić następująco: $V \in \mathcal{T}_Y \iff f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$ lub w terminach zbiorów domkniętych: $B \in \mathcal{F}_{\mathcal{T}_Y} \iff f^{-1}(B) \in \mathcal{F}_{\mathcal{T}_X}$.

Definicja 4.3.3. Przekształcenie ciagłe $f\colon (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ nazywa się *otwarte* (odp. *domknięte*) jeśli obraz dowolnego zbioru otwartego w $(X, \mathcal{T}_X)$ jest otwarty (odp. domknięty) w $(Y, \mathcal{T}_Y)$.

Stwierdzenie 4.3.3. *Jeśli* $f\colon (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ *jest otwartą lub domkniętą surjekcją, to* f *jest przekształceniem ilorazowym.*

Dowód. Dowód wynika natychmiast z równości $f(f^{-1}(A)) = A$, która zachodzi dla dowolnego podzbioru $A \subset Y$. □

4.4 Produkt kartezjański

Niech dana będzie rodzina przestrzeni topologicznych $\{(X_s, \mathcal{T}_s)\}_{s \in S}$. Zaczniemy od przypomnienia definicji produktu (iloczynu) kartezjańskiego zbiorów.

Definicja 4.4.1. *Produktem (lub iloczynem) kartezjańskim* rodziny zbiorów $\{X_s\}_{s\in S}$ nazywamy zbiór:

$$\prod_{s\in S} X_s := \{\phi : S \to \bigcup_{s\in S} X_s \,|\, \forall_{s\in S}\, \phi(s) \in X_s\}$$

wraz z rodziną rzutowań na współrzędne $\mathfrak{p} := \{\prod_{s\in S} X_s \xrightarrow{p_t} X_t\}_{t\in S}$ gdzie $p_t(\{x_s\}_{s\in S}) := x_t$

Formalnie, punkty produktu kartezjańskiego są funkcjami określonymi na zbiorze indeksów S. Funkcję ϕ można zapisać jako rodzinę jej wartości $\{\phi(s)\}_{s\in S}$, tak więc punkty w iloczynie kartezjańskim to indeksowane rodziny $\{x_s\}_{s\in S}$ gdzie $x_s \in X_s$, co nawiązuje do dobrze znanego zapisu elementów iloczynu kartezjańskiego indeksowanego liczbami naturalnymi jako ciągów $(x_1, x_2, ..)$.

Definicja 4.4.2. *Produktem (lub iloczynem) kartezjańskim* rodziny przestrzeni topologicznych nazywamy zbiór $\{X_s\}_{s\in S}$ wyposażony w topologię $\mathcal{T}^*(\mathfrak{p})$ przeciągniętą przez rodzinę projekcji $\mathfrak{p}$

$$\prod_{s\in S}(X_s, \mathcal{T}_s) := (\prod_{s\in S} X_s, \mathcal{T}^*(\mathfrak{p}))$$

wraz z (ciągłymi) odwzorowaniami $(\prod_{s\in S} X_s, \mathcal{T}^*(\mathfrak{p})) \xrightarrow{p_t} (X, \mathcal{T}_t)$.

Z definicji topologii generowanej przez rodzinę przekształceń wynika natychmiast następujące:

Stwierdzenie 4.4.1.

1) Topologia iloczynu kartezjańskiego jest generowana przez zbiory postaci

$$p_t^{-1}(U_t) = \prod_{s\in S} U_s \subset \prod_{s\in S} X_s$$

gdzie $U_s = X_s$ dla $s \neq t$ oraz $U_t \in \mathcal{T}_t$.

2) Jeśli dla każdego $s \in S$ wybrana jest baza $\mathcal{B}_s$ topologii $\mathcal{T}_s$, to bazę iloczynu kartezjańskiego tworzą zbiory postaci

$$\langle U_{s_1}, .., U_{s_n}\rangle := p_{s_1}^{-1}(U_{s_1}) \cap \ldots p_{s_n}^{-1}(U_{s_n}) = \prod_{s\in S} U_s \subset \prod_{s\in S} X_s$$

gdzie $U_s = X_s$ dla s poza pewnym skończonym zbiorem indeksów $\{s_1, .., s_n\}$ oraz $U_{s_i} \in \mathcal{B}_{s_i}$. □

Wniosek 4.4.1. *Rzutowania $(\prod_{s\in S} X_s, \mathcal{T}^*(\mathfrak{p})) \xrightarrow{p_t} (X, \mathcal{T}_t)$ są odwzorowaniami otwartymi tzn. obrazy zbiorów otwartych są otwarte.*

Dowód. Wystarczy pokazać, że obrazy zbiorów z pewnej bazy topologii $\mathcal{T}^*(\mathfrak{p})$ są otwarte, co wynika ze Stw. 4.4.1 oraz faktu, że $p_t(\prod_{s\in S} U_s) = U_t$. □

Stwierdzenie 4.4.2 (Produkty kartezjańskie odwzorowań)**.**

1) Odwzorowanie $f : (Y, \mathcal{T}_Y) \to \prod_{s\in S}(X_s, \mathcal{T}_s)$ *jest ciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy współrzędne odwzorowania* f*, czyli zdefiniowane dla każdego* $t \in S$ *złożenia* $(Y, \mathcal{T}_Y) \xrightarrow{f} \prod_{s\in S}(X_s, \mathcal{T}_s) \xrightarrow{p_t} (X_t, \mathcal{T}_t)$ *są ciągłe.*

2) Dla rodziny odwzorowań ciągłych $\{(Y, \mathcal{T}_Y) \xrightarrow{f_s} (X_s, \mathcal{T}_s)\}_{s\in S}$ *istnieje dokładnie jedno odwzorowanie ciągłe* $(Y, \mathcal{T}_Y) \xrightarrow{f} \prod_{s\in S}(X_s, \mathcal{T}_s)$ *takie, że dla każdego* $s \in S$ *współrzędna* $p_s \circ f = f_s$.

Dowód. Dowód wynika natychmiast z definicji topologii iloczynu kartezjańskiego i Stw. 4.1.2. □

Wykorzystamy Stw. 4.4.2 aby wykazać iż przestrzenie $(X_s, \mathcal{T}_s)$ są homeomorficzne z podprzestrzeniami produktu kartezjańskiego $\prod_{s\in S}(X_s, \mathcal{T}_s)$. Wybierając punkt dowolny punkt $x^0 \in \prod X_s$ dla każdego $t \in S$ definiujemy odwzorowanie zbiorów $\iota_t \colon X_t \to \prod_{s\in S} X_s$:

$$\iota_t(x_t)_s = \begin{cases} x_t \,\text{jeśli}\, s = t \\ x_s^0 \,\text{jeśli}\, s \neq t \end{cases}$$

Lemat 4.4.1. *Odwzorowanie* $\iota_t \colon (X_t, \mathcal{T}_t) \to \prod(X_s, \mathcal{T}_s)$ *jest ciągłe i zadaje homeomorfzim* $\iota_t \colon (X_t, \mathcal{T}_t) \xrightarrow{\simeq} (i_t(X_t), \mathcal{T}|i_t(X_t))$*, gdzie* $\mathcal{T}$ *oznacza topologię produktową w* $\prod_{s\in S}(X_s, \mathcal{T}_s)$.

Dowód. Żeby sprawdzić, że odwzorowanie jest ciągłe wystarczy sprawdzić, że złożenia z rzutowaniami $\prod(X_s, \mathcal{T}_s) \xrightarrow{p_s} (X_s, \mathcal{T}_s)$ są ciągłe. Istotnie z definicji: $p_t \circ \iota_t = id_{X_t}$ natomiast dla $s \neq t$, $p_s \circ \iota_t = x_s^0$ jest odwzorowaniem stałym. Odwzorowaniem odwrotnym do ι_t jest obcięcie rzutowania $p_t \colon \iota(X_t) \to X_t$. □

Podobnie jak poprzednio zbadamy zachowanie poznanych własności topologii ze względu na produkty kartezjańskie.

Stwierdzenie 4.4.3. *Produkt kartezjański* $\prod_{s\in S}(X_s, \mathcal{T}_s)$ *przestrzeni Hausdorffa spełnia I aksjomat przeliczalności (odp. II aksjomat przeliczalności) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego* $s \in S$ *przestrzeń* $(X_s, \mathcal{T}_s)$ *spełnia I aksjomat przeliczalności (odp. II aksjomat przeliczalności) oraz wszystkie zbiory* X_s*, poza przeliczalną liczbą są jednopunktowe.*

Dowód. $\Longrightarrow$ Jeśli $\prod_{s\in S}(X_s, \mathcal{T}_s)$ spełnia I aksjomat przeliczalności (odp. II aksjomat przeliczalności) to dowolna podprzestrzeń, a zatem przestrzenie $(X_s, \mathcal{T}_s)$ spełniają I aksjomat przeliczalności (odp. II aksjomat przeliczalności). Jeśli zbiór S jest nieprzeliczalny oraz $|X_s| > 2$, to stosując Lemat 2.2.1 stwierdzamy, że z bazy w punkcie (odp. bazy) opisanej w Stw. 4.4.1 nie da się wybrać bazy przeliczalnej.

$\Longleftarrow$ Niech $(X_i, \mathcal{T}_i)$ będzie przeliczalną rodziną przestrzeni spełniajacych II (odp. I) aksjomat przeliczalności. Wybierając bazy przeliczalne $\mathcal{B}_i \subset \mathcal{T}_i$ w przestrzeniach, wykonując konstrukcję opisaną w Stw. 4.4.1 otrzymujemy przeliczalną bazę produktu kartezjańskiego (odp. bazę w punkcie). □

Stwierdzenie 4.4.4. *Produkt kartezjański* $\prod_{s\in S}(X_s,\mathcal{T}_s)$ *przestrzeni Hausdorffa jest przestrzenią ośrodkową wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego* $s\in S$ *przestrzeń* $(X_s,\mathcal{T}_s)$ *jest ośrodkowa oraz co najwyżej* $2^{\aleph_0}$ *spośród przestrzeni* $(X_s,\mathcal{T}_s)$ *ma więcej niż jeden punkt.*

Dowód. $\Longrightarrow$ Jeśli $\prod_{s\in S}(X_s,\mathcal{T}_s)$ jest ośrodkowa to dla każdego $s\in S$ przestrzeń $(X_s,\mathcal{T}_s)$ jest ośrodkowa jako obraz ciągły przestrzeni ośrodkowej (p. Stw. 4.3.2).

Niech teraz $T := \{t\in S \,|\, |X_t|\geqslant 2\}$ i dla każdej przestrzeni X_t niech $U_t, V_t\in\mathcal{T}_t$ będą rozłącznymi niepustymi podzbiorami otwartymi. Wykażemy, że $|T|\leqslant 2^{\aleph_0}$. Niech $G\subset\prod_{s\in S}X_s$ będzie przeliczalnym podzbiorem gęstym; $\forall_{t\in T}\, G^t := G\cap\langle U_t\rangle$. Wykażemy, iż $G^t\neq G^r$ jesli $r\neq t$. Istotnie, dla dowolnych $r,t\in T$ wybierzmy element $d(r,t)\in G\cap\langle U_r,V_t\rangle = D\cap\langle U_r\rangle\cap\langle V_t\rangle$. Z definicji wynika, że $d(r,t)\in G^r$, ale $d(r,t)\notin G^t$. Wynika stąd, że przyporządkowanie $T\ni t\rightsquigarrow G^t\in\mathcal{P}(G)$ jest injekcją, a więc $|T|\leqslant|\mathcal{P}(G)|\leqslant 2^{\aleph_0}$.

$\Longleftarrow$ Załóżmy, że mamy rodzinę przestrzeni ośrodkowych indeksowanych liczbami rzeczywistymi $\{(X_r,\mathcal{T}_r)\}_{r\in\mathbb{R}}$ i niech $\forall_{r\in\mathbb{R}}\,\iota_r\colon(\mathbb{N},\mathcal{T}_\delta)\to(X_r,\mathcal{T}_r)$ będzie przekształceniem przeliczalnej przestrzeni dyskretnej (liczb naturalnych) na przeliczalny podzbiór gęsty w X_r. Obraz produktu kartezjańskiego tych odwzorowań $\prod_{r\in\mathbb{R}}\iota_r\colon\prod_{r\in\mathbb{R}}\mathbb{N}\to\prod_{r\in\mathbb{R}}X_r$ jest podzbiorem gęstym. Wystarczy zatem wskazć przeliczalny podzbiór gęsty w przestrzeni $\prod_{r\in\mathbb{R}}(\mathbb{N},\mathcal{T}_\delta)$. Przypomnijmy, że elementy iloczynu kartezjańskiego to odwzorowania $\phi\colon\mathbb{R}\to\mathbb{N}$. Wybierając dowolną rodzinę rozłącznych odcinków domkniętych o końcach wymiernych $[p_\cdot,q_\cdot] := \{[p_1,q_1],..,[p_k,q_k]\}$ i ciąg liczb naturalnych $n_\cdot := \{n_1,...,n_k\}$ definiujemy funkcję:

$$\phi_{([p_\cdot,q_\cdot],n_\cdot)}(r) = \begin{cases} n_i \text{ jeśli } r\in[p_i,q_i] \\ 0 \text{ jeśli } r\notin\bigcup[p_i,q_i]\end{cases}$$

Zbiór funkcji postaci $\phi_{([p_\cdot,q_\cdot],n_\cdot)}$ jest przeliczalny oraz jest gęsty w $\prod_{r\in\mathbb{R}}(\mathbb{N},\mathcal{T}_\delta)$. Wystarczy wykazać, że dowolny zbiór bazowy zawiera taką funkcję. Zbiory bazowe opisane w Stw. 4.4.1 są postaci $U(r_1,..,r_k;n_1,...,n_k) := \{\psi\colon\mathbb{R}\to\mathbb{N}\,|\,\psi(r_i)=n_i\}$ gdzie $r_i\in\mathbb{R}$ są różnymi liczbami rzeczywistymi oraz $n_i\in\mathbb{N}$. Wybierając odcinki rozłączne o końcach wymiernych $[p_i,q_i]\ni r_i$ otrzymujemy funkcję $\phi_{([p_\cdot,q_\cdot],n_\cdot)}\in U(r_1,..,r_k;n_1,...,n_k)$. □

Stwierdzenie 4.4.5. *Produkt kartezjański* $\prod_{s\in S}(X_s,\mathcal{T}_s)$ *jest przestrzenią Hausdorffa wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego* $s\in S$ *przestrzeń* $(X_s,\mathcal{T}_s)$ *ma wlasność Hausdorffa.*

Dowód. $\Longrightarrow$ Jeśli dwa punkty $x=\{x_s\}_{s\in S}$, $y=\{y_s\}_{s\in S}$ są różne to istnieje $t\in S$ takie, że $x_t\neq y_t$. Wybierzmy w przestrzeni X_t otoczenia rozłączne $U_{x_t}\ni x_t$ oraz $U_{y_t}\ni y_t$. Zbiory $\langle U_{x_t}\rangle\ni x$ oraz $\langle U_{y_t}\rangle\ni y$ są rozłącznymi otoczeniami x,y (oznaczenia p. 4.4.1).

$\Longleftarrow$ Odwrotnie, jeśli produkt kartezjański jest przestrzenią Hausdorffa, to dowolna podprzestrzeń jest przestrzenią Hausdorffa, a zatem dla każdego $s\in S$ przestrzeń $(X_s,\mathcal{T}_s)$ jest przestrzenią Hausdorffa. □

Twierdzenie 4.4.1. *Produkt kartezjański niepustych przestrzeni* $\prod_{s\in S}(X_s,\mathcal{T}_s)$ *jest przestrzenią metryzowalną wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego* $s\in S$ *przestrzeń* $(X_s,\mathcal{T}_s)$ *jest metryzowalna i wszystkie one, poza przeliczalną liczbą są jednopunktowe.*

Dowód. $\Longrightarrow$ Jeśli $\prod(X_s, \mathcal{T}_s)$ jest przestrzenią metryzowalna, to dowolna jej podprzestrzeń, a zatem każda przestrzeń $(X_s, \mathcal{T}_s)$ jest metryzowalna.

Jeśli nieprzeliczalnie wiele przestrzeni występujących w rodzinie $\{(X_s, \mathcal{T}_s)\}_{s\in S}$ ma więcej niż jeden punkt, to na mocy Stw. 4.4.3 $\prod\limits_{s\in S}(X_s, \mathcal{T}_s)$ nie ma bazy przeliczalnej w żadnym punkcie, a więc nie jest metryzowalna, bowiem dowolna przestrzeń metryzowalna spełnia I aksjomat przeliczalności (p. Przykład 2.2.1).

$\Longleftarrow$ Niech $\{(X_i, d_i)\}_{i=1}^{\infty}$ będzie przeliczalną rodziną przestrzeni metrycznych. W zbiorze $\prod\limits_{i=1}^{\infty} X_i$ definiujemy metrykę:

$$d'(x, y) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} d'(x_i, y_i)$$

gdzie $d_i'(x_i, y_i) := \min(d_i(x_i, y_i), 1)$. Zauważmy, że "obcięcie" metryk d_i jest konieczne, aby zapewnić zbieżność szeregu. W przypadku skończonego produktu $(X_1, d_1) \times \cdots \times (X_k, d_k)$, można metrykę zdefiniować prościej:

$$d(x, y) := \sum_{i=1}^{k} d(x_i, y_i)$$

Trzeba wykazać, że topologia zdefiniowana w $\prod\limits_{i=1}^{\infty} X_i$ przez metrykę d' jest identyczna z topologią produktową. Patrz BCPP Tw. 1.5.2. $\square$

4.5 Suma prosta

Zdefiniujemy konstrukcję sumy prostej rodziny zbiorów , dwoistą w pewnym sensie dokonstrukcji iloczynu kartezjańskiego .

Definicja 4.5.1. *Sumą prostą* (zwaną też koproduktem lub sumą rozłączną) rodziny zbiorów $\{X_s\}_{s\in S}$ nazywamy zbiór zbiór $\coprod\limits_{s\in S} X_s := \bigcup\limits_{s\in S} X_s \times \{s\}$ wraz z rodziną przekształceń (włożeń): $\mathfrak{j} := \{X_t \xrightarrow{j_t} \coprod\limits_{s\in S} X_s\}_{t\in S}, \quad j_t(x_t) := (x_t, t)$.

Zauważmy, że dla $s \neq t, (X_s \times \{s\}) \cap (X_t \times \{t\}) = \emptyset$.

Definicja 4.5.2. Sumą prostą (koproduktem) rodziny przestrzeni topologicznych $\{(X_s, \mathcal{T}_s)\}_{s\in S}$ nazywamy przestrzeń

$$\coprod_{s\in S}(X_s, \mathcal{T}_s) := (\coprod_{s\in S} X_s, \mathcal{T}_*(\mathfrak{j}))$$

gdzie $\mathcal{T}_*(\mathfrak{j}$ jest topologią wprowadzoną przez rodzinę odwzorowań $\mathfrak{j}$, wraz z (ciągłymi) odwzorowaniami $j_t : (X_t, \mathcal{T}_t) \xrightarrow{j_t} \coprod\limits_{s\in S}(X_s, \mathcal{T}_*(\mathfrak{j}))$.

Utożsamiając za pomocą j_s zbiór X_s z $X_s \times \{s\}$ możemy powiedziec, że podzbiór $U \subset \coprod\limits_{s\in S} X_s$ jest otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie przecięcia $U \cap X_s \in \mathcal{T}_s$, czyli są otwarte w $(X_s, \mathcal{T}_s)$. Zauważmy, że włożenia $j_t \colon (X_t, \mathcal{T}_t) \to \coprod\limits_{s\in S}(X_s, \mathcal{T}_s)$ są zanurzeniami homeomorficznymi.

Stwierdzenie 4.5.1 (Sumy proste odwzorowań)**.**

1) Odwzorowanie $f : \coprod_{s\in S}(X_s, \mathcal{T}_s) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ *jest ciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego* $t \in S$ *złożenie* $(X_t, \mathcal{T}_t) \xrightarrow{j_t} \coprod_{s\in S}(X_s, \mathcal{T}_s) \xrightarrow{f} (X_t, \mathcal{T}_t)$ *jest odwzorowaniem ciagłym.*

2) Dla dowolnej rodziny odwzorowań ciągłych $\{(X_s, \mathcal{T}_s) \xrightarrow{f_s} (Y, \mathcal{T}_Y)\}_{s\in S}$ *istnieje dokładnie jedno odwzorowanie ciągłe* $\coprod_{s\in S}(X_s, \mathcal{T}_s) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{T}_Y)$ *takie, że dla każdego* $s \in S$ *zachodzi równość* $f \circ j_s = f_s$.

Podobnie jak w przypadku iloczynów kartezjańskich zbadamy zachowanie poznanych własności topologii ze wzgledu na sumy proste. Jest to jednak dużo łatwiejsze.

Stwierdzenie 4.5.2.

1. *Suma prosta* $\coprod_{s\in S}(X_s, \mathcal{T}_s)$ *jest przestrzenią Hausdorffa wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego* $s \in S$ *przestrzeń* $(X_s, \mathcal{T}_s)$ *jest przestrzenią Hausdorffa.*
2. *Suma prosta rodziny przestrzeni spełnia I aksjomat przeliczalności wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie składniki spełniają I aksjomat przeliczalności.*
3. *Suma prosta rodziny przestrzeni spełnia II aksjomat przeliczalności wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie składniki spełniają I aksjomat przeliczalności i co najwyzej przeliczalnie wiele jest niepustych.*
4. *Suma prosta rodziny przestrzeni jest ośrodkowa wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie składniki są przestrzeniami ośrodkowymi i co najwyzej przeliczalnie wiele jest niepustych.*
5. *Suma prosta* $\coprod_{s\in S}(X_s, \mathcal{T}_s)$ *jest przestrzenią metryzowalną wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego* $s \in S$ *przestrzeń* $(X_s, \mathcal{T}_s)$ *jest metryzowalna.*

Dowód. Dowody punktów 1-4 jako bardzo łatwych pomijamy.

Ad 5. $\Longrightarrow$ Jeśli $\coprod_{s\in S}(X_s, \mathcal{T}_s)$ jest przestrzenią metryzowalną to dowolna jej podprzestrzeń, zatem także $(X_s, \mathcal{T}_s)$ jest przestrzenią metryzowalną.

$\Longleftarrow$ Jeśli dana jest rodzina przestrzeni metrycznych $\{(X_s, d_s)\}_{s\in S}$ to w zbiorze $\coprod_{s\in S} X_s$ określamy metrykę:

$$d(((x,s),(x',t)) = \begin{cases} d'_s(x,x') & \text{jeśli} \quad s = t \\ 1 \quad \text{jeśli} & s \neq t \end{cases}$$

gdzie $d'_s(x,x') := \min(d_s(x,x'), 1)$. W tej metryce kule o środku w punkcie $(x,s) \in \coprod_{s\in S} X_s$ i promieniu < 1 są identyczne jak kule w metryce d_s w zbiorze X_s. Stąd wynika, że metryka d' definiuje topologię $\mathcal{T}_*(\mathrm{j})$. □

Zauważmy, że tak jak w przypadku metryki w produkcie kartezjańskim musielismy "obciąć" metryki d_i (nawet w przypadku sumy dwóch przestrzeni!), tym razem po to, aby spełniona była nierówność trójkąta.

Rozdział 5

Spójność i łukowa spójność

5.1 Spójność

Definicja 5.1.1 (Spójność)**.** Przestrzeń $(X, \mathcal{T})$ jest *spójna* jeśli nie istnieją niepuste zbiory $U, V \in \mathcal{T}$ takie, że $X = U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$.

Podzbiór $A \subset X$ nazywa się *spójny* jeśli podprzestrzeń $(A, \mathcal{T}|A)$ jest spójna.

Przykład 5.1.1. Przestrzeń dyskretna zawierająca więcej niż jeden element jest niespójna. Przestrzeń antydyskretna jest zawsze spójna.

Stwierdzenie 5.1.1. *Przestrzeń jest niespójna wtedy i tylko wtedy, gdy jest homeomorficzna z sumą prostą dwóch niepustych przestrzeni.*

Dowód. $\Longrightarrow$ Jeśli przestrzeń jest niespójna, to $X = U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$ gdzie $U, V \in \mathcal{T}$. Oczywiste odwzorowanie $U \coprod V \to X$ jest homeomorfizmem, bowiem jest ciagłą bijekcją i przeprowadza zbiory otwarte na otwarte.

$\Longleftarrow$ Jeśli $h \colon (X_1 \coprod X_2, \mathcal{T}_*) \to (X, \mathcal{T})$ jest homeomorfizmem, to $X = h(X_1) \cup h(X_2)$ jest rozkładem X na sumę dwóch niepustych rozłącznych podzbiorów otwartych, a więc $(X, \mathcal{T})$ nie jest spójna. □

Stwierdzenie 5.1.2 (Kryteria spójności)**.** *Następujące warunki dla przestrzeni* $(X, \mathcal{T})$*są równoważne:*

1) $(X, \mathcal{T})$ *jest spójna.*

2) Jedynymi zbiorami otwartymi i domkniętymi są $\emptyset, X$.

3) Każde odwzorowanie ciągłe $f : (X, \mathcal{T}) \to (\{0, 1\}, \mathcal{T}_\delta)$ *jest stałe.*

Dowód. (1) $\Longrightarrow$ (2) Jeśli $U \subset X$ jest niepustym otwarto - domkniętym podzbiorem różnym od X, to $X = U \cup (X \setminus U)$ jest rozkładem na sumę rozłącznych, niepustych podzbiorów otwartych, a więc $(X, \mathcal{T})$ nie jest spójna.

(2) $\Longrightarrow$ (1) Przestrzeń nie jest spójna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją niepuste zbiory $U, V \in \mathcal{T}$ takie, że $X = U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$ a zatem U, V są zbiorami otwartymi i domkniętymi różnymi od $\emptyset, X$.

(2) $\implies$ (3) Jeśli $f : (X, \mathcal{T}) \to (\{0,1\}, \mathcal{T}_\delta)$ jest ciągłe, to przeciwobrazy $f^{-1}(0)$, $f^{-1}(1)$ są rozłącznymi zbiorami otwarto – domkniętymi, a zatem jeden z nich musi być zbiorem X a drugi zbiorem pustym. A to oznacza, że f jest stałe.

(2) $\impliedby$ (3) Jeśli $U \subset X$ jest podzbiorem otwarto-domkniętym różnym od $\emptyset, X$ to definujemy funkcję ciagłą $f(x) := \begin{cases} 1 \,\mathrm{dla}\, x \in U \\ 0 \,\mathrm{dla}\, x \notin U \end{cases}$, która nie jest stała. □

Wniosek 5.1.1 (Podzbiory spójne)**.**

1. *Jeśli $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ jest ciągłą surjekcją określoną na spójnej przestrzeni $(X, \mathcal{T}_X)$ to $(Y, \mathcal{T}_Y)$ też jest spójna.*

2. *Jeśli $C \subset X$ jest zbiorem spójnym to dowolny podzbiór A taki, że $C \subset A \subset \mathrm{cl}(C)$ jest też spójny.*

3. *Jeśli $X = \bigcup_{i \in I} C_i$ jest suma spójnych podzbiorów C_i oraz istnieje zbiór C_{i_0} taki, że dla każdego $i \in I$, $C_{i_0} \cap C_i \neq \emptyset$, to X jest przestrzenią spójną.*

Dowód.

Ad 1. Jeśli $(Y, \mathcal{T}_Y)$ nie jest spójna, to istnieje rozkład się na sumę niepustych, otwartych rozłącznych podzbiorów $Y = V_1 \cup V_2$. Wtedy $X = f^{-1}(V_1) \cup f^{-1}(V_2)$ jest rozkładem przestrzeni X na sumę niepustych, otwartych rozłącznych podzbiorów, a więc $(X, \mathcal{T})$ nie byłaby spójna.

Ad 2. Niech $f \colon A \to \{0,1\}$ będzie odwzorowaniem ciągłym. Skoro C jest zbiorem spójnym, to $f|A$ jest stała. Ponieważ $\mathrm{cl}_A(C) = \mathrm{cl}_X(C) \cap A = A$, więc funkcja f jest stała na zbiorze A.

Ad 3. Niech $f \colon X \to \{0,1\}$ będzie funkcją ciągłą. Z założenia $f \colon C_i \to \{0,1\}$ jest stała, wystarczy więc zauważyć, że jej wartość nie zależy od i. Wynika to stąd, że $\forall_{i \in I} C_{i_0} \cap C_i \neq \emptyset$ a więc na każdym zbiorze C_i funkcja f_i przybiera tę sama wartość co na C_{i_0}. □

Przy pewnych dodatkowych założeniach zachodzi twierdzenie odwrotne do 5.1.1 pkt.1:

Stwierdzenie 5.1.3. *Niech $p : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ będzie odwzorowaniem ilorazowym*[1] *na przestrzeń spójną $(Y, \mathcal{T}_Y)$. Jeśli przeciwobraz $f^{-1}(y)$ dowolnego punktu $y \in Y$ jest zbiorem spójnym, to $(X, \mathcal{T}_X)$ jest przestrzenią spójną.*

Dowód. Niech $\phi : (X, \mathcal{T}_X) \to (\{0,1\}, \mathcal{T}_\delta)$ będzie odwzorowaniem ciagłym. Dla dowolnego $y \in Y$ obcięcie $\phi \colon f^{-1}(y) \to \{0,1\}$ jest stałe, a więc odwzorowanie $\bar{\phi} \colon Y \to \{0,1\}$, $\bar{\phi}(y) := \phi(x)$ gdzie $p(x) = y$ jest dobrze zdefiniowane. Jest także ciągłe, bo złożenie $p \circ \bar{\phi} = \phi$ jest ciągłe, a p jest ilorazowe. Ponieważ $(Y, \mathcal{T}_Y)$ jest spójna, więc odwzorowanie $\bar{\phi}$ jest stałe, a zatem ϕ jest stałe, co dowodzi spójności $(X, \mathcal{T}_X)$. □

Stwierdzenie 5.1.4. *Niech dane będzie pokrycie przestrzeni spójnej $(X, \mathcal{T})$ zbiorami otwartymi $\mathcal{U} := \{U_t\}_{t \in T}$ Każde dwa punkty $a, b \in X$ dają się połączyć skończonym łańcuchem złożonym ze zbiorów z rodziny $\mathcal{U}$, tzn. istnieją wskaźniki $t_0, \ldots, t_n \in T$ takie, że $a \in U_{t_0}$, $b \in U_{t_n}$ oraz $U_{t_i} \cap U_{t_{i+1}} \neq \emptyset$ dla $i = 0, \ldots n-1$.*

[1] Odwzorowanie nazywa się ilorazowe jeśli jest surjekcją oraz $\mathcal{T}_Y = p_* \mathcal{T}_X$

Dowód. Jesli dla punktów a i b spełniona jest teza twierdzenia, to będziemy mówili w skrócie, że dają się połączyć łańcuchem w pokryciu $\mathcal{U}$. Ustalmy punkt $a \in X$ i rozpatrzmy zbiór

$$C(a) := \{x \in X \mid \exists \text{ łańcuch w pokryciu } \mathcal{U} \text{ łączący } a \text{ z } x\}.$$

Zauważmy, że ten zbiór jest otwarty: jeśli $x \in C(a)$ i $x \in U_t$, to $U_t \subset C(a)$. Jest takze domknięty, bo jego dopełnienie jest zbiorem otwartym: jeśli $x \notin C(a)$ oraz $x \in U_t$ to $U_t \subset X \setminus C(a)$. Ponieważ $a \in C(a)$ więc ze spójności przestrzeni $(X, \mathcal{T})$ wnioskujemy, ze $C(a) = X$. □

Wniosek 5.1.2. *Jeśli (X; d) jest przestrzenią metryczną spójną, to dla dowolnych $a, b \in X$ i dla każdego $\epsilon > 0$ istnieją punkty $x_1, \dots, x_n \in X$ takie, że $x_1 = a$, $x_n = b$ oraz $d(x_i; x_{i+1}) < \epsilon$ dla $i = 1, \dots, n-1$.*

Dowód. Wystarczy zastosować Stw. 5.1.4 do pokrycia przestrzeni X kulami o promieniu $\epsilon/2$ i z kul wystepujących w łańcuchu wybrać po jednym punkcie. □

Spójne podzbiory prostej euklidesowej

Definicja 5.1.2. Podzbiór $A \subset \mathbb{R}$ nazywa się przedziałem jeśli stąd, że $a \leqslant c \leqslant b$ i $a, b \in A$ wynika $c \in A$, czyli dowolna liczba leżąca między dwoma liczbami należącymi do A też należy do A.

Twierdzenie 5.1.1 (Klasyfikacja spójnych podzbiorów prostej)**.**

1) *Dowolny przedział na prostej euklidesowej jest homeomorficzny z jednym ze standardowych przedziałów: zbiorem jednopunktowym $\{0\}$ lub odcinkiem $[0,1]$, $[0,1)$, $(0,1)$, przy czym żadne dwa z nich nie są homeomorficzne.*

2) *Podzbiór prostej euklidesowej $(A, \mathcal{T}_e|A) \subset (\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy jest przedziałem.*

Dowód. Dowolny niepusty przedział jest zbiorem jednopunktowym lub zbiorem postaci (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, b]$ gdzie $a < b$, a otwarty koniec odcinka może być $\pm\infty$ i ławto znaleźć wśród funkcji znanych z Analizy Matematycznej I homeomorfizmy z odpowiednimi przedziałami standardowymi. Dowód, że żadne dwa rózne przedziały standardowe nie są homeomorficzne wykażemy po udowodnieniu punktu 2).

Wykażemy, że przedziały standardowe są spójne. Ponieważ każdy przedział jest suma wstępujacej rodziny odcinków domkniętych, wystarczy wykazać spójność odcinka $[0,1]$. Niech $f\colon [0,1] \to \{0,1\}$ jest funkcją ciągłą i załóżmy, że $f(0) = 0$. Jeśli funkcja nie jest stała, zdefiniujmy
$t_1 := \inf\{t \in [0,1] \mid f(t) = 1\} > 0$. W punkcie t_1 funkcja nie byłaby ciągła, bowiem $f(t_1) = 1$, natomiast $f(t) = 0$ dla $t < t_1$.

Jeśli podzbiór $A \subset \mathbb{R}$ nie jest przedziałem, to istnieje liczba $r \notin A$ taka, że $\{a \in A \mid a < r\} \cup \{a \in A \mid a > r\} = A$ jest rozkładem zbioru A na sumę dwóch niepustych, rozłącznych podzbiorów otwartych.

Pokażemy teraz, że odcinki $[0,1]$, $[0,1)$, $(0,1)$, nie są parami homeomorficzne. Załóżmy, że istniałby homeomorfizm $h\colon [0,1) \to (0,1)$. Wtedy po usunieciu początku odcinka $[0,1)$

mielibysmy homeomorfizm $h\colon (0,1) \to (0,1) \setminus h(0)$. Jest to jednak niemożliwe, bo odcinek $(0,1)$ jest spójny, a po usunęciu dowolnego punktu staje się niespójny. Podobnie rozumujemy w przypadku pozostałych par odcinków, korzystając z tego, że końce odcinka mogą być scharakteryzowane jako jedyne punkty, których usunięcie nie narusza spójności. $\square$

Wniosek 5.1.3 (Uogólniona własność Darboux). *Jeśli $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ jest odwzorowaniem ciągłym i $(X, \mathcal{T})$ jest spójna, to $f(X) \subset \mathbb{R}$ jest przedziałem.* $\square$

Spójność a operacje na przestrzeniach

Zauważmy jak zachowuje się spójność przy poznanych operacjach na przestrzeniach topologicznych. Następujące własności są oczywiste:

1) Podprzestrzeń przestrzeni spójnej może nie być spójna.

2) Przestrzeń ilorazowa przestrzeni spójnej jest spójna na mocy Stw. 5.1.1 pkt. 1.

3) Suma prosta niepustych przestrzeni topologicznych nie jest spójna.

Trudniejsze do wykazania jest następujące:

Twierdzenie 5.1.2. *Iloczyn kartezjański rodziny przestrzeni topologicznych jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie przestrzenie są spójne.*

Dowód.

$\Longrightarrow$ Jeśli $\prod_{s\in S}(X_s, \mathcal{T}_s)$ jest przestrzenia spójną, to wszystkie czynniki $(X_s, \mathcal{T}_s)$ też są przestrzeniami spójnymi ponieważ rzutowania na czynniki $p_t\colon \prod_{s\in S}(X_s, \mathcal{T}_s) \to (X_t, \mathcal{T}_t)$ są ciagłymi surjekcjami.

$\Longleftarrow$ Zaczniemy od wykazania tezy dla skończonych rodzin przestrzeni. Dzięki indukcji wystarczy pokazać, że iloczyn dwóch spójnych przestrzeni $(X, \mathcal{T}_X)$ i $(Y, \mathcal{T}_Y)$ jest spójny. W tym celu rozłożymy $X \times Y$ na sumę spójnych podprzestrzeni spełniających założenia Stw. 5.1.1 pkt. 3. Wybierzmy punkt $x_0 \in X$ i przedstawmy $X \times Y = (\{x_0\} \times Y) \cup \bigcup_{y\in Y} X \times \{y\}$ Poziomice są zbiorami spójnymi oraz $\forall_{y\in Y}\, (\{x_0\} \times Y) \cap (X \times \{y\}) = \{(x_0, y)\} \neq \emptyset$. Z Stw. 5.1.1 pkt. 3 wynika, że $X \times Y$ jest przestrzenią spójną.

Niech teraz $\prod_{s\in S}(X_s, \mathcal{T}_s)$ będzie produktem dowolnej rodziny przestrzeni spójnych. Wybierzmy punkt $x^0 := \{x^0_s\}_{s\in S}$ i rozpatrzmy zbiór

$$D := \{\{x_s\}_{s\in S} \in \prod_{s\in S} X_s \,|\, x_s = x^0_s \,\text{poza skończenie wieloma}\, s \in S\}$$

Zbiór D jest sumą podzbiorów homeomorficznych ze skończonymi iloczynami: jeśli $F \subset S$ jest zbiorem skończonym, to podzbiór:

$$D_F := \{\{x_s\}_{s\in S} \in \prod_{s\in S} X_s \,|\, x_s = x^0_s\, s \in S \setminus F\}$$

jest homeomorficzny z $\prod_{s\in F}(X_s, \mathcal{T}_s)$ a więc spójny oraz $D = \bigcup_{F\subset S} D_F$. W przecięciu zbiorów D_F leży punkt x^0, więc D jest zbiorem spójnym.

Pozostaje zauważyć, że D jest gęstym podzbiorem $\prod_{s\in S}(X_s, \mathcal{T}_s)$. Dowolny zbiór z bazy topologii produktowej $\langle U_{s_1}, \dots U_{s_n}\rangle$ przecina zbiór D_F gdzie $F = \{s_1, \dots s_n\}$:

$$\langle U_{s_1}, \dots U_{s_n}\rangle \cap D_F = \prod_{s\in S} A_s \quad \text{gdzie } A_s = \begin{cases} U_s \text{ dla } s \in F \\ x_s^0 \text{ dla } s \notin F \end{cases} .$$

Dowód kończy przywołanie Stw. 5.1.1 pkt. 2, bowiem $\mathrm{cl}(D) = \prod_{s\in S} X_s$. □

Składowe spójne

Definicja 5.1.3. *Składową spójną* przestrzeni $(X, \mathcal{T})$ nazywamy maksymalny (ze względu na inkluzję) podzbiór spójny w X. *Składową punktu* $x \in X$ nazywamy składową spójną zawierającą punkt x, a więc maksymalny zbiór spójny zawierający punkt x.

Stwierdzenie 5.1.5. *Niech $(X, \mathcal{T})$ będzie dowolną przestrzenią topologiczną.*

1. *Jeśli $C_1, C_2 \subset X$ są składowymi spójnymi, to $C_1 = C_2$ lub $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ oraz $X = \bigcup C$.*
2. *Składowe spójne są zbiorami domkniętymi.*

Dowód.
Ad 1. Jeśli $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$ to $C_1 \cup C_2$ jest zbiorem spójnym, zawierającym C_1 oraz C_2, a więc $C_1 = C_1 \cup C_2 = C_2$. Każdy punkt $x \in X$ należy do pewnej składowej spójnej, zwanej składową tego punktu i oznaczanej C_x.
Ad 2. Jeśli $C \subset X$ jest składową, to ponieważ $C \subset \mathrm{cl}(C)$ i na mocy Stw. 5.1.1 pkt. 2 domknięcie $\mathrm{cl}(C)$ jest zbiorem spójnym, musi zachodzić równość $C = \mathrm{cl}(C)$. □

Uwaga 5.1.1. Składowe spójne nie muszą być podzbiorami otwartymi. Np. składowymi zbioru $\{0\} \cup \{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ są zbiory jednopunktowe, a $\{0\}$ nie jest zbiorem otwartym. Natomiast składowe spójne dowolnego otwartego podzbioru $\mathbb{R}^n$ są otwarte, bowiem punkty w $\mathbb{R}^n$ posiadają dowolnie małe otoczenia spójne.

Stwierdzenie 5.1.6. *Jeśli $(X, \mathcal{T}_X) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{T}_Y)$ jest odwzorowaniem ciągłym, a $C \subset X$ jest składową spójną, to zbiór $f(C)$ jest zawarty w pewnej składowej przestrzeni $(Y, \mathcal{T}_Y)$. Jeśli f jest homeomorfizmem, to dla dowolnej składowej $C \subset X$, $f|C : C \to f(C)$ jest homeomorfizmem na składową $(Y, \mathcal{T}_Y)$.* □

Dowód. Teza wynika bezpośrednio z Stw. 5.1.1, bowiem obraz składowej musi być zbiorami spójnymi, a więc są zawarty w pewnym maksymalnym zbiorze spójnym. □

Zbiór składowych spójnych

Niech $(X, \mathcal{T})$ będzie przestrzenią topologiczną. Rozbicie zbioru X na sumę składowych, które są zbiorami rozłącznymi, wyznacza w X relację równoważności. Zbiór jej klas abstrakcji (czyli zbiór składowych) oznaczmy $\pi_0'(X)$.

Uwaga 5.1.2. W zbiorze $\pi_0'(X)$ można wprowadzić topologię ilorazową z przestrzeni $(X, \mathcal{T})$ (p. BCPP Zad. 5.9 – 5.11), ale w zastosowaniach do rozstrzygania pytania, czy dwie przestrzenie są homeomorficzne rozpatruje się jedynie zbiór $\pi_0'(X)$, ignorując topologię.

Bardzo ważna własność przypisania przestrzeni X zbioru $\pi_0'(X)$ polega na tym, że przekształceniom ciągłym między przestrzeniami mozna w "naturalny" sposób przypisać odwzorowania zbiorów. Dokładniej:

Stwierdzenie 5.1.7. *Dowolne odwzorowanie ciągłe $(X, \mathcal{T}_X) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{T}_Y)$ definiuje odwzorowanie zbiorów:*

$$f_\#\colon \pi_0'(X) \to \pi_0'(Y),\ f_\#(C) := \textit{składowa zawierająca}\, f(C)$$

przy czym $(Id_X)_\# = Id$ oraz jeśli $(X, \mathcal{T}_X) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{T}_Y) \xrightarrow{g} (Z.\mathcal{T}_Z)$ to zachodzi równość $(g \circ f)_\# = g_\# \circ f_\#$.

Dowód. Odwzorowanie $f_\#(C) :=$ składowa zawierająca $f(C)$ jest dobrze zdefiniowane, bowiem $f(C)$ jest zbiorem spójnym, a więc istnieje dokładnie jedna składowa przestrzeni X, która go zawiera.

Sprawdzimy, że $(g \circ f)_\# = g_\# \circ f_\#$. Z definicji

$$(g \circ f)_\#(C) = g(\text{składowa zawierająca}\, f(C)),$$

a więc jest maksymalnym zbiorem spójnym $E_1 \supset g(D) \supset g(f(C))$, gdzie $D \supset f(C)$ jest składową przestrzeni $(Y, \mathcal{T}_Y)$. Z drugiej strony

$$(gf)_\#(C) = \{\text{składowa zawierająca}\, g(f(C))\} := E_2,$$

przy czym $E_1 \cap E_2 \supset g(f(C))$ Suma zbiorów spójnych $E_1 \cup E_2$ jest więc zbiorem spójnym, a z maksymalności E_1 i E_2 wynika, że $E_1 = E_2$. □

Wniosek 5.1.4. *Jeśli $(X, \mathcal{T}_X) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{T}_Y)$ jest homeomorfizmem, to $\pi_0'(X) \xrightarrow{f_\#} \pi_0'(Y)$ jest bijekcją .*

Dowód. Niech $(Y, \mathcal{T}_Y) \xrightarrow{g} (X, \mathcal{T}_X)$ będzie odwzorowaniem odwrotnym, czyli $g \circ f = Id_X$ oraz $f \circ g = Id_Y$. Z Stw. 5.1.7 otrzymujemy, że $g_\# \circ f_\# = (g \circ f)_\# = Id_X$ oraz $f_\# \circ g_\# = (f \circ g)_\# = Id_Y$, a więc $f_\#$ i $g_\#$ są bijekcjami. □

Wniosek 5.1.5. *Jeśli $(X, \mathcal{T}_X) \xrightarrow{h} (Y, \mathcal{T}_Y)$ jest homeomorfizmem, to dla dowolnego podzbioru $A \subset X$, obcięcie $h\colon X \setminus A \to Y \setminus h(A)$ też jest homeomorfizmem, a więc definiuje bijekcję zbiorów $\pi_0'(X \setminus A) \xrightarrow{h_\#} \pi_0'(Y \setminus h(A))$.* □

Uwaga 5.1.3. Skorzystaliśmy z tego argumentu w szczególnym przypadku w dowodzie Tw. 5.1.1, wykazując że różne przedziały standardowe na prostej nie są homeomorficzne.

5.2 Łukowa spójność

Często łatwiejsze niż bezpośrednie wykazanie spójności jest sprawdzenie silniejszej, lecz bardziej geometrycznej własności przestrzeni, zwanej łukową spójnością.

Definicja 5.2.1. Przestrzeń topologiczna $(X, \mathcal{T})$ jest łukowo spójna jeśli dla dowolnych punktów $x_0, x_1 \in X$ istnieje odwzorowanie ciągłe (zwane drogą) $\omega : [0, 1] \to X$: $\omega(0) = x_0$, $\omega(1) = x_1$.

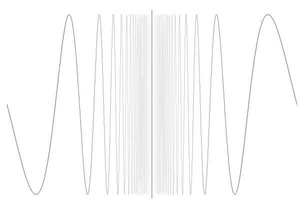
Stwierdzenie 5.2.1. *Jeśli przestrzeń $(X, \mathcal{T})$ jest łukowo spójna to jest spójna.*

Dowód. Wybierzmy punkt $x_0 \in X$ oraz dla każdego innego punktu $x \in X$ drogę $\omega_x : [0,1] \to X$: $\omega_x(0) = x_0$, $\omega_x(1) = x$. Wtedy $X = \bigcup_{x \in X} \omega_x([0,1])$, czyli jest sumą zbiorów spójnych o niepustym przecięciu: $x_0 \in \bigcap_{x \in X} \omega_x([0,1])$, a więc na podstawie Stw. 5.1.1 X jest przestrzenią spójną. □

Przykład 5.2.1. Dowolny wypukły podzbiór $W \subset \mathbb{R}^n$ przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$ jest łukowo spójny. Dla punktów $p_0, p_1 \in W$ definiujemy drogę je łączącą w zbiorze W, $\omega(t) := (1-t)p_0 + tp_1$. W szczególności kule euklidesowe są łukowo spójne, a więc także spójne.

Przykład 5.2.2. Podzbiór płaszczyzny euklidesowej

$$S = \{\, (x, \sin\frac{1}{x}) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{1}{\pi} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2\pi},\ x \neq 0\} \cup \{\, (0,y) : |y| \leqslant 1\,\}$$



jest spójny, lecz nie jest łukowo spójny (BCPP 4.2.3). Zauważmy, że $S = \overline{\{\, (x, \sin\frac{1}{x}) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{1}{\pi} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2\pi},\ x \neq 0\}}$

Stwierdzenie 5.2.2. *Niech $(X, \mathcal{T})$ będzie przestrzenią topologiczną. Relacja R w zbiorze X:*

$$R := \{(x_0, x_1) \in X \times X \mid \exists_{\omega:[0,1]\to X}\, \omega(0) = x_0,\, \omega(1) = x_1\}.$$

(czyli dwa punkty są w relacji R jeśli istnieje droga je łącząca) jest relacją równoważności.

Dowód. Relacja R jest zwrotna, droga stała $c_x(t) = x$ łączy x z x. R jest także symetryczna: jeśli $\omega : [0,1] \to X$ łączy x_0 z x_1 to droga $\bar{\omega}(t) := \omega(1-t)$ łączy x_1 z x_0. Pozostaje wykazać przechodniość. Niech $\omega_1 : [0,1] \to X$ łączy x_0 z x_1 a $\omega_2 : [0,1] \to X$ łączy x_1 z x_2. Zdefiniujemy drogę ω jako złożenie dróg

$$\omega(t) := (\omega_1 \star \omega_2)(t) = \begin{cases} \omega_1(2t) \text{ dla } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ \omega_2(2t-1) \text{ dla } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}.$$

Droga ω łączy x_0 z x_2. □

Przykład 5.2.3. Podzbiór $G \subset \mathbb{R}^n$ nazywamy gwiaździstym jeśli istnieje punkt $p_0 \in G$ taki, że dla dowolnego $p \in G$ odcinek $[p_0, p] \subset G$. Dowolny zbiór gwiaździsty jest łukowo spójny. Dowolny punkt $x \in G$ można połączyć z x_0 drogą afiniczną $\omega(t) := (1-t)x + tx_0$.

Wlasność łukowej spójności zachowuje się podobnie jak spójność (por. Stw. 5.1.1), z tym że domknięcie zbiorów łukowo spójnych nie musi być zbiorem łukowo spójnym (np. Przykład 5.2.2 - wykres dla $x > 0$).

Stwierdzenie 5.2.3.

1. *Jeśli $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ jest ciągłą surjekcją określoną na łukowo spójnej przestrzeni $(X, \mathcal{T}_X)$ to $(Y, \mathcal{T}_Y)$ też jest spójna.*

2. *Jeśli $X = \bigcup_{i \in I} C_i$ gdzie dla każdego $i \in I$ zbiór C_i jest łukowo spójny oraz istnieje $i_0 \in I$ taki, że dla każdego $i \in I$ $C_{i_0} \cap C_i \neq \emptyset$, to X jest przestrzenią łukowo spójną.*

Dowód.

Ad 1. Aby znaleźć drogę łączącą $y_0, y_1 \in Y$ wybierzmy punkty $x_0 \in f^{-1}(y_0)$, $x_1 \in f^{-1}(y_1)$. Ponieważ X jest łukowo spójna, istnieje droga $\omega : [0,1] \to X$ $\omega(0) = x_0$, $\omega(1) = x_1$. Drogę łączącą $y_0, y_1 \in Y$ definiujemy jako złożenie odwzorowań $\eta(t) := f(\omega(t))$.

Ad 2. Każdy punkt $x \in X$ można połączyć drogą z pewnym (zależnym *a priori* od $x \in X$!) punktem $x_0 \in C_0$, a dowolne dwa punkty w C_0 można też połączyć drogą. Stąd wynika, że dowolne dwa punkty w X można połączyć drogą. □

Łukowa spójność a operacje na przestrzeniach

Zauważmy jak zachowuje się łukowa spójność przy poznanych operacjach na przestrzeniach topologicznych. Nastepujące własności są oczywiste:

1) Podprzestrzeń przestrzeni łukowo spójnej może nie być łukowo spójna.

2) Przestrzeń ilorazowa przestrzeni spójnej jest spójna na mocy Stw. 5.2.3 pkt. 1.

3) Suma prosta niepustych przestrzeni topologicznych nie jest łukowo spójna (bo nie jest spójna).

Dla iloczynu kartezjańskiego dowód twierdzenia analogicznego do Twierdzenia 5.1.2 jest znacznie prostszy.

Twierdzenie 5.2.1. *Iloczyn kartezjański rodziny przestrzeni topologicznych jest przestrzenią łukowo spójny wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie czynniki iloczynu są spójne.*

Dowód.

$\Longrightarrow$ Jeśli $\prod_{s \in S} (X_s, \mathcal{T}_s)$ jest przestrzenia łukowo spójną, to wszystkie czynniki $(X_s, \mathcal{T}_s)$ też są przestrzeniami łukowo spójnymi na mocy Stw. 5.2.3 pkt.1, ponieważ rzutowania $p_t \colon \prod_{s \in S} (X_s, \mathcal{T}_s) \to (X_t, \mathcal{T}_t)$ są ciagłymi surjekcjami.

$\Longleftarrow$ Jeśli $x^0 := \{x_s^0\}_{s \in S}$ i $x^1 := \{x_s^1\}_{s \in S}$ są dwoma punktami w iloczynie kartezjańskim, to wybierzmy dla każdego $s \in S$ drogę $\omega_s : [0,1] \to X_s$ łączącą x_s^0 z x_s^1. Droga $\omega \colon [0,1] \to \prod_{s \in S} X_s$, $\omega(t) := \{\omega_s(t)\}_{s \in S}$ jest ciagła na mocy Stw. 4.4.2 i łączy x^0 z x^1. □

Składowe łukowo spójne

Analogicznie do pojęcia składowej spójnej przestrzeni topologicznej definiujemy składowe łukowo spójne.

Definicja 5.2.2. Składową łukowo spójną przestrzeni $(X, \mathcal{T})$ nazywamy maksymalny (ze względu na inkluzję) podzbiór łukowo spójny w X.

Zauważmy, że składowe łukowo spójne są dokładnie klasami równoważności relacji "istnienia drogi łączącej punkty", zdefiniowanej w Stw. 5.2.2. Wynika stąd natychmiast:

Stwierdzenie 5.2.4. *Jeśli $C_1, C_2 \subset X$ są składowymi łukowo spójnymi przestrzni $(X, \mathcal{T}_X)$, to $C_1 = C_2$ lub $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ a zbiór $X = \bigcup C$ jest sumą składowych łukowych.*

Stwierdzenie 5.2.5. $(X, \mathcal{T}_X) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{T}_Y)$, $C \subset X$ *– składowa łukowo spójna, to $f(C)$ jest zawarty w pewnej składowej łukowo spójnej $(Y, \mathcal{T}_Y)$.*

Dowód. Teza wynika natychmiast z Stw. 5.2.3 pkt.1. □

Zbiór składowych łukowo spójnych

Niech $(X, \mathcal{T})$ będzie przestrzenią topologiczną. Zbiór jej składowych łukowych, a więc klas abstrakcji relacji opisanej w Stw. 5.2.2, oznaczamy $\pi_0(X)$.

Uwaga 5.2.1. W zbiorze $\pi_0(X)$ można wprowadzić topologię ilorazową z przestrzeni $(X, \mathcal{T})$, ale w zastosowaniach do rozstrzygania pytania, czy dwie przestrzenie są homeomorficzne rozpatruje się jedynie zbiór $\pi_0(X)$, ignorując topologię.

Bardzo ważny aspekt przypisania przestrzeni X zbioru $\pi_0(X)$ polega na tym, że przekształceniom ciągłym między przestrzeniami mozna w "naturalny" sposób przypisać odwzorowania zbiorów. Dokładniej:

Stwierdzenie 5.2.6. *Dowolne odwzorowanie ciągłe $(X, \mathcal{T}_X) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{T}_Y)$ definiuje odwzorowanie zbiorów:*

$$f_\#\colon \pi_0(X) \to \pi_0(Y),\ f_\#(C) := \textit{składowa łukowa zawierająca}\, f(C)$$

przy czym $(Id_X)_\# = Id$ oraz dla dwóch odwzorowań $(X, \mathcal{T}_X) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{T}_Y) \xrightarrow{g} (Z.\mathcal{T}_Z)$ zachodzi równość $(g \circ f)_\# = g_\# \circ f_\#$. □

Wniosek 5.2.1. *Jeśli $(X, \mathcal{T}_X) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{T}_Y)$ jest homeomorfizmem, to $\pi_0(X) \xrightarrow{f_\#} \pi_0(Y)$ jest bijekcją .*

Wniosek 5.2.2. *Jeśli $(X, \mathcal{T}_X) \xrightarrow{h} (Y, \mathcal{T}_Y)$ jest homeomorfizmem, to dla dowolnego podzbioru $A \subset X$, obcięcie $h\colon X \setminus A \to Y \setminus h(A)$ też jest homeomorfizmem, a więc definiuje bijekcję zbiorów $\pi_0(X \setminus A) \xrightarrow{h_\#} \pi_0(Y \setminus h(A))$.* □

5.3 Spójność i łukowa spójność w przestrzeniach euklidesowych

W przykładach 5.2.1 i 5.2.3 pokazaliśmy, że zbiory gwiaździste w przestrzeniach euklidesowych, są łukowo spójne, a więc także spójne. Poniżej dyskutujemy związki pojęć łukowej spójności i spójności dla otwartych podzbiorów przestrzeni euklidesowych.

Stwierdzenie 5.3.1 (Składowe spójne podzbiorów otwartych)**.** *Składowe spójne dowolnego otwartego podzbioru $\mathbb{R}^n$ są zbiorami otwartymi.*

Dowód. Niech $C \subset U$ będzie składową spójną oraz $x \in C \subset U$. Ponieważ zbiór U jest otwarty możemy wybrać promień $r > 0$ taki,że $B(x, r) \subset U$. Zbiór $C \cup B(x, r)$ jest spójny, a więc z maksymalności U wynika, że $B(x, r) \subset C$, czyli C jest zbiorem otwartym. □

Stwierdzenie 5.3.2 (Spójność i łukowa podzbiorów otwartych)**.** *Otwarty, spójny podzbiór przestrzeni euklidesowej $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_e)$ jest łukowo spójny. Składowe spójne takiego zbioru są identyczne ze składowymi łukowo spójnymi.*

Dowód. Niech $U \subset \mathbb{R}^n$ będzie spójnym podzbiorem otwartym. Wybierzmy punk $x_0 \in U$ i rozważmy zbiór: $U_{x_0} := \{x \in U \,|\, \exists_{\omega:[0,1]\to X}\, \omega(0) = x_0,\, \omega(1) = x\}$, który oczywiście jest łukowo spójny. Pokażemy, że U_{x_0} jest zbiorem otwarto-domkniętym w U. Niech $x \in U_{x_0}$, wówczas istnieje $r > 0$ takie, że $B(x, r) \subset U_{x_0}$. Ponieważ kula euklidesowa jest łukowo spójna, więc dowolny punkt $x' \in B(x, r)$ można połączyć drogą z x, a zatem na mocy Stw. 5.2.2 także z punktem x_0. Taki sam argument pokazuje, że dopełnienie zbioru U_{x_0} jest zbiorem otwartym, a więc $U_{x_0} = U$. □

Składowe spójne grupy liniowej

Zajmiemy się teraz zbadaniem spójności ważnego podzbioru otwartego w przestrzeni macierzy kwadratowych $n\times n$ o współczynnikach rzeczywistych, a mianowicie grupy liniowej

$$GL(n, \mathbb{R}) := \{A \in M(n, n; \mathbb{R}) \,|\, \det A \neq 0\} \subset M(n, n; \mathbb{R}) = \prod_{i,j=1}^{n} \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^{n^2}$$

- $\det\colon M(n, n; \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ jest odwzorowaniem ciągłym, a więc $GL(n, \mathbb{R})$ jest podzbiorem otwartym przestrzeni macierzy $M(n, n; \mathbb{R})$.
- Mnożenie macierzy $GL(n, \mathbb{R}) \times GL(n, \mathbb{R}) \to GL(n, \mathbb{R})$ jest odwzorowaniem ciągłym.
- $\det\colon GL(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ jest ciągłą surjekcją, a więc $GL(n; \mathbb{R}) = GL^+(n, \mathbb{R}) \cup GL^-(n, \mathbb{R})$ jest sumą dwóch rozłącznych podzbiorów otwartych składających sie odpowiednio z macierzy o wyznaczniku dodatnim i ujemnym.
- mnożenie przez dowolna macierz $A \in GL^-(n, \mathbb{R})$ zadaje homeomorfizm $h_A\colon GL^+(n, \mathbb{R}) \to GL^-(n, \mathbb{R})$.

Twierdzenie 5.3.1. *Zbiór macierzy $GL^+(n, \mathbb{R})$ jest łukowo spójny.*

Dowód. Na mocy Stw. 5.3.2 wystarczy pokazać, że $GL^+(n,\mathbb{R})$ jest zbiorem spójnym. Będziemy postepować indukcyjnie ze wzgledu na wymiar macierzy: $GL^+(1,\mathbb{R}) = \mathbb{R}^* = \{t \in \mathbb{R} \,|\, t > 0\}$ a więc jest to zbiór spójny. Załóżmy, że $GL^+(k,\mathbb{R})$ jest spójna dla $k < n$ i rozważmy rzutowanie $p\colon GL^+(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ przypisujące każdej macierzy jej ostatnia kolumnę. Jako obcięcie rzutowania w produkcie kartezjańskim do otwartego podzbioru jest to odwzorowanie otwarte, a więc ilorazowe. Zauważmy, że odwzorowanie p polega na mnożeniu macierzy z prawej strony przez pionowo zapisany wektor bazy kanonicznej $\mathbf{e}_n := (0,..,0,1)$

Do odwzorowania p chcemy zastosować Stw. 5.1.3. Dla $n > 1$ przestrzeń $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ jest łukowo spójna, a więc spójna. Należy więc zbadać przeciwobrazy $p^{-1}(\mathbf{v})$ gdzie $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Zauważmy przede wszystkim, że dla dowolnych dwóch wektorów $p^{-1}(\mathbf{v})$ i $p^{-1}(\mathbf{w})$ są homeomorficzne. Istotnie, jeśli $C \in GL^+(n,\mathbb{R})$ jest macierzą taka, ze $C(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$, to mnozenie przez C z lewej strony zadaje homeomorfizm $C\cdot\colon p^{-1}(\mathbf{v}) \to p^{-1}(\mathbf{w})$ – przekształcenie odwrotne jest mnożeniem przez C^{-1}.

Rozpatrzmy więc $p^{-1}(\mathbf{e}_n)$. Jest to zbiór macierzy postaci zapisanych blokowo

$$M = \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{c} & 1 \end{pmatrix}$$

gdzie $A \in GL^+(n-1,\mathbb{R})$ a $\mathbf{c} = (c_{n,1}, ..., c_{n,n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Taką macierz można w połaczyć drogą $\omega\colon [0,1] \to GL^+(n,\mathbb{R})$z macierzą dla której $\mathbf{c} = 0$:

$$\omega(t) := \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ t\mathbf{c} & 1 \end{pmatrix}$$

Zbiór macierzy postaci

$$\begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \in GL^+(n,\mathbb{R})$$

jest homeomorficzny z $GL^+(n-1,\mathbb{R})$, a więc na mocy założenia indukcyjnego jest spójny, a zatem zbiór $p^{-1}(\mathbf{e}_n)$ jest spójny, co kończy dowód twierdzenia. $\square$

Wniosek 5.3.1. *Rozkład $GL(n;\mathbb{R}) = GL^+(n,\mathbb{R}) \cup GL^-(n,\mathbb{R})$ jest rozkładem na sumę dwóch homeomorficznych ze sobą składowych spójnych.* $\square$

Uwaga 5.3.1. Korzystając z rozkładu macierzy na iloczyn macierzy elementarnych można podać bezpośrednią konstrukcję drogi łączącej daną macierz z macierzą identycznościową. Szkic dowodu jest następujący:

1. $\forall\, A \in GL^+(n,\mathbb{R})$ jest iloczynem macierzy elementarnych.

2. $\forall$ macierzy elementarnej $E_{ij}(\lambda)$ istnieje droga $[0,1] \xrightarrow{\omega} GL(n,\mathbb{R})$ taka, że $\omega_{ij}(0) = E_{ij}(\lambda)$ oraz $\omega(1) = Id_{n-1} \oplus [\pm 1]$.

3. Jeśli $A = E^1_{i_1 j_1}(\lambda_1) \circ \cdots \circ E^k_{i_k j_k}(\lambda_k)$ i ω_r droga łącząca $E^r_{i_r j_r}(\lambda_r)$ z $Id_{n-1} \oplus [\pm 1]$. Wtedy droga $\omega(t) := \omega_1(t) \circ \cdots \circ \omega_k(t)$ łączy macierz A z $Id_{n-1} \oplus [\pm 1]$. Jeśli $\det A > 0$, to $\omega(0) = Id$.

Rozdział 6

Zwartość

6.1 Przestrzenie zwarte

Definicja 6.1.1. Przestrzeń topologiczna $(X, \mathcal{T})$ nazywa się zwarta jeśli jest przestrzenią Hausdorffa oraz z dowolnego pokrycia przestrzeni X zbiorami otwartymi można wybrać pokrycie skończone. Podzbiór $A \subset X$ nazywa się zwarty jeśli przestrzeń $(A, \mathcal{T}|A)$ jest zwarta.

Korzystając z wzorów de Morgana zwartość można także określić w terminach zbiorów domkniętych.

Stwierdzenie 6.1.1. *Przestrzeń Hausdorffa jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy dowolna rodzina zbiorów domkniętych $\{F_s\}_{s\in S}$ taka, że dla dowolnego skończonego zbioru wskaźników $s_1, \ldots, s_k \in S$ przecięcie zbiorów $F_{s_1} \cap \cdots \cap F_{s_k} \neq \emptyset$ (zwana wtedy rodziną scentrowaną) cała ma niepuste przecięcie $\bigcap\limits_{s\in S} F_s \neq \emptyset$.*

Dowód. Będziemy dowodzić, że przestrzeń jest niezwarta wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje rodzina scentrowana o pustym przecięciu. Rzeczywiście, przestrzeń jest niezwarta wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje jej pokrycie otwarte $\mathcal{U}$ z którego nie można wybrać podpokrycia skończonego tzn. rodzina zbiorów domkniętych $\{X \setminus U \,|\, U \in \mathcal{U}\}$ ma puste przecięcie i jest scentrowana. Odwrotnie, mając rodzinę scentrowaną zbiorów domkniętych o pustym przecięciu $\{F_s\}_{s\in S}$ otrzymujemy pokrycie otwarte $\{X \setminus F_s\}_{s\in S}$ którego nie można wybrać pokrycia skończonego. □

Zwartość, podobnie jak spójność jest zachowywana przez przekształcenia ciągłe.

Stwierdzenie 6.1.2. *Jeśli $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ jest ciągłą surjekcją z przestrzeni zwartej na przestrzeń Hausdorffa, to $(Y, \mathcal{T}_Y)$ jest przestrzenią zwartą.*

Uwaga 6.1.1. Założenie o tym, że $(Y, \mathcal{T}_Y)$ jest przestrzenią Hausdorffa jest konieczne, bowiem obraz ciągły (a nawet iloraz) przestrzeni zwartej nie musi być przestrzenią Hausdorffa (p. Przykład 4.3.1).

6.2 Zwartość a operacje na przestrzeniach

Podprzestrzenie

Twierdzenie 6.2.1.

1. *Jeśli podprzestrzeń w przestrzeni Hausdorffa* $(A, \mathcal{T}|A) \subset (X, \mathcal{T})$ *jest zwarta to* $A \subset X$ *jest podzbiorem domkniętym.*

2. *Jeśli* $(X, \mathcal{T})$ *jest przestrzenią zwartą i* $A \subset X$ *podzbiorem domknietym, to przestrzeń* $(A, \mathcal{T}|A)$ *jest zwarta.*

Dowód. Ad 1. Załóżmy, że $(A, \mathcal{T}|A) \subset (X, \mathcal{T})$ jest zwarta i niech $x \notin A$. Wtedy dla każdego punktu $a \in A$ istnieją rozłączne otoczenia $U_a \ni a$ oraz $V_a \ni x$. Zbiory $\{U_a \cap A\}_{a \in A}$ tworzą otwarte pokrycie A, a więc można z niego wyjąć pokrycie skończone $U_{a_1} \cup \cdots \cup U_{a_n} \supset A$. Przecięcie $V := V_{a_1} \cap \cdots \cap V_{a_n}$ jest rozłączne z $U_{a_1} \cup \cdots \cup U_{a_n}$, a zatem $x \in V \subset X \setminus A$.

Ad 2. Niech $(X, \mathcal{T})$ będzie przestrzenią zwartą, a $A \subset X$ jesj podzbiorem domkniętym. Z Stw. 4.2.3 wiemy, że $(A, \mathcal{T}|A)$ jest przestrzenią Hausdorffa. Rozpatrzmy więc pokrycie otwarte $\{V_s\}_{s \in S}$ przestrzeni $(A, \mathcal{T}|A)$. Z definicji topologii podprzestrzeni wynika, ze istnieją zbiory $U_s \in \mathcal{T}$ takie, że $V_s = U_s \cap A$. Rozpatrzmy pokryciem otwarte przestrzeni X zbiorami $\{V_s\}_{s \in S} \cup \{X \setminus A\}$. Ponieważ $(X, \mathcal{T})$ jest zwarta z tego pokrycia można wybrać pokrycie skończone, a więc skończoną liczbe zbiorów $U_{s_1} \cup \cdots \cup U_{s_n} \supset A$ co kończy dowód. □

Z ostatniego twierdzenia wynikaja wnioski bardzo uzyteczne przy sprawdzaniu, czy dwie przestrzenie są homeomorficzne.

Wniosek 6.2.1. *Niech* $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ *będzie odwzorowaniem ciagłym określonym na przestrzeni zwartej* $(X, \mathcal{T}_X)$ *o wartościach w przestrzeni Hausdorffa* $(Y, \mathcal{T}_Y)$. *Wtedy:*

1) f *jest odwzorowaniem domkniętym (a więc ilorazowym).*

2) jeśli f *jest bijekcją, to jest homeomorfizmem.* □

Wniosek 6.2.2. *Jeśli* $(X, \mathcal{T}_1)$ *jest przestrzenią zwartą a* $\mathcal{T}_2$ *topologią Hausdorffa w* X *taką, że* $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$, *to* $\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_1$. □

Iloczyn kartezjański

Twierdzenie 6.2.2 (A.N. Tichonow[1]). *Iloczyn kartezjański przestrzeni topologicznych* $\prod_{s \in S} (X_s, \mathcal{T}_s)$ *jest przestrzenią zwartą wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie czynniki* $(X_s, \mathcal{T}_s)$ *są przestrzeniami zwartymi.*

Zanim przejdziemy do dowodu twierdzenia Tichonowa sformułujemy bardzo ważny, mający wiele zastosowań lemat o tubie.

[1] Andrei Nikolaevich Tikhonov (Gzhatska, Smoleńsk 1906 – 1993 Moskwa) – matematyk rosyjski [Mac Tutor]

Lemat 6.2.1 (Lemat o tubie)**.** *Niech $(X, \mathcal{T}_X)$ bedzie dowolną przestrzenią topologiczną, a $(Y, \mathcal{T}_Y)$ przestrzenią zwartą. Dla dowolnego punktu $x_0 \in X$ i zbioru otwartego w iloczynie kartezjańskim $W \supset \{x_0\} \times Y$ istnieje otocznie otwarte $U \ni x_0$ takie, że $W \supset U \times Y \supset \{x_0\} \times Y$.*

Dowód. Dla każdego punktu $(x_0, y) \in \{x_0\} \times Y$ istnieją otoczenia $U_y \ni x_0$ oraz $V_y \ni y$ takie, że $(x_0, y) \in U_y \times V_y \subset W$. Zbiory $\{V_y\}_{y \in Y}$ tworzą otwarte pokrycie przestrzeni Y, a więc mozna zeń wyjąć pokrycie skończone: $V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_n} = Y$. Zbiór $U := U_{y_1} \cap \dots \cap U_{y_n}$ jest otoczeniem x_0 i oczywiście dla każdego y_i, $U \times V_{y_i} \subset W$ a zatem $U \times Y \subset W$. $\square$

Wniosek 6.2.3. *Niech $(X, \mathcal{T}_X)$ bedzie dowolną przestrzenią topologiczną, a $(Y, \mathcal{T}_Y)$ przestrzenią zwartą. Wtedy projekcja $p_X : (X \times Y, \mathcal{T}^*) \to (X, \mathcal{T}_X)$ jest przekształceniem domkniętym.*

Dowód. Niech $A \subset X \times Y$ będzie zbiorem domkniętym. Żeby wykazać, że $p_X(A) \subset X$ jest domknięty trzeba sprawdzic, że dla każdego $x \notin p_X(A)$ istnieje otoczenie $U \ni x$ takie, że $U \cap p_X(A) = \emptyset$ tzn. $p_X^{-1}(U) \cap A = \emptyset$. Oczywiście $p_X^{-1}(U) = U \times Y$, a więc wystarczy zastosować Lemat o tubie 6.2.1 do zbioru otwartego $X \times Y \setminus A$ oraz punktu $x \notin p_X(A)$. $\square$

Kolejne twierdzenie jest analogiczne do udowodnionego wcześniej Twierdzenia 5.1.3 dotyczącego spójności.

Twierdzenie 6.2.3. *Jeśli $f\colon (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ jest przekształceniem domkniętym takim, że $(X, \mathcal{T}_X)$ jest przestrzenią Hausdorffa, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ jest zwarta i dla każdego $y \in Y$ przeciwobraz $f^{-1}(y)$ jest zbiorem zwartym, to przestrzeń $(X, \mathcal{T}_X)$ jest zwarta.*

Dowód. Niech $\{U_s\}_{s \in S}$ będzie pokryciem otwartym X. Dla każdego punktu $y \in Y$ istnieje skończony podzbiór $S_y \subset S$ taki, że $\bigcup\limits_{s \in S_y} U_s \supset f^{-1}(y)$. Ponieważ f jest domkniete, więc istnieje $V_y \ni y$ takie, że $f^{-1}(V_y) \subset \bigcup\limits_{s \in S_y} U_s$. Zbiory $\{V_y\}_{y \in Y}$ tworzą pokrycie przestrzeni Y, zatem można z niego wybrać pokrycie skończone $V_{y_1}, \dots V_{y_n}$. Zbiory $\{U_s\}_{s \in S'}$ gdzie $S' := S_{y_1} \cup \dots \cup S_{y_n}$ tworzą pokrycie skończone X. $\square$

Wywnioskujemy teraz tezę twierdzenia Tichonowa dla skończonych rodzin przestrzeni.

Wniosek 6.2.4. *Iloczyn kartezjański skończonej rodziny przestrzeni topologicznych $\prod\limits_{s \in S} (X_s, \mathcal{T}_s)$ jest przestrzenią zwartą wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie czynniki $(X_s, \mathcal{T}_s)$ są przestrzeniami zwartymi.*

Dowód. Jak zauważylismy wcześniej zwartość iloczynu pociąga zwartośc czynników. Odwrotnie, skoro rodzina przestrzeni jest skończona wystarczy wykazać tezę dla iloczynu dwóch przestrzeni. Wynika ona natychmiast z Wniosku 6.2.3 oraz Twierdzenia 6.2.3. $\square$

Twierdzenie Tichonowa 6.2.2 w pełnej ogólności jest równoważne pewnikowi wyboru w teorii mnogości, a jego dowód wymaga zastosowania lematu Kuratowskiego-Zorna [p.BCPP Rozdział 7.3].

Przestrzeń ilorazowa i suma prosta

Zachowanie zwartości przy pozostałych dwóch operacjach jest znacznie łatwiejsze do sprawdzenia.

Przestrzeń ilorazowa przestrzeni zwartej jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy jest przestrzenią Hausdorffa.

Natomiast suma prosta $\coprod_{s\in S}(X_s, \mathcal{T}_s)$ jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie przestrzenie X_s są zwarte oraz $X_s \neq \emptyset$ tylko dla skończenie wielu $s \in S$.

6.3 Zwartość w przestrzeniach metrycznych

6.3.1 Zwartość metryczna i topologiczna

Definicja 6.3.1. Przestrzeń metryczna (X, d) nazywa się zwartą jeśli z dowolnego ciągu jej elementów można wybrać podciąg zbieżny.

Twierdzenie 6.3.1. *Przestrzeń metryczna (X, d) jest zwarta (w sensie metrycznym) wtedy i tylko wtedy, gdy przestrzeń topologiczna $(X, \mathcal{T}(d))$ jest zwarta.*

Do dowodu implikacji $\Longrightarrow$ potrzebne będą dwa lematy:

Lemat 6.3.1. *Jeśli przestrzeń (X, d) jest zwarta (metrycznie), to topologia $\mathcal{T}(d)$ posiada bazę przeliczalną, a więc z każdego pokrycia otwartego przestrzeni $(X, s\mathcal{T}(d))$ można wybrać pokrycie przeliczalne.*

Dowód. Dla każdej liczby naturalnej n rozważmy pokrycie przestrzeni X kulami o promieniu $\frac{1}{n}$. Z tego pokrycia można wybrać pokrycie skończone $\mathcal{U}_n$. Rodzina $\mathcal{B} := \bigcup \mathcal{U}_n$ jest przeliczalną bazą przestrzeni $(X, \mathcal{T}(d))$, a zatem na podstawie Stw. 2.2.1 z dowolnego pokrycia otwartego można wybrać pokrycie przeliczalne. □

Lemat 6.3.2. *Przestrzeń Hausdorffa $(X, \mathcal{T})$ taka, że z dowolnego jej pokrycia otwartego można wybrać pokrycie przeliczalne jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy każda zstepująca rodzina podzbiorów niepustych podzbiorów domkniętych ma niepuste przecięcie.*

Dowód. $\Longrightarrow$ Dowód wynika natychmiast z Stw. 6.1.1, bowiem zstępująca rodzina podzbiorów domkniętych jest scentrowana.

$\Longleftarrow$ Jeśli $\{U_s\}_{s\in S}$ jest dowolnym pokryciem otwartym, to można z niego wyjąc pokrycie przeliczalne, więc do dowodu zwartości wystarczy ograniczyć się do rozpatrywania otwartych pokryć przeliczalną liczbą zbiorów. Niech więc $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ będzie pokryciem przeliczalnym. Zdefiniujmy zbiory $V_n := U_1 \cup \cdots \cup U_n$. Wystarczy wykazać, że istnieje N takie, że $V_N = X$. Rozważmy w tym celu zstepującą rodzinę zbiorów domkniętych $F_n := X \setminus V_n$. Ponieważ $\bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n = X \setminus \bigcup_{n=1}^{+\infty} U_n = \emptyset$, więc istnieje N takie, że $\bigcap_{n=1}^{N} F_n = \emptyset$, a więc $V_N = X$. □

Dowód twierdzenia 6.3.1. $\Longleftarrow$ Niech $A_1 := \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ oraz $A_n := \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$. Zstępująca rodzina zbiorów domkniętych $F_n := \mathrm{cl}(A_n)$ jest scentrowana, a więc $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ zawiera pewien punkt x_0. Wybierając po jednym punkcie z każdego zbioru $x_{n(k)} \in F_k \cap B(x_0, \frac{1}{k})$ otrzymujemy podciąg zbieżny do x_0.

$\Longrightarrow$ Na mocy lematów 6.3.1 oraz 6.3.2 wystarczy sprawdzić, że dowolna zstepująca przeliczalna rodzina niepustych zbiorów domkniętych ma niepuste przecięcie. Z założenia dowolnie wybrany ciąg elementów $x_n \in F_n$ posiada podciąg zbieżny $\{x_{n_k}\}$, którego granica musi należeć do $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$. □

6.3.2 Liczba Lebesgue'a pokrycia

Stwierdzenie 6.3.1. *Niech (X,d) będzie zwartą przestrzenią metryczną a $\mathcal{U} = \{U_s\}_{s\in S}$ jej pokryciem zbiorami $U_s \in \mathcal{T}(d)$. Wówczas istnieje liczba $\lambda > 0$ – zwana liczbą Lebesgue'a[2] pokrycia – taka, że $\forall_{x\in X} \exists_{s(x)\in S}\, B(x,\lambda) \subset U_{s(x)}$.*

Dowód. Dla każdego $x \in X$ istnieje zbiór U_s i liczba $\epsilon_{s,x} > 0$ taka, że $B(x, 2\epsilon_{s,x}) \subset U_s$. Z pokrycia kulami $\{B(x,\epsilon_{s,x})\}_{x\in X}$ można wybrać pokrycie skończone $\{B(x_i,\epsilon_{s_i,x_i})\}_{i=1}^{N}$. Liczba $\lambda := \min\{\epsilon_{s_1,x_1},\ldots,\epsilon_{s_N,x_N}\}$ spełnia tezę twierdzenia. Istotnie, dla dowolnego punktu $y \in X$ oraz istnieje zbiór $B(x_i, \epsilon s_i, x_i \in y$. Zatem dla dowolnego $z \in B(y,\lambda)$ mamy $d(x_i,z) \leqslant d(x_i,y) + d(y,z) \leqslant \epsilon_{s_i,x_i} + \lambda \leqslant 2\epsilon_{s_i,x_i}$, a więc $B(y,\lambda) \subset U_{s_i}$. □

6.3.3 Zwarte podzbiory przestrzeni euklidesowych

Stwierdzenie 6.3.2. *Podzbiór zwarty dowolnej przestrzeni metrycznej (X,d) jest domknięty i ograniczony (tzn. zawarty w pewnej kuli). W przestrzeni przestrzeni euklidesowej $(\mathbb{R}^n, d_e)$ podzbiór domknięty i ograniczony jest zwarty.*

Dowód. Jeśli $A \subset X$ jest podzbiorem zwartym przestrzeni metryzowalnej, to musi być domknięty, bowiem przestrzeń metryzowalna jest Hausdorffa. Zauważmy najpierw, że podzbiór zwarty prostej musi być ograniczony. Wybierzmy punkt $a_0 \in A$ i rozważmy funkcję $d(a_0,\cdot)\colon X \to \mathbb{R}$. Ponieważ A jest zbiorem zwartym istnieje $R > 0$ takie, że dla każdego $a \in A$ zachodzi nierówność $d(a_0,a) \leqslant R$, stąd zbiór A jest zawarty w kuli $B(a_0,R)$.

Niech teraz $A \subset \mathbb{R}^n$ będzie domkniętym i ograniczonym podzbiorem przestrzeni euklidesowej (metryka euklidesowa!). Wtedy istnieje odcinek $[a,b]$ taki, że $A \subset [a,b]^n \subset \mathbb{R}^n$. Ponieważ kostka $[a,b]^n$ jest zwarta, a więc A jako jej podzbiór domknięty jest zbiorem zwartym. □

Przykład 6.3.1. Zbiór macierzy ortogonalnych $O(n) \subset GL(n,\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n$ jest zwarty. Istotnie, jako zbiór rozwiązań układu równań dwuliniowych jest on domknięty. Ponieważ kolumny macierzy ortogonalnej są wektorami o długości 1, $O(n)$ jest zbiorem ograniczonym, a więc zwartym.

[2] Henri Léon Lebesgue, Beauvais (Oise, Picardie, Francja 1875 - 1941 Paryż) formulated the theory of measure in 1901 and the following year he gave the definition of the Lebesgue integral that generalises the notion of the Riemann integral. [Mac Tutor]

Rozdział 7

Zupełność

7.1 Ciągi Cauchy i zupełność przestrzeni metrycznych

Znane z Analizy Matematycznej pojęcie ciągu Cauchy liczb przenosi się na dowolne przestrzenie metryczne:

Definicja 7.1.1. Ciąg punktów $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ w przestrzeni metrycznej (X, d) , nazywa się ciągiem Cauchy jeśli

$$\forall_{\epsilon>0}\exists_{n(\epsilon)}\forall_{r,s>n(\epsilon)}\, d(x_r, x_s) < \epsilon, \qquad \text{czyli}\, d(x_r, x_s) \to 0$$

Dowolny ciag zbieżny w (X, d) jest ciągiem Cauchy, lecz nie każdy ciąg Cauchy musi być zbieżny (np. w $((0, 1), d_e)$).

Stwierdzenie 7.1.1. *Jeśli $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem Cauchy to prawie wszystkie wyrazy ciągu leżą w kuli o dowolnie małym promieniu. Jeśli zbiór $\{x_n\}$ posiada punkt skupienia x_0, to ciąg $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do x_0.*

Dowód. Niech $\epsilon > 0$. Z definicji ciągu Cauchy istnieje n_0 takie, że dla każdego $n, m \geqslant n_0$ zachodzi $d(x_n, x_m) \leqslant \frac{1}{2}\epsilon$, a zatem prawie wszystkie wyrazy ciągu leżą w kuli $B(x_{n_0}, \epsilon)$.

Jeśli zbiór $\{x_n\}$ posiada punkt skupienia x_0, to istnieje podciąg $\{x_{n_k}\}$ zbieżny do x_0. Stąd $d(x_n, x_0) \leqslant d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_0) \leqslant \epsilon$ dla dostatecznie dużych n i n_k. □

Definicja 7.1.2. Przestrzeń metryczna jest *zupełna* jeśli dowolny ciąg Cauchy jej elementów jest zbieżny (tzn. posiada granicę).

Stwierdzenie 7.1.2. *Jeśli $h\colon (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ jest bijekcją zachowującą odległość (tzn. izometrią) oraz (X, d) jest przestrzenią zupełną, to (Y, d_Y) też jest przestrzenią zupełną.* □

Zwarta przestrzeń metryczna jest oczywiście zupełna, a z Twierdzenia 6.3.1 wynika, że dowolna metryka wyznaczająca topologię zwarta jest zupełna. Zachodzi nawet następujące nieco silniejsze twierdzenie:

Stwierdzenie 7.1.3. *Jeśli (X, d) jest przestrzenią metryczną. Załóżmy, że istnieje liczba $r > 0$ taka, że dla każdego punktu $x \in X$ domknięcie kuli $\mathrm{cl}(B(x, r))$ jest zbiorem zwartym. Wtedy (X, d) jest przestrzenią zupełną.*

Dowód. Niech $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem Cauchy. Z Stwierdzenia 7.1.1 wynika, że prawie wszystkie elementy tego ciągu leżą w pewnej zwartej kuli $\mathrm{cl}(B(x,r))$, a więc ten ciąg jest zbieżny. □

Zupełność jest własnością metryczną pokrewną topologicznej zwartości, co świetnie ilustruje kolejne twierdzenie, analogiczne do Lematu 6.3.2. Należy jednak zauważyć, że w ogólności zupełność nie jest własnością topologiczną: dwie metryki mogą być równoważne, ale jedna zupełna a druga nie. Np. w zbiorze liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ można określić metrykę równoważną z (zupełną) metryką euklidesową, która nie jest zupełna.

Definicja 7.1.3. Niech A będzie podzbiorem w przestrzeni metrycznej (X,d). *Średnicą zbioru* A nazywa sie liczbę (lub $+\infty$) $d(A) := \sup\{d(x,y) \mid x,y \in A\}$

Lemat 7.1.1. *Dla dowolnego podzbioru A w w przestrzeni metrycznej (X,d) zachodzi równość średnic: $d(A) = d(\mathrm{cl}(A))$*

Dowód. $d(a,b) \leqslant d(a,a_n)+d(a_n,b) \leqslant d(a,a_n)+d(a_n,b_n)+d(b_n,b)$ stąd $d(a,b) \leqslant d(a_n,b_n)+2\epsilon$ dla $n > n_0$, a więc $d(A) = d(\mathrm{cl}(A))$ □

Twierdzenie 7.1.1 (Warunek Cantora[1]). *Przestrzeń (X,d) jest zupełna wtedy i tylko wtedy, gdy każdy zstępujący ciąg niepustych zbiorów domkniętych o średnicach dążących do zera ma niepuste przecięcie.*

Dowód. Niech $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset ...$ będzie zstępującym ciagiem zbiorów domkniętych takich, że $d(F_i) \to 0$. Wybierając po jednym punkcie $x_n \in F_n$ otrzymujemy ciąg Cauchy. Na mocy zupełności (X,d) posiada on granicę, która musi należeć do $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} F_i$.

Odwrotnie, jeśli $\{x_i\}$ jest ciągiem Cauchy, to średnice zstępujących zbiorów domkniętych $F_n : \mathrm{cl}\{x_{n+1}, x_{n+2}, ...\}$ zbiegają do zera na mocy Lematu 7.1.1, a więc $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} F_i \neq 0$ i punkt z tego zbioru jest granicą ciagu $\{x_i\}$. □

Definicja 7.1.4. Przestrzeń metryczna jest *całkowicie ograniczona* jeśli dla dowolnej liczby $\epsilon > 0$ istnieje pokrycie X skończenie wieloma zbiorami o średnicy $< \epsilon$. (Równoważnie: z pokrycia kulami $\{B(x,\epsilon)\}_{x\in X}$ można wybrać pokrycie skończone.)

Twierdzenie 7.1.2. *Przestrzeń (X,d) jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy jest całkowicie ograniczona i zupełna.*

Dowód. $\Longrightarrow$ Jak zauważyliśmy dowolna przestrzeń zwarta jest zupełna, a z dowolnego pokrycia $\{B(x,\epsilon)\}_{x\in X}$ można wybrać pokrycie skończone.

$\Longleftarrow$ Załóżmy, że (X,d) jest zupełna i całkowicie ograniczona a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie dowolnym ciągiem z którego mamy wybrać podciąg zbieżny. SKonstruujemy indukcyjnie zstępujący ciąg zbiorów domkniętych, w którego przecięciu będzie znajdować się granica pewnego podciągu : pokryjmy przestrzeń X kulami o promieniu 1: $\{B(x,1)\}_{x\in X}$ i wybierzmy z niego kule w której znajduje się nieskończenie wiele wyrazów ciągu $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ Załóżmy, że skonstruowaliśmy już ciąg kul domknętych $\bar{B}(x_1,1), \ldots, \bar{B}(x_k,\frac{1}{k})$ takich, że w przecięciu

[1] Georg Cantor (St Petersburg 1845 – 1918 Halle) founded set theory and introduced the concept of infinite numbers with his discovery of cardinal numbers. He also advanced the study of trigonometric series. [Mac Tutor]

$F_k := \bar{B}(x_1, 1) \cap \ldots, \cap B(x_k, \frac{1}{k})$ znajduje się nieskończenie wiele wyrazów ciągu $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Pokryjmy X kulami $\{B(x, \frac{1}{k+1})\}_{x \in X}$. Istnieje wśród nich kula, która zawiera nieskończenie wiele wyrazów ciągu $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ znajdujących się w F_k. Otrzymaliśmy więc zstępujący ciąg zbiorów domkniętych $F_1 \supset F_2 \supset \ldots$ o średnicach zbiegających do 0. na mocy warunku Cantora 7.1.1 $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i \neq \emptyset$ a z konstrukcji wynika, że punkt $x_0 \in \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i \neq \emptyset$ jest punktem skupienia zbioru u $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ a zatem granicą pewnego podciągu. □

7.2 Przestrzenie unormowane

Definicja 7.2.1. *Przestrzenią unormowaną* nazywamy przestrzeń wektorową $\mathbf{V}$ nad $\mathbb{R}$ wyposażoną w normę $|| \cdot || : \mathbf{V} \to \mathbb{R}^+$ spełniającą warunki:

1. $\|\mathbf{v}\| = 0 \iff \mathbf{v} = 0$
2. $\|\lambda \mathbf{v}\| = |\lambda| \|\mathbf{v}\|$
3. $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leqslant \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$

Norma definiuje metrykę w zbiorze $\mathbf{V}$: $d(\mathbf{v}, \mathbf{w}) := \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|$. Jeśli ta metryka jest zupełna, to przestrzeń unormowana nazywa się *przestrzenią Banacha*[2].

Skończenie wymiarowe przestrzenie unormowane

Twierdzenie 7.2.1 (Równoważność norm). *Jeśli $\mathbf{V}$ jest skończenie wymiarową przestrzenią wektorową nad $\mathbb{R}$ to dowolne dwie normy definiują zupełne, równoważne metryki (tzn. wyznaczające tę samą topologię.)*

Wybierzmy bazę $\mathbf{v}_1, .., \mathbf{v}_n \in \mathbf{V}$ i zdefiniujmy normę $\|\mathbf{v}\|_{\sup} := \sup\{|\lambda_i| \mid \mathbf{v} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathbf{v}_j\}$. Wykażemy, że dowolna norma $\| \cdot \|$ jest równoważna z normą $\| \cdot \|_\infty$ tzn. istnieją stałe $B, C > 0$ takie, że $\forall_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}} \| \cdot \| \leqslant B \|\mathbf{v}\|_{\sup}$ oraz $\|\mathbf{v}\|_{\sup} \leqslant C \|\mathbf{v}\|$.

Lemat 7.2.1. *Istnieje $B > 0$ takie, że $\forall_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}} \|\mathbf{v}\| \leqslant B \|\mathbf{v}\|_{\sup}$, w szczególności odwzorowanie $\| \cdot \| \colon \mathbf{V} \to \mathbb{R}$ jest ciągłe w normie $\|\mathbf{v}\|_{\sup}$.*

Dowód. Niech $\mu := \max\{\|\mathbf{v}_1\|, ..., \|\mathbf{v}_n\|\}$.

$$\|\mathbf{v}\| = \| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathbf{v}_j \| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |\lambda_i^k| \|\mathbf{v}_j\| \leqslant \mu \sum_{j=1}^{n} |\lambda_i| \leqslant B \|\mathbf{v}\|_{\sup}, \text{ gdzie } \quad B := n\mu$$

□

Lemat 7.2.2. *Dowolna kula domknięta w normie $\| \cdot \|_{\sup}$, czyli zbiór $D(\mathbf{v}, r) := \{\mathbf{w} \in \mathbf{V} \mid \|\mathbf{w} - \mathbf{v}\|_{\sup} \leqslant r\}$ jest zbiorem zwartym w topologii $\mathcal{T}(d_{\|\cdot\|_{\sup}})$.*

[2] Stefan Banach (Kraków 1892 – 1918 Lwów) founded modern functional analysis and made major contributions to the theory of topological vector spaces. In addition, he contributed to measure theory, integration, and orthogonal series. [Mac Tutor]

Dowód. Wystarczy rozważyć kule o środku w $\mathbf{v} = 0$. Odwzorowanie liniowe $f : (\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_e) \to (\mathbf{V}, \mathcal{T}(d_{\|\cdot\|})$ takie, że $f(\lambda_1, .., \lambda_n) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \mathbf{v}_j$ jest ciągłe na mocy poprzedniego lematu, a więc kula $D(\mathbf{v}, r) = f([-r, r] \times ... \times [-r, r])$ jest zwarta jako obraz zbioru zwartego. □

Lemat 7.2.3. *Istnieje $C > 0$ takie, że dla każdego wektora $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ zachodzi nierówność $\|\mathbf{v}\|_{\sup} \leqslant C\|\mathbf{v}\|_{\sup}$*

Dowód. Niech $c := \inf\{\|\mathbf{v}\| \mid \|\mathbf{v}\|_{\sup} = 1\}$. Ciągłość normy $\|\cdot\|$ w normie $\|\cdot\|_\infty$ oraz zwartość kuli w normie $\|\mathbf{v}\|_{\sup}$ implikują, że $C > 0$. $\forall_{\mathbf{v}\neq 0} \quad \|\mathbf{v}\| = \frac{\|\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|_{\sup}}\|\mathbf{v}\|_{\sup} \geqslant c\|\mathbf{v}\|_{\sup}$, a więc $\|\mathbf{v}\|_{\sup} \leqslant C\|\mathbf{v}\|$, gdzie $C := \frac{1}{c}$. □

Dowód twierdzenia o normach. Twierdzenie wynika z lematów 1,3 bowiem jeśli dwie normy $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ są równoważne, to ciąg jest Cauchy ze względu na normę $\|\cdot\|_1 \iff$ jest Cauchy ze względu na $\|\cdot\|_2$, a ciąg $\mathbf{w}_i \xrightarrow{\|\cdot\|_1} \mathbf{w}$ jest zbieżny ze względu na normę $\|\cdot\|_1$ do wektora $\mathbf{w}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{w}_i \xrightarrow{\|\cdot\|_2} \mathbf{w}$

Zauważmy, że zbieżność w sensie normy $\|\cdot\|_\infty$ oznacza zbieżność współrzędnych wektorów ciągu w wybranej bazie, a na mocy twierdzenia w dowolnej bazie. □

Przestrzenie odwzorowań

Definicja 7.2.2. Niech $(X, \mathcal{T})$ będzie przestrzenią topologiczną. Przez $C(X)$ oznaczamy zbiór h funkcji ciagłych $f\colon (X, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$, a przez $C_b(X)$ podzbiór składający się z funkcji ograniczonych. Dla dowolnej funkcji $f \in C_b(X)$ definiujemy

$$\|f\|_{\sup} := \sup\{|f(x)| \mid x \in X\}.$$

Uwaga 7.2.1. Jeśli $(X, \mathcal{T})$ jest zwarta, to $C_b(X) = C(X)$. Jeśli $X := \{1, .., n\}$ to $C_b(X) = \mathbb{R} \times .. \times \mathbb{R}$, a norma $\|\cdot\|_{\sup}$ jest identyczna z normą sup wyznaczoną przez bazę kanoniczną $\mathbb{R}^n$.

Stwierdzenie 7.2.1. *Dla dowolnej przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T})$ przestrzeń funkcji $C_b(X)$ wyposażona w odwzorowanie $\|\cdot\|_{\sup}\colon C_b(X) \to \mathbb{R}$ jest przestrzenią Banacha.*

Dowód. Przestrzeń funkcji $C(X)$ jest oczywiście przestrzenią wektorową jeśli położymy: $(f_1 + f_2)(x) := f_1(x) + f_2(x)$, $(\lambda f)(x) := \lambda f(x)$. To, że odwzorowanie $\|\cdot\|_{\sup}\colon C_b(X) \to \mathbb{R}$ jest normą wynika natychmiast z własności wartości bezwzględnej. Pozostaje wykazać, że $C_b(X)$ z metryką wyznaczoną przez normę $\|\cdot\|_{\sup}$ jest zupełna. Niech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem Cauchy w $C_b(X)$. Wynika stąd, że dla każdego $x \in X$ ciąg wartości $f_n(x)$ jest ciągiem Cauchy liczb rzeczywistych, a więc ma granicę, którą oznaczymy $f(x)$. Otrzymujemy w ten sposób funkcję $f : X \to \mathbb{R}$, która oczywiście jest ograniczona; pozostaje sprawdzić jej ciągłość. Wynika to z następnego, nieco ogólniejszego lematu. □

Lemat 7.2.4. *Niech $\{f_n : X \to \mathbb{R}\}$ będzie ciągiem funkcji ciągłych na przestrzeni $(X, \mathcal{T})$, a $f\colon X \to \mathbb{R}$ taką funkcją, że ciąg $\sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)|$ jest zbieżny do zera – (tzn. ciąg $\{f_n\}$ jest jednostajnie zbieżny do funkcji $f : X \to \mathbb{R}$). Wtedy f jest funkcją ciągłą.*

Dowód. Niech $x_0 \in X$ i $\epsilon > 0$. Trzeba wskazać otoczenie $U \ni x_0$ takie, że $\forall_{x \in U} |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. Dla dowolnego $x \in U$ zachodzi nierówność:

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|.$$

Dobierając dostatczenie duże n zapewnimy, że pierwszy i trzeci składnik bedą dowolnie małe, w szczególności $\frac{1}{3}\epsilon$, dla wszystkich $x \in X$. Z kolei dzięki ciągłości funkcji f_n możemy znaleźć otoczenie $U \ni x_0$ takie, że $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{1}{3}\epsilon$ dla $x \in U$, co kończy dowód ciągłości f. □

Uwaga 7.2.2. Przestrzenie $C_b(X)$ są na ogół nieskończenie wymiarowe i istnieje w nich wiele norm definiujących nierównoważne i niezupełne metryki. Np. wzór $\|f\|_\int := \int_0^1 |f(t)|dt$ zadanie normę w przestrzeni $C([0,1])$, jednak przestrzeń metryczna $(C([0,1]), d_\int)$ nie jest zupełna a metryki $d_{\sup}, d_\int$ nie są równoważne.

Przestrzenie metryczne w arytmetyce - norma p-adyczna

Stwierdzenie 7.2.2. *Niech p będzie liczbą liczba pierwszą. Odwzorowanie $|\cdot|_p : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $|m|_p := p^{-\alpha}$ gdzie $m = p^\alpha k$, $(p,k) = 1$, $|0|_p = 0$, które nazywa się normą p-adyczną ma nastepujące własności:*

1. $|n|_p = 0 \iff n = 0$
2. $|n \cdot m|_p = |n|_p \cdot |m|_p$
3. $|n + m|_p \leqslant |n|_p + |m|_p$ *– nierówność trójkąta*
4. $|x + y|_p \leqslant \max(|x|_p, |y|_p)$ *– silna nierówność trójkąta*

i wyznacza w $\mathbb{Z}$ metrykę p-adyczną: $d_p(n,m) := |n - m|_p$.

Uwaga 7.2.3. Zauważmy, że metryka d_p jest przesuwalna tzn. dla ustalonej liczby n_0 odwzorowanie $\tau_{n_0}(m) := n_0 + m$ jest izometrią. Dowolne dwie kule są albo rozłączne, albo jedna jest zawarta w drugiej. Przestrzenie metryczne $(\mathbb{Z}, d_p)$ nie są zupełne.

7.3 Twierdzenie Banacha o punktach stałych

Definicja 7.3.1. Niech $f : X \to X$ będzie dowolnym odwzorowaniem zbioru X w siebie. Punktem stałym odwzorowania nazywamy taki $x \in X$, że $f(x) = x$.

Twierdzenia o istnieniu punktów stałych odgrywają ogromną rolę w wielu działach matematyki. Poniższe twierdzenie mówi nie tylko o istnieniu punktów stałych dla ważnej klasy odwzorowań, ale dostarcza także algorytmu jego poszukiwania:

Twierdzenie 7.3.1 (S. Banach)**.** *Jeśli (X,d) jest zupełną przestrzenią metryczną a $f : X \to X$ odwzorowaniem zbliżającym tzn. takim dla którego istnieje liczba $0 \leqslant c < 1$ taka, że dla dowolnych punktów $x, y \in X$ zachodzi nierówność $d(f(x), f(y)) < cd(x,y)$. Wtedy f posiada dokładnie jeden punkt stały.*

Dowód. Zauważmy, że przekształcenie zbliżające musi być ciągłe, przeprowadza więc ciągi zbieżne na ciągi zbieżne. Wybierzmy dowolny punkt $x \in X$ i rozpatrzmy ciąg $\{x_n\}$ określony rekrencyjnie $x_1 := x$, $x_{n+1} := f(x_n)$. □

7.4 Zupełność a konstrukcje przestrzeni metrycznych

Omawiając konstrukcje przestrzeni topologicznych (Rozdział 4) zauważalismy które z nich zachowują metryzowalność, pokazując w jaki sposób mogą być przeprowadzane na przestrzeniach metrycznych. W przypadku podprzestrzeni było to po prostu obcięcie metryki, przestrzenie ilorazowe przestrzeni metryzowalnych nie są często metryzowalna, a nawet jeśli są nie dziedziczą naturalnej metryki. W przypadku nieskończonego produktu kartezjańskiego i sumy rozłącznej wyjściowe metryki musiały być zamienione na metryki ograniczone z gory przez 1. Zauważmy jednak, że jeśli (X, d) jest przestrzenią metryczną, to metryka "obcięta" $d'(x, y) := \min(d(x, y), 1)$ nie tylko wyznacza tę samą topologię, co d, ale także wyznacza tę samą klasę ciągów Cauchy, a więc jeśli d jest zupełna to i d' jest zupełna.

Stwierdzenie 7.4.1 (Podprzestrzenie zupełne)**.** *Jeśli podprzestrzeń przestrzeni metrycznej jest zupełna, to jest domknięta. Dowolna domknięta podprzestrzeń przestrzeni zupełnej jest zupełna.*

Dowód. Jeśli $A \subset X$ jest podzbiorem przestrzeni metrycznej (X, d) takim, że przestrzeń metryczna $(A, d|A)$ jest zupełna. Niech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem elementów A zbieżnym do elementu $x_0 \in A$. Skoro $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny w (X, d) , to jest ciągiem Cauchy, a więc posiada granicę w A. Ponieważ każdy ciąg posiada co najwyżej jedną granicę, $x_0 \in A$, a więc A jest zbiorem domkniętym.

Jeśli podprzestrzeń $(A, d|A) \subset (X, d)$ przestrzeni zupełnej jest domknięta to dowolny ciąg Cauchy $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ posiada granicę w X, która na mocy domkniętości A należy do A. □

Stwierdzenie 7.4.2 (Zupełność produktu)**.** *Przeliczalny (w tym skończony) produkt produkt przestrzeni metrycznych jest przestrzenią zupełną wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie czynniki są przestrzeniami zupełnymi.*

Dowód. Niech $\{(X_i, d_i)\}_{i=1}^{\infty}$ będzie przeliczalną rodziną przestrzeni metrycznych. Przypomnijmy, że w zbiorze $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ definiujemy metrykę:

$$d'(x, y) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} d'(x_i, y_i)$$

gdzie $d_i'(x_i, y_i) := \min(d_i(x_i, y_i), 1)$.[3]

Jeśli produkt $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ jest przestrzenią zupełną, to dowolna podprzestrzeń (X, d_i') (z zatem też (X, d_i) jest zupełna bowiem jest izometryczna z podzbiorem domkniętym $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ (p.Lemat 4.4.1).

[3] W przypadku skończonego produktu $(X_1, d_1) \times \cdots \times (X_k, d_k)$, można metrykę zdefiniować prościej: $d(x, y) := \sum_{i=1}^{k} d(x_i, y_i)$.

Odwrotnie, załóżmy że wszystkie przestrzenie $\{(X_i, d_i)\}_{i=1}^{\infty}$ są zupełne. Niech $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem Cauchy. Z definicji metryki produktowej wynika, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$ ciąg $\{x_k^n\}_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem Cauchy w (X_k, d_k), a więc jest zbieżny do pewnego punktu x_k^0. Pokażemy, że ciąg $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do x^0. Niech $\epsilon > 0$, dla dostatecznie dużych N i $n > N$ zachodzą nierówności:

$$d'(x^n, x^0) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} d'(x_i^n, x_j^0) \leqslant \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2^i} d'(x_i^n, x_j^0) + \frac{1}{2}\epsilon \leqslant \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon = \epsilon$$

□

Stwierdzenie 7.4.3 (Zupełność sumy)**.** *Suma rozłączna przestrzeni zupełnych jest przestrzenią zupełną wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie składniki są przestrzeniami zupełnymi.*

7.5 Twierdzenie Baire'a i topologiczna zupełność

Zupełność przestrzeni metrycznej (X, d) pociąga pewną ważną własność topologii $\mathcal{T}(d)$, która może być przyjęta za definicję zupełności w sensie topologicznym.

Twierdzenie 7.5.1 (R. Baire[4])**.** *Jeśli (X, d) jest zupełną przestrzenią metryczną, to przecięcie dowolnej rodziny $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ zbiorów otwartych i gęstych w topologii $\mathcal{T}(d)$ jest zbiorem gęstym.*

Dowód. Niech $V \in \mathcal{T}(d)$ będzie niepusty. Trzeba pokazać, że $V \cap \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i \neq \emptyset$. Z gęstości U_i mamy $\forall_i\, V \cap U_i \neq \emptyset$, a więc można wybrać punkt $x_1 \in V \cap U_1 \neq \emptyset$ oraz promień $r_1 > 0$ taki, że $\bar{B}(x_1, r_1)) \subset V \cap U_i$, a następnie skonstruuować indukcyjnie zstępujący ciąg domknięć kul: $\bar{B}(x_i, r_i) \subset B(x_{i-1}, r_{i-1}) \cap U_{i-1}$, takich, że $r_i \to 0$. Z zupełności (X, d) mamy

$$V \cap \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i \supset \bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{B}(x_i, r_i) \neq \emptyset.$$

□

Wniosek 7.5.1. *Jeśli (X, d) jest zupełną przestrzenią metryczną, to suma dowolnej rodziny $\mathcal{F} = \{F_i\}_{i=1}^{\infty}$ zbiorów domkniętych i brzegowych w topologii $\mathcal{T}(d)$ jest zbiorem brzegowym.*

Dowód. Dowód wynika natychmiast z praw de Morgana, bowiem dopełnienia zbiorów domkniętych i brzegowych są zbiorami otwartymi, gęstym. Mamy więc $X \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} (X \setminus F_i)$ jest zbiorem gęstym a więc $\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ jest zbiorem brzegowym. □

Twierdzenie Baire'a i wnioski z niego, sotosowane do przestrzeni odwzorowań ma wiele zastosowań w Analizie Matematycznej i Topologii Różniczkowej.

[4] René-Louis Baire (Paryż 1874 - 1918 Chambéry, Francja) worked on the theory of functions and the concept of a limit. [Mac Tutor]

Rozdział 8

Przestrzenie odwzorowań ciągłych

8.1 Topologia zbieżności punktowej

Przez Map (X, Y) będziemy oznaczać zbiór przekształceń ciągłych $(X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$, który można utożsamiać z podzbiorem produktu kartezjańskiego $Y^X = \prod_{x \in X} Y_s$ gdzie $\forall_{x \in X} Y_x = Y$. Zbiór Map (X, Y) można więc rozpatrywać z topologią podprzestrzeni produktu kartezjańskiego. Topologia ta nazywa się topologią zbieżności punktowej, bo jak wiadomo zbieżność ciągu elementów iloczynu kartezjańskiego jest równoważna zbieżności wszystkich ciągów współrzędnych. Topologię tę oznaczamy $\mathcal{T}_p$ i nazywamy *topologią zbieżności punktowej*. Topologia ta jest całkowicie wyznaczona przez topologię w Y, a topologia w X określa jedynie jakie funkcje należą do Map (X, Y).

8.2 Topologia zwarto-otwarta

Definicja 8.2.1 (Topologia zwarto – otwarta)**.** $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y)$ – przestrzenie Hausdorffa. *Topologią zwarto – otwartą*, oznaczaną $\mathcal{T}_{co}$ nazywamy topologię w zbiorze Map (X, Y) generowaną przez rodzinę zbiorów

$$\{\langle A, W\rangle \mid A \subset X \text{ zwarty}, \ W \subset Y \text{otwarty}\},$$

gdzie $\langle A, W\rangle := \{f \in \mathrm{Map}\,(X, Y) \mid f(A) \subset W\}$.

Z definicji topologii generowanej przez rodzinę podzbiorów wynika, że bazą topologii zwarto – otwartej są skończone przecięcia zbiorów postaci $\langle A, W\rangle$: $\langle A_1, W_1\rangle \cap \cdots \cap \langle A_n, W_n\rangle$ gdzie $A_i \subset X$ są podzbiorami zwartymi, a $W_i \subset Y$ podzbiorami otwartymi.

Stwierdzenie 8.2.1. *Dla dowolnych przestrzeni Hausdorffa zachodzi inkluzja topologii $\mathcal{T}_p \subset \mathcal{T}_{co}$, a jeśli $(X, \mathcal{T})$ jest przestrzenią dyskretną, to $\mathcal{T}_p = \mathcal{T}_{co}$.*

Dowód. Podzbiory skończone przestrzeni Hausdorffa są zbiorami zwartymi. □

Wniosek 8.2.1. (Map $(X, Y), \mathcal{T}_{co}$) *jest przestrzenią Hausdorffa.*

Zanim przejdziemy do dokładniejszej analizy topologii zwarto-otwartej odnotujmy teoriomnogościowe własności konstrukcji zbiorów postaci $\langle A, W\rangle$.

Lemat 8.2.1. *Niech X, Y będą dowolnymi zbiorami, a dla ich podzbiorów $A \subset X$, $W \subset W$ $\langle A, W\rangle := \{f \in \mathrm{Map}\,(X,Y) \mid f(A) \subset W\}$. Dla rodzin podzbiorów zachodzą następujące równości i inkluzje zbiorów:*

$$1)\ \bigcap_{i\in J}(A_i, W) = (\bigcup_{i\in J} A_i, W) \quad 2)\ \bigcap_{i\in J}(A, W_i) = (A, \bigcap_{i\in J} W_i)$$

$$3)\ \bigcap_{i\in J}(A_i, W_i) \subset (\bigcup_{i\in J} A_i, \bigcup_{i\in J} W_i)$$

Dowód. Dowody 1), 2), 3) wynikają natychmiast z definicji. □

Okazuje się, że rodzinę zbiorów potrzebną do generowania topologii zwarto–otwartej można istotnie ograniczyć, korzystając z rodziny generującej topologię w $(Y, \mathcal{T}_Y)$, np. z jej bazy.

Lemat 8.2.2. *Jeśli $\mathcal{T}_Y = \mathcal{T}(\mathcal{F})$ to rodzina $\{(A, W) \mid A \subset X$ zwarty, $W \in \mathcal{F}\}$ generuje topologię zwarto-otwartą na* $\mathrm{Map}\,(X, Y)$.

Dowód. Oczywiście rodzina $\mathcal{F}_{\mathrm{Map}} := \{(A, W) \mid A \subset X\,\text{zwarty}, W \in \mathcal{F}\}$ jest zawarta w rodzinie generujacej topologię zwarto – otwartą (Def. 8.2.1). Trzeba więc pokazać, że dowolny zbiór postaci $\langle A, W\rangle$ gdzie $A \subset X$ jest zwarty, a $W \subset Y$ jest otwarty jest zawarty w topologii generowanej przez rodzinę $\mathcal{F}_{\mathrm{Map}}$.

Z definicji topologii generowanej wynika, że dowolny zbiór $W \in \mathcal{T}(\mathcal{F})$ jest sumą skończonych przecięć zbiorów z rodziny $\mathcal{F}$. Zauważmy najpierw, że jeśli $W = W_1 \cap \cdots \cap W_n$ gdzie $W_i \in \mathcal{F}$, to

$$\langle A, W\rangle = \langle A, \bigcap_1^n W_i\rangle = \bigcap_1^n \langle A, W_i\rangle \in \mathcal{T}(\mathcal{F}_{\mathrm{Map}}).$$

Pokażemy teraz, że jeśli $W = \bigcup_{s\in S} W_s$ oraz dla każdego zwartego podzbioru $A \subset X$ oraz każdego $s \in S$, $\langle A, W_s\rangle \in \mathcal{T}(\mathcal{F}_{\mathrm{Map}})$ to $\langle A, W\rangle \in \mathcal{T}(\mathcal{F}_{\mathrm{Map}})$. W tym celu trzeba pokazać, że dla dowolnego $f \in \langle A, W\rangle$ istnieje zbiór taki, że $f \in \langle A_1, W_1\rangle \cap \cdots \cap \langle A_n, W_n\rangle \subset \langle A, W\rangle$ gdzie $A_i \subset X$ są podzbiorami zwartymi oraz $\langle A_i, W_i\rangle \in \mathcal{T}(\mathcal{F}_{\mathrm{Map}})$.

Dla dowolnego punktu $a \in A$ istnieje $s(a) \in S$ taki, że $f(a) \subset W_{s(a)}$, a więc z ciągłości f wynika, ze istnieje otoczenie $a \in \mathrm{cl}_A(V_a) \subset A$ takie, że $f(\mathrm{cl}_A(V_a)) \subset W_{s(a)}$. Zbiory $\{(V_a\}_{a\in A}$ tworzą otwarte pokrycie zbioru zwartego A, można więc wybrać skończone podpokrycie $V_{a_1} \cup \cdots \cup V_{a_n} = A$. Przecięcie zbiorów $\bigcap_{i=1}^n \langle A_{a_i}, W_{a_i}\rangle$ spełnia nasze wymagania:

$$f \in \langle A_{a_1}, W_{a_1}\rangle \cap \cdots \cap \langle A_{a_n}, W_{a_n}\rangle \subset (\bigcup_{i=1}^n A_{a_i}, \bigcup_{i=1}^n W_{a_i}) \subset \langle A, W\rangle.$$

□

Pożyteczne bywa też ograniczenie klasy zbiorów zwartych używanych do generowania topologii zwarto – otwartej:

Lemat 8.2.3. *Niech $\mathcal{C} = \{C_s\}_{s\in S}$ będzie rodziną zwartych zbiorów w $(X, \mathcal{T}_X)$ z następującą własnością: dla każdego zbioru zwartego $A \subset X$ i otwartego $U \supset A$ istnieje skończenie wiele $C_i \in \mathcal{C}$ spełniających $A \subset \bigcup_1^n C_i \subset U$. Niech $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}_Y$ będzie pewną bazą. Wtedy rodzina*

$$\mathcal{F}(\mathcal{C}, \mathcal{B}) := \{\langle C, W\rangle \mid C \in \mathcal{F}, W \in \mathcal{B}\}$$

generuje topologię zwarto – otwartą w $\mathrm{Map}\,(X, Y)$.

Dowód. Na mocy Lematu 8.2.2 wiemy, że $\mathcal{T}(\mathcal{F}_{co}) = \mathcal{T}(\mathcal{F}(All, \mathcal{B}))$ gdzie All oznacza rodzinę wszystkich podzbiorów zwartych, baza generuje topologię. Ponieważ $\mathcal{F}(\mathcal{C}, \mathcal{B}) \subset \mathcal{T}(\mathcal{F}(All, \mathcal{B}))$ więc podobnie jak w poprzednim lemacie, wystarczy wykazać że dla każdego elementu zbioru $f \in \langle C, W\rangle$ istnieją zbiory zwarte $C_{s_1}, ..., C_{s_n} \in \mathcal{C}$ oraz otwarte $W_1, \ldots, W_n \in \mathcal{B}$ takie, że $f \in \langle A_1, W_1\rangle \cap \cdots \cap \langle A_n, W_n\rangle \subset \langle C, W\rangle$. Rozważmy zbiór otwarty $U := f^{-1}(W) \supset C$, z założenia istnieje skończona rodzina zbiorów $C_{s_1}, \ldots, C_{s_n} \in \mathcal{C}$ taka, że $C \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} C_{s_i} \subset U$. Przecięcie zbiorów $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \langle C_{s_i}, W_{a_i}\rangle$ spełnia nasze wymagania:

$$f \in \bigcap_{i=1}^{n} \langle C_{s_i}, W\rangle = \langle \bigcup_{i=1}^{n} C_{s_i}, W\rangle \subset \langle C, W\rangle.$$

□

Zbadamy przekształcenia ciągłe przestrzeni $\mathrm{Map}\,(X, Y)$ pochodzące od odwzorowań $X \to X'$ i $Y \to Y'$.

Stwierdzenie 8.2.2. $f\colon (X, \mathcal{T}_X) \to (X', \mathcal{T}_{X'})$, $g\colon (Y, \mathcal{T}_Y) \to (Y', \mathcal{T}_{Y'})$ *– odwz. ciągłe. Odwzorowania*

$$f^* : \mathrm{Map}\,(X', Y) \to \mathrm{Map}\,(X, Y),\ f^*(\phi) := \phi \circ f$$

$$g_* : \mathrm{Map}\,(X, Y) \to \mathrm{Map}\,(X, Y')\ g_*(\psi) := g \circ \psi$$

są ciągłe w topologii zwarto-otwartej oraz zachodzą równości $(f_1 \circ f_2)_* = f_2^* \circ f_1^*$, $(g_1 \circ g_2)_* = g_{1*} \circ g_{2*}$, $Id_X^* = Id$, $Id_{Y*} = Id$.

Dowód. Ciągłość wynika łatwo z teorio-mnogościowych własności zbiorów generujących topologię. Żeby sprawdzić, iż f^* jest ciągłe wystarczy zauważyć, że dla zbiorów generujących topologię w $\mathrm{Map}\,(X, Y)$ zachodzi: $(f^*)^{-1}(\langle C, W\rangle) = \langle f(C), W\rangle$, a więc jest zbiorem otwartym w $\mathrm{Map}\,(X', Y)$. Podobnie $(g_*)^{-1}(\langle C, W'\rangle) = (\langle C, g^{-1}(W')\rangle)$ jest zbiorem otwartym w $\mathrm{Map}\,(X, Y)$. □

Uwaga 8.2.1. Jeśli $Y = Y' = \mathbb{R}^n$, to odwzorowanie f^* jest liniowe. Jeśli Y, Y' skończenie wymiarowe przestrzenie liniowe i $g : Y \to Y'$ jest odwzorowaniem liniowym, to g_* też jest liniowe.

8.3 Topologia $\mathcal{T}_{co}$ a produkt kartezjański

Stwierdzenie 8.3.1. *Rzutowania na współrzędne* $p_i\colon Y_1 \times Y_2 \to Y_i$, $i = 1, 2$ *zadają homeomorfizm:*

$$(p_{1*}, p_{2*})\colon\ \mathrm{Map}\,(X, Y_1 \times Y_2) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Map}\,(X, Y_1) \times \mathrm{Map}\,(X, Y_2)$$

Dowód. Ciagłość odwzorowania (p_{1*}, p_{2*}) wynika z Stw. 8.2.2 a z definicji produktu kartezjańskiego iż jest bijekcją. Wystarczy więc pokazać iż jest otwarte. Na mocy Lematu 8.2.2 topologia w $\mathrm{Map}\,(X, Y_1 \times Y_2)$ jest generowana przez zbiory postaci $\langle C, p_i^{-1}(W_i)\rangle$ gdzie $i = 1, 2$, $W_i \in \mathcal{T}_{Y_i}$, $C \subset X$ – zwarty. Dla $i = 1$ zachodzi równość zbiorów $(p_{1*}, p_{2*})(\langle C, p_1^{-1}(W_1)\rangle) = \langle C, W_1\rangle \times \mathrm{Map}\,(X, Y_2)$ i podobnie dla $i = 2$, a więc obrazy zbiorów generujących topologię w $\mathrm{Map}\,(X, Y_1 \times Y_2)$ generują topologię w produkcie $\mathrm{Map}\,(X, Y_1) \times \mathrm{Map}\,(X, Y_2)$. □

Stwierdzenie 8.3.2. *Włożenia $\iota_k \colon X_k \to X_1 \coprod X_2$, $k = 1, 2$ definiują homeomorfizm*

$$(\iota_1^*, \iota_2^*)\colon\ \mathrm{Map}\,(X_1 \coprod X_2, Y) \to \mathrm{Map}\,(X_1, Y) \times \mathrm{Map}\,(X_2, Y).$$

Dowód. Dowód, że odwzorowanie (ι_1^*, ι_2^*) jest ciągłą bijekcją jest identyczny jak Stw. 8.3.1. Dowód, że rodzina generująca bazę w $\mathrm{Map}\,(X_1 \coprod X_2, Y)$ przechodzi na rodzinę generującą topologię w produkcie wynika natychmiast z Lematu 8.2.3 oraz faktu, że dowolny zwarty podzbiór $C \subset X_1 \coprod X_2$ jest sumą rozłącznych zwartych zbiorów $C = (C \cap X_1) \cup (C \cap X_2)$. □

Interesujace jest, że w terminach przestrzeni funkcyjnych można opisać odwzorowania dwóch zmiennych $f\colon X \times Y \to Z$ jako rodziny odwzorowań jednej zmiennej $f_x\colon Y \to Z$, $f_x(y) := F(x, y)$ parametryzowanie w sposób ciągły przestrzenią X. O przestrzeni Y musimy jednak poczynić dodatkowe założenie:

Definicja 8.3.1. Przestrzeń Hausdorffa $(Y, \mathcal{T}_Y)$ nazywa się lokalnie zwarta jeśli każdy punkt $y \in Y$ posiada otoczenie $V \ni y$ takie, że jego domknięcie $\mathrm{cl}_Y(V)$ jest zbiorem zwartym.

Uwaga 8.3.1. Przestrzenie zwarte są lokalnie zwarte. Przestrzenie euklidesowe nie są zwarte, lecz są lokalnie zwarte, bowiem domknięcia kul euklidesowych sa zbiorami domknętymi i ograniczonymi, a więc zwartymi.

Twierdzenie 8.3.1. *Jeśli Y jest jest lokalnie zwarta, to przekształcenie*

$$\mathrm{Map}\,(X \times Y, Z) \xrightarrow{e} \mathrm{Map}\,(X, \mathrm{Map}\,(Y, Z))$$

$$e(h)(x)(y) := \hat{h}(x)(y) := h(x, y)$$

jest bijekcją, a nawet homeomorfizmem przestrzeni odwzorowań z topologią zwarto-otwartą.

Dowód twierdzenia poprzedzimy lematem opisującym topologię w przestrzeni $\mathrm{Map}\,(X \times Y, Z)$.

Lemat 8.3.1. *Zbiory postaci $\langle A \times B, W\rangle$ gdzie $A \subset X$, $B \subset Y$ są podzbiorami zwartymi, a $W \subset Z$ jest podzbiorem otwartym generują topologię zwarto-otwartą w* $\mathrm{Map}\,(X \times Y, Z)$.

Dowód. Sprawdzimy, że rodzina zbiorów

$$\{A \times B \subset X \times Y \colon A \subset X,\ B \subset Y \text{ zbiory zwarte}\}$$

spełnia założenia Lematu 8.2.3. Niech $X \times Y \supset U \supset C$ będzie otoczeniem podzbioru zwartego. Dla każdego punktu $c \in C$ istnieją zbiory otwarte $U_c \subset X$, $V_c \subset Y$ takie, że $U_c \times V_c \subset U$, a ze zwartości C można wybrać skończone przykrycie otwarte $U \supset (U_{c_1} \times V_{c_1}) \cup \cdots \cup (U_{c_n} \times V_{c_n}) \supset C$. Ponieważ C jest zbiorem zwartym, w to przykrycie można wpisac pokrycie C zbiorami domknietymi $C_i \subset U_{c_i} \times V_{c_i}$. Zachodzą inkluzje

$$\bigcup_{i=1}^{n} p_1(C_i) \times p_2(C_i) \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{c_i} \times V_{c_i} \subset U$$

a zatem znaleźliśmy przykrycie zbioru C produktami zbiorów zwartych, zawartymi w danym otoczeniu $U \supset C$. $\square$

Dowód Twierdzenia 8.3.1. Dowód składa się z trzech kroków.

Najpierw musimy wykazać, że przekształcenie e jest dobrze zdefiniowane tzn. dla odwzorowania ciągłego $f : X \times Y \to Z$ przyporządkowane mu odwzorowanie $\hat{h}(x)(y) := h(x, y)$ jest odwzorowaniem ciągłym $X \to \operatorname{Map}(Y, Z)$. Zauważmy najpierw, że $\forall_{x \in X} \hat{h}(x) \in \operatorname{Map}(Y, Z)$, jest to bowiem obcięcie h do poziomicy $\{x\} \times Y$. Teraz sprawdzimy ciagłość $\hat{h}\colon X \to \operatorname{Map}(Y, Z)$. Załóżmy, że $\hat{h}(x) \in \langle C, W\rangle$ co oznacza, że $h(\{x\} \times C) \subset W$. Z ciągłości h wynika, że istnieje biór otwarty $G \supset \{x\} \times C$ taki, ze $h(G) \subset W$, a ze zwartości C wynika (p.Lemat o tubie), ze istnieje otoczenie $U \ni x$ takie, że $U \times C \subset G$, a więc $\hat{h}(U) \subset \langle C, W\rangle$. Zauważmy, że dla poprawnego zedfiniowania przekształcenia e założenie lokalnej zwartości Y nie jest potrzebne.

Przyporządkowanie $h \rightsquigarrow \hat{h}$ jest oczywiście róznowartościowe. Pokażemy, że jest bijekcją tzn. jeśli odwzorowanie $\hat{h}\colon X \to \operatorname{Map}(Y, Z)$ jest ciągłe, to odpowiadające mu odwzorowanie $h(x, y) := \hat{h}(x)(y)$ jest ciągłe. Niech $h(x_0, y_0) \in W$ tzn. $\hat{h}(x_0) \in \langle\{y_0\}, W\rangle$, a z ciągłości $\hat{h}(x_0)$ i lokalnej zwartości Y wynika istnienie otoczenia $V \ni y_0$ takiego, że $\bar{V}$ jest zbiorem zwartym i $\hat{h}(x_0) \in \langle\bar{V}, W\rangle$. Z ciągłości $\hat{h}$ wynika, ze istnieje otoczenie $U \ni x_0$ dla którego $\hat{h}(U) \in \langle\bar{V}, W\rangle$, a więc $h(U \times V) \subset W$ co kończy dowód, że przyporządkowanie $h \rightsquigarrow \hat{h}$ jest bijekcją.

Pozostaje sprawdzić, że jest homoeomorfizmem. W tym celu wystarczy zauważyc, że obraz rodziny zbiorów generujących topologię w $\operatorname{Map}(X \times Y, Z)$, opisany w Lemacie 8.3.1 generuje topologię w $\operatorname{Map}(X, \operatorname{Map}(Y, Z))$. $\square$

8.4 Topologia $\mathcal{T}_{co}$ a zbieżność jednostajna

Niech (Y, d) będzie przestrzenią metryczną. Rozważając zbiór przekształceń ciągłych $(X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}(d))$ zauważamy, że metrykę d_{sup} można zdefiniować sensownie jedynie w podzbiorze składającym się z przekształceń ograniczonych, podczas gdy topologia zwarto – otwarta określona jest w całym zbiorze $\operatorname{Map}(X, Y)$. Zajmiemy się obecnie porównaniem topologii $\mathcal{T}(d_{\text{sup}})$ w zbiorze ograniczonych przekształceń ciągłych $\operatorname{Map}_b(X, Y)$ oraz topologii podprzestrzeni pochodzącej z topologii zwarto – otwartej w $\operatorname{Map}(X, Y)$.

Stwierdzenie 8.4.1. *Dla dowolnej przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T}_X)$ i przestrzeni metrycznej (Y, d) w zbiorze $\operatorname{Map}_b(X, Y)$ zachodzi inkluzja topologii $\mathcal{T}_{co} \subset \mathcal{T}(d_{\text{sup}})$. Jeśli X jest zwarta, to $\mathcal{T}_{co} = \mathcal{T}(d_{\text{sup}})$.*

Dowód. Wystarczy pokazać, że dowolny zbiór generujący topologię $\mathcal{T}_{co}$ należy do topologii $\mathcal{T}(d_{\text{sup}})$. Na mocy Lematu 8.2.2 wystarczy sprawdzić to dla zbiorów postaci $\langle C, B_d(y_0, r)\rangle$

gdzie $C \subset X$ jest podzbiorem zwartym, a $B(y_0, r)$ kulą w przestrzeni (Y, d). Niech $f \in \langle C, B(y_0, r)\rangle$ Odwzorowanie $d(y_0, f(-))\colon X \to \mathbb{R}$ jest ciągłe, zatem ze zwartości C wynika, że przyjmuje swoje kresy; kres górny oznaczmy $0 < r_0 < r$, a przez $r_1 := \frac{1}{2}(r - r_0) > 0$. Twierdzimy, że kula $B_{d_{\sup}}(f, r_1) \subset \langle C, B_d(y_0, r)\rangle$.

Niech $g \in B_{d_{\sup}}(f, r_1)$. Dla dowolnego $x \in C$ zachodzą nierówności:

$$d(y_0, g(x)) \leqslant d(y_0, f(x)) + d(f(x), g(x)) \leqslant r_0 + r_1 = r_0 + \frac{1}{2}(r - r_0) < r$$

a więc dla dowolnego elementu $f \in \langle C, B_d(y_0, r)\rangle$ istnieje kula w metryce $d_{\sup}$ o środku w tym punkcie, zawarta w $\langle C, B_d(y_0, r)\rangle$.

Wykażemy teraz równość topologii $\mathcal{T}_{co} = \mathcal{T}(d_{\sup})$, gdy X jest przestrzenią zwartą. W tym celu trzeba pokazać, że dla dowolnej kuli $B_{d_{\sup}}(f, r)$ istnieje zbiór postaci $\langle C_1, W_1\rangle \cap \cdots \cap \langle C_n, W_n\rangle$ taki, że

$$f \in \langle C_1, W_1\rangle \cap \cdots \cap \langle C_n, W_n\rangle \subset B_{d_{\sup}}(f, r)$$

Dla każdego $x \in X$ wybierzmy otoczenie $U_x \ni x$ takie, że
$f(\bar{U}_x) \subset B_d(f(x), \frac{r}{3}) =: B_x$. Na mocy zwartości X z pokrycia $\{U_x\}_{x \in X}$ można wybrać pokrycie skończone $U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_n} = X$. Pokażemy, że dowolny element $g \in \langle \bar{U}_{x_1}, B_{x_1}\rangle \cap \cdots \cap \langle \bar{U}_{x_n}, B_{x_n}\rangle$ należy do kuli $B_{d_{\sup}}(f, r)$. Dla dowolnego $x \in X$ wybierzmy $U_i \ni x$. Zachodzą nierówności:

$$d(f(x), g(x)) \leqslant d(f(x), f(x_i)) + d(f(x_i), g(x)) \leqslant \frac{r}{3} + \frac{r}{3} < r$$

oraz z definicji $f \in \langle \bar{U}_{x_1}, B_{x_1}\rangle \cap \cdots \cap \langle \bar{U}_{x_n}, B_{x_n}\rangle \subset B_{d_{\sup}}(f, r)$. □

Topolgia zwarto – otwarta jest nazywana także topologią zbieżności niemal jednostajnej. Żeby wyjaśnić skojarzenie z nazwą znaną z Analizy Matematycznej udowodnimy najpierw ogólny fakt dotyczący obcinania przekształceń do podzbiorów zwartych. Niech $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y)$ będą dowolnymi przestrzeniami Hausdorffa. Dla dowolnego zwartego podzbioru $C \subset X$ inkluzja definiuje ciagłe odwzorowanie $\iota_C^*\colon \operatorname{Map}(X, Y) \to \operatorname{Map}(C, Y)$.

Stwierdzenie 8.4.2. *Niech $\mathcal{C}$ oznacza rodzinę wszystkich zwartych podzbiorów przestrzeni X. Przekątna rodziny odwzorowań $\{\iota_C^*\}_{C \in \mathcal{C}}$*

$$\iota_{\mathcal{C}}^*\colon \operatorname{Map}(X, Y) \to \prod_{C \in \mathcal{C}} \operatorname{Map}(C, Y) \quad \iota_{\mathcal{C}}^*(f) := \{f|_C\}_{C \in \mathcal{C}}$$

jest zanurzeniem homeomorficznym.

Dowód. Odwzorowanie $\iota_{\mathcal{C}}^*$ jest oczywiście różnowartościowe, bo zbiory jednopunktowe są zwarte. Topologia w produkcie $\prod_{C \in \mathcal{C}} \operatorname{Map}(C, Y)$ jest generowana przez zbiory $p_C^{-1}(\langle K, W\rangle)$ gdzie $K \subset C$, $W \in \mathcal{T}_Y$, a więc topologia podprzestrzeni jest generowana przez przecięcia tych zbiorów z obrazem $\iota_{\mathcal{C}}(\operatorname{Map}(X, Y))$. Z definicji zachodzi równość zbiorów

$$\iota_{\mathcal{C}}(\operatorname{Map}(X, Y)) \cap p_C^{-1}(\langle K, W\rangle) = \iota_{\mathcal{C}}(\langle K, W\rangle)$$

a więc topologia podprzestrzeni jest generowana przez obrazy zbiorów generujących topologię w $\operatorname{Map}(X, Y)$. □

Wniosek 8.4.1. *Ciąg odwzorowań $f_n \in \mathrm{Map}\,(X,Y)$ jest zbieżny w topologii zwarto-otwartej do odwzorowania $f \in \mathrm{Map}\,(X,Y)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego zbioru zwartego $C \subset X$, ciąg $f_n|_C \in \mathrm{Map}\,(C,Y)$ jest zbieżny do $f|_C \in \mathrm{Map}\,(C,Y)$.*

Z ostatniego wniosku wynika, że jeśli (Y,d) jest przestrzenią metryczną to zbieżność w sensie topologii zwarto-otwartej w $\mathrm{Map}\,(X,Y)$ jest dokładnie znaną z Analizy Matematycznej zbieżnością niemal jednostajną (czyli na zbiorach zwartych).

Na zakończenie podsumujmy związki między trzema topologiami w przestrzeniach odwzorowań: zbieżności punktowej, zwarto-otwartą i zbieżności jednostajnej.

Twierdzenie 8.4.1. *Dla dowolnych przestrzeni Hausdorffa $(X,\mathcal{T}_X)$, $(Y,\mathcal{T}_Y)$ w zbiorze $\mathrm{Map}\,(X,Y)$ zachodzi inkluzja topologii $\mathcal{T}_p \subset \mathcal{T}_{co}$.*

1) Jeśli $(X,\mathcal{T})$ jest przestrzenia dyskretną, to $\mathcal{T}_p = \mathcal{T}_{co}$.

2) Jeśli (Y,d) jest przestrzenią metryczną i $\mathrm{Map}_b(X,Y)$ zbiorem ograniczonych, ciągłych odwzorowań, to zachodzi inkluzja topologii $\mathcal{T}_{co}|\,\mathrm{Map}_b(X,Y) \subset \mathcal{T}(d_{\sup})$.

3) Jeśli przestrzeń $(X,\mathcal{T}_X)$ jest zwarta, to $\mathcal{T}_{co} = \mathcal{T}(d_{\sup})$.

□

8.5 Twierdzenie Stone'a – Weierstrassa

Dla dowolnej przestrzeni topologicznej $(Y,\mathcal{T}_Y)$ oznaczmy $\mathcal{C}(Y) := \mathrm{Map}\,(Y,\mathbb{R})$ z topologią zwarto – otwartą.

Stwierdzenie 8.5.1. *Dodawanie i mnożenie funkcji definiuje w $\mathcal{C}(Y)$ strukturę pierścienia, przy czym oba działania są ciagłe. Zerem jest funkcja stała równa zero; a jednością funkcja stała równa jeden. Mnożenie przez funkcje stałe i dodawanie określają w $\mathcal{C}(Y)$ strukturę rzeczywistej przestrzeni wektorowej.* □

Definicja 8.5.1. Podzbiór $A \subset \mathcal{C}(Y)$ nazywamy $\mathbb{R}$-podalgebrą jeśli podprzestrzenią liniową oraz jest zamknięty ze względu na iloczyn funkcji.

Stwierdzenie 8.5.2. *Dla dowolnego podzbioru $D \subset \mathcal{C}(Y)$ istnieje minimalna ze względu na inkluzję $\mathbb{R}$-podalgebra $A(D) \supset D$, którą nazywamy $\mathbb{R}$-podalgebrą generowaną przez D.*

Dowód. Przecięcie dowolnej rodziny $\mathbb{R}$-podalgebr jest oczywiście $\mathbb{R}$-podalgebrą. Podalgebrę $A(D)$ definiujemy więc jako przekrój rodziny $\mathbb{R}$-podalgebr zawierających zbiór D. □

Twierdzenie 8.5.1 (M. Stone[1]-K. Weierstrass[2]). *Niech $(Y,\mathcal{T}_Y)$ będzie dowolną przestrzenią Hausdorffa. Jeśli $D \subset \mathcal{C}(Y)$ jest podzbiorem zawierającym niezerową funkcję stałą takim, że funkcje z D rozdzielają punkty w Y tzn. dla dowolnych $y_1 \neq y_2$ istnieje funkcja $f \in D$ taka, że $f(y_1) \neq f(y_2)$, to zbiór $A(D)$ jest gęsty w $\mathcal{C}(Y)$.*

[1] Marshall Harvey Stone (New York 1903 - 1989 Madras, India) is best known for the Stone-Weierstrass theorem on uniform approximation of continuous functions by polynomials. [Mac Tutor]

[2] Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (Ostenfelde, Westphalia 1815 - 1897 Berlin) is best known for his construction of the theory of complex functions by means of power series. [Mac Tutor]

Zanim przejdziemy do dowodu twierdzenia, przypomnimy jego klasyczne zastosowania.

Przykład 8.5.1 (Klasyczne Twierdzenie Weierstrassa.). Niech $(Y, \mathcal{T}_Y) = ([0,1], \mathcal{T}_e)$ i rozpatrzmy $D := \{1, j\colon j(t) = t\}$. $\mathbb{R}$–podalgebra generowana przez D to po prostu algebra funkcji wielomianowych zmiennej t. Ponieważ topologia zwarto – otwarta w $\mathcal{C}([0,1])$ to topologia wyznaczona przez metrykę $d_{\sup}$, a więc tw. Stone'a – Weierstrassa w tym przypadku powiada, że każda funkcja ciagła jest granicą jednostajną ciagu wielomianów. Zauważmy, że funkcję identycznościową możemy zastapić dowolną funkcją róznowartosciową! Jeśli zamiast odcinka rozpatrzyć całą prosta otrzymujemy wniosek, że każda funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest granicą niemal jednostajnie zbieżnego ciagu wielomianów. (przestrzeń $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ jest metryzowalna!).

Przykład 8.5.2 (Wielomiany trygonometryczne). Zauważmy, że funkcje ciągłe $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o okresie 2π można utożsamiać z funkcjami określonymi na okręgu S^1. Punkty okręgu będziemy parametryzować kątem ϕ między dodatnim kierunkiem osi $y = 0$ oraz półprostą wyznaczoną przez dany wektor. Rozpatrzmy $D := \{\sin n\phi, \cos n\phi\colon n = 0, 1, 2, ..\} \subset \mathcal{C}(S^1)$. Ze wzorów na cosinus i sinus sumy kątów łatwo wynika, że przestrzeń liniowa rozpięta na zbiorze D jest zamknieta ze względu na mnożenie, czyli jest $\mathbb{R}$–podalgebrą. A z twierdzenia Stone'a-Weierstrassa wynika, że dowolna funkcja okresowa jest granicą jednostajną ciagu funkcji postaci:

$$f_n(\phi) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} (a_n \sin n\phi + b_n \cos n\phi)$$

Dowód twierdzenia poprzedzimy ważnym lematem:

Lemat 8.5.1. *Niech $A \subset \mathcal{C}(Y)$ będzie podalgebrą. Jeśli $f \in A$, to $|f| \in \bar{A}$. Dla dowolnych funkcji $f, g \in \bar{A}$ funkcje* $\min(f, g)$ *i* $\max(f, g)$ *też należą do $\bar{A}$.*

Dowód. Ponieważ $|f| = \sqrt{f^2}$ kluczowym kluczowym elementem dowodu będzie obserwacja, że funkcja $\phi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $\phi(t) := \sqrt{t}$ jest granicą jednostajną ciagu wielomianów $p_n(t)$, co można pokazać bezpośrednio bądź powołać się na klasyczne tw. Weierstrassa zastosowane do funkcji $\phi(t) := \sqrt{t}$.

Niech $f \in A$ oraz $|f| \in \bigcap_1^n \langle C_i, W_i \rangle$. Pokażemy, że to otoczenie zawiera pewną funkcję $g \in A$. Niech $\epsilon := \min\{d_e(|f|(C_i), Y \setminus W_i)\colon i = 1, \ldots, n\} > 0$. Wystarczy znaleźć $g \in A$ taką, że $||f|(c) - g(c)| < \epsilon$ dla $c \in C := \bigcup_1^n C_i$. Ponieważ C jest zwarty, funkcja f jest ograniczona, a więc istnieje $M > 0$ takie, że $|f(c)| \leqslant M$ dla $c \in C$. Stąd wynika, że $|f|$ jest na C granicą jednostajną ciągu wielomianów od funkcji f: $p_n(f^2/B^2) \to \sqrt{f^2/M^2} = |f|/M$.

Teza dla $\min(f, g)$ i $\max(f, g)$ łatwo wynika ze wzorów:

$$\max(f, g) = \frac{1}{2}((f + g) + |f - g|), \quad \min(f, g) = \frac{1}{2}((f + g) - |f - g|).$$

□

Dowód tw. Stone'a – Weierstrassa. Bedziemy dowodzić, że zbiór $\overline{A(D)}$ jest gęsty, a zatem ponieważ jest domknięty, musi być równy $\mathcal{C}(X)$. W tym celu trzeba sprawdzić, że dowolny zbiór z bazy topologii zwarto–otwartej $\bigcap_1^n \langle A_i, W_i \rangle$ przecina się z $\overline{A(D)}$. Ustalmy zbiór bazowy i funkcję $f \in \bigcap_{1}^{n}\langle A_i, W_i\rangle$. Będziemy konstruować funkcję $g \in \overline{A(D)} \cap \bigcap_{1}^{n}\langle A_i, W_i\rangle$. Oznaczmy zbiór zwarty $Z := \bigcup_{1}^{n} A_i \subset Y$ oraz $\epsilon := \min\{d_e(f(A_i), Y \setminus W_i) \colon i = 1, \ldots, n\} > 0$. Dowód składa się z trzech kroków.

Krok 1. Dla dowolnych punktów w $y_1 \neq y_2$ w Z oraz $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ istnieje $f \in A(D)$ taka, że $f(y_1) = a_1$, $f(y_2) = a_2$.

Niech g będzie funkcją rozdzielającą y_1, y_2. Ponieważ funkcje stałe należą do $A(D)$, a więc funkcja

$$f(y) := a + \frac{b-a}{g(y_1) - g(y_2)}[g(y) - g(y_1)]$$

należy do $A(G)$ i przyjmuje żądane wartości w punktachy_1, y_2.

Krok 2. Dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{C}(X)$ oraz $z_0 \in Z$ istnieje $g \in \overline{A(D)}$ taka, że: $g(z_0) = f(z_0)$ oraz $g(z) < f(z) + \epsilon$ dla $z \in Z$.

Z Kroku 1. dla każdego $z \in Z$ istnieje funkcja $h_z \in A(D)$ taka, że $h_z(z_0) = f(z_0)$ oraz $h_z(z) < f(z) + \frac{\epsilon}{2}$. (Jeśli $z \neq z_0$ można znaleźć funkcję taką, że $h_z(z) = f(z) + \frac{\epsilon}{4}$, w przypadku $z = z_0$, $h_{z_0} = f$.) Z ciągłości h_z i f wynika, że istnieje otoczenie $W(z) \ni z$ takie, że $h_z(y) < f(y) + \epsilon$ dla $y \in V(z)$. Zbiory $\{W(z)\}_{z \in Z}$ tworzą otwarte przykrycie Z, a więc można z niego wybrać przykrycie skończone $W(z_1) \cup \cdots \cup W(z_m) \supset Z$. Niech $g := \min\{h_{z_1}, \ldots, h_{z_m}\}$ Z Lematu 8.5.1 wynika, że $g \in \overline{A(D)}$. Ponieważ dowolny punkt $z \in Z$ należy do pewnego zbioru $W(z_i)$, więc zachodza nierówności: $g(z) \leqslant h_{z_i}(z) < f(z) + \epsilon$.

Krok 3. Istnieje $g \in \overline{A(D)}$ taka, że: $\sup_{z \in Z} |f(z) - g(z)| < \epsilon$, a zatem $g \in \overline{A(D)} \cap \bigcap_{1}^{n}\langle A_i, W_i\rangle$.

Dla dowolnego $z \in Z$ niech g_z bedzie funkcją skonstruowaną w Kroku 2. Istnieje otoczenie $V(z) \ni z$ takie, że dla $y \in V(z)$ zachodzi nierówność: $g_z(y) > f(y) - \epsilon$. Zbiory $\{V(z)\}_{z \in Z}$ przykrywają Z a więc można spośród nich wybrać przykrycie skończone $V(z_1), \ldots, V(z_k)$ i zdefiniować $g := \max\{g_{z_1}, \ldots, g_{z_k}\}$. Podobnie jak w Kroku 2. $g \in \overline{A(D)}$ oraz $f(z) - \epsilon < g_{z_i}(z) \leqslant g(z) < f(z) + \epsilon$, czyli $\sup_{z \in Z} |f(z) - g(z)| < \epsilon$ co należało dowieść. □

8.6 Funkcje na przestrzeniach metryzowalnych

Dla przestrzeni metryzowalnych (i ogólniej *normalnych*) zachodzi ważne twierdzenie o rozszerzaniu funkcji ciągłych ze zbiorów domknietych, pokzaujace że na takich przestrzeniach jest "duzo" funkcji ciagłych o wartościach rzeczywistych.

Twierdzenie 8.6.1 (Tietze[3]). *Jeśli $A \subset X$ jest domkniętym podzbiorem przestrzeni metryzowalnej $(X, \mathcal{T}(d))$ to dowolne przekształcenie ciągłe $f \colon (A, \mathcal{T}(d)|A) \to ([0,1], \mathcal{T}_e)$ rozszerza się na całą przestrzeń tzn. istnieje $\bar{f} \colon (X, \mathcal{T}(d)) \to ([0,1], \mathcal{T}_e)$ takie, że $\bar{f}(a) = f(a)$ dla każdego $a \in A$.*

Dowód twierdzenia Tietze znajduje się w BCPP Podrozdział 1.6.

[3] Heinrich Franz Friedrich Tietze (Schleinz, Austria 1880 - 1964 München) [Mac Tutor]

Wniosek 8.6.1. *W tw. Tietze odcinek* $[0,1]$ *mozna zastąpić przez kostkę* $[0,1]^n$. □

Wniosek 8.6.2. *Odwzorowanie obcięcia* $i^*\colon C_b(X) \to C_b(A)$ *jest epimorfizmem.* □

Rozdział 9

Homotopia

9.1 Homotopia odwzorowań

Definicja 9.1.1. Niech $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ będą przestrzeniami topologicznymi, a $I := [0,1]$ będzie odcinkiem z topologią euklidesową. *Homotopią* nazxywamy dowolne przekształcenie ciągłe $F\colon X \times I \to Y$. Przekształcenia $f_0, f_1\colon X \to Y$ nazywamy *homotopijnymi* jeśli istnieje homotopia $F\colon X \times I \to Y$ taka, że dla każdego $x \in X$ zachodzą równości $F(x,0) = f_0(x)$, $F(x,1) = f_1(x)$ i oznaczamy $f_0 \sim f_1$ lub jeśli chcemy pamiętać jaka homotopia je łączy $f_0 \sim_F f_1$.

Stwierdzenie 9.1.1. *Homotopia $\sim$ jest relacją równoważności w zbiorze odwzorowań* $\mathrm{Map}\,(X,Y)$.

Dowód. Sprawdzimy trzy warunki, które musi spełniać relacja równoważności:

Zwrotność. Każde przekształcenie $f\colon X \to Y$ jest homotopijne ze sobą przez homotopię stałą: $F\colon X \times I \to Y$, $F(x,t) := f(x)$.

Symetria. Jeśli $F\colon X \times I \to Y$ jest homotopią między f_0 i f_1, to $F'\colon X \times I \to Y$, $F'(x,t) := F(x, 1-t)$ jest homotopią między f_1 i f_0.

Przechodniość. Jeśli $F\colon X \times I \to Y$ jest homotopią między f_0 i f_1 a $G\colon X \times I \to Y$ jest homotopią między f_1 i f_2 to $H\colon X \times I \to Y$ zdefiniowane przez F na dolnej połowie walca i przez G na górnej połowie:

$$H(x,t) := \begin{cases} F(x,2t) \,\text{dla}\, 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ G(x, 2t-1) \,\text{dla}\, \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

jest homotopią między f_0 a f_2. □

Zbiór klas homotopii oznaczamy $[X,Y] := \mathrm{Map}\,(X,Y)/\sim$. Zauważmy, że $[\{p\}, X] = \pi_0(X)$, gdzie $\{p\}$ – przestrzeń jednopunktowa, jest rozważanym poprzednio zbiorem składowych łukowych przestrzeni X.

Stwierdzenie 9.1.2. *Dowolne dwa przekształcenia $f_0, f_1\colon X \to W$ gdzie $W \subset \mathbb{R}^n$ jest podzbiorem wypukłym są homotopijne przez homotopię $F(x,t) := (1-t)f_0(x) + tf_1(x)$, zwaną homotopią afiniczną.*

Składanie przekształceń zachowuje relację homotopii:

Stwierdzenie 9.1.3. *Jeśli $f_0, f_1 \colon X \to Y$ oraz $g_0, g_1 \colon Y \to Z$ oraz $f_0 \sim f_1$ i $g_0 \sim g_1$, to ich złożenia są homotopijne: $g_0 f_0 \sim g_1 f_1$*

Dowód. Skonstruujemy homotopie $g_0 f_0 \sim g_0 f_1 \sim g_1 f_1$ i skorzystamy z przechodniości relacji homotopii. Niech $F \colon X \times I \to Y$ będzie homotopią między f_0 i f_1 a $G \colon Y \times I \to Z$ homotopią między g_0 i g_1. Wtedy złożenie $X \times I \xrightarrow{F} Y \xrightarrow{g_0} Z$ jest homotopią $g_0 f_0 \sim g_0 f_1$ a złożenie $X \times I \xrightarrow{f_1 \times id} Y \times I \xrightarrow{G} Z$ jest homotopią $g_0 f_1 \sim g_1 f_1$. □

Wniosek 9.1.1. *Jeśli $f : X \to Y$, to dla dowolnej przestrzeni Z są dobrze określone przekształcenia $f^\# \colon [Y, Z] \to [X, Z]$, $f^\#([\phi]) := [\phi \circ f]$ oraz $f_\# \colon [Z, X] \to [Z, Y]$, $f_\#([\psi]) := [f \circ \psi]$. Jeśli $f \sim g$ to $f_\# = g_\#$ i $f^\# = g^\#$. Jeśli dane są dwa przekształcenia $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$, to $(gf)_\# = g_\# f_\#$ oraz $(gf)^\# = f^\# g^\#$.*

Dowód. Wynika natychmiast z definicji i z poprzedniego Stwierdzenia. □

Następujące twierdzenie powiada, że przekształcenia bliskie o wartościach w otwartych podzbiorach przestrzeni euklidesowych są homotopjne.

Twierdzenie 9.1.1. *Niech X będzie przestrzenią zwartą, a $W \subset \mathbb{R}^n$ otwartym podzbiorem. Dla każdego przekształcenie $f \colon X \to W$ istnieje $\epsilon > 0$ takie, że dowolne przekształcenie $g \colon X \to W$ dla którego $d_{\sup}(g, f) < \epsilon$ jest homotopijne z f.*

Dowód. Obraz $f(X) \subset G$ jest podzbiorem zwartym. Zatem jego pokrycie

$$f(X) \subset \bigcup_{x \in X} B(f(x), r_x) \subset W$$

ma liczbę Lebesgue'a $\lambda > 0$ tzn. dowolne dwa punkty odległe o mniej niż λ leżą w pewnej kuli $B(f(x), r_x) \subset W$. Zatem jeśli $d_{\sup}(g, f) < \lambda =: \epsilon$ to afiniczna homotopia $F(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x)$ jest dobrze określonym odwzorowaniem $F : X \times I \to W$. □

9.2 Punktowana homotopia

Jak zobaczymy w dalszych rozdziałach bywa pożyteczne rozpatrywanie przestrzeni topologicznych z wyróżninym punktem i odwzorowań zachowujacych te punkty. Takie sytuacje spotykamy jeśli w przestrzeni występuje struktura algebraiczna (np. przestrzenie wektorowe lub grupy macierzy). Punktem wyróżnionym jest wtedy element neutralny i jest on zachowywany przez homomorfizmy. Dokładniej, punktowaną przestrzenią (lub przestrzenią z wyróżnionym punktem) nazywamy parę (X, x_0) gdzie X jest przestrzenią topologiczną (oznaczenie topologii pomijamy), a $x_0 \in X$.

Definicja 9.2.1. Niech (X, x_0), (Y, y_0) będą przestrzeniami z wyróżnionymi punktami. *Homotopią punktowaną* nazywamy przekształcenie ciągłe $F \colon X \times [0, 1] \to Y$, takie, że dla każdego $t \in I$, $F(x_0, t) = y_0$.

Przekształcenia punktowane $f_0, f_1 \colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ są *homotopijne* jeśli istnieje punktowana homotopia $F \colon X \times [0, 1] \to Y$ taka, że $F(-, 0) = f_0$, $F(-, 1) = f_1$.

Deifnicja punktowanej homotopii prowadzi w oczywisty sposób do definicji punktowanej homotopijnej równoważności. Np. włożenie $j\colon (S^{n-1}, e_1) \subset (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, e_1)$ jest punktowaną homotopijną równoważnością, gdyż retrakcja $r\colon (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, e_1) \to (S^{n-1}, e_1)$ jest przekształceniem punktowanym, $rj = id_{S^{n-1}}$ oraz jr i $id_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}$ wiąże punktowana homotopia: $H\colon (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times [0,1] \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ zadana wzorem: $H(p,t) := (1-t)\frac{p}{||p||} + tp$.

Podobnie jak zwykła homotopia, punktowana homotopia $\sim$ jest relacją równoważności w zbiorze przekształceń punktowanych $\mathrm{Map}_*(X,Y) \subset \mathrm{Map}(X,Y)$. Zbió/r klas punktowanej homotopii oznaczamy $[X,Y]_* := \mathrm{Map}_*(X,Y)/\sim$. Konstrukcje w dowodzie Stw. 9.1.1 zachowują homotopie punktowane. Istnieje odwzorowanie zapominania $\Phi\colon [X,Y]_* \to [X,Y]$ przypisujące klasie homotopii punktowanej odwzorowania jego zwykłą klasę homotopii: $\Phi[f]_* = [f]$. Odwzorowanie to w ogólności nie musi być ani surjekcją, ani injekcją. Dla odwzorowań w okrąg S^1 mamy jednak następujące:

Stwierdzenie 9.2.1. *Dla dowolnej przestrzeni punktowanej (X, x_0) i punktowanego okręgu $(S^1, 1)$, odwzorowanie $\Phi\colon [X, S^1]_* \xrightarrow{\simeq} [X, S^1]$ jest bijekcją.*

Lemat 9.2.1. *Niech $z_0 \in S^1$. Odwzorowanie $f_{z_0}\colon S^1 \to S^1$, $f_{z_0}(w) = wz_0$ jest homotopijne z identycznością.* □

Dowód 9.2.1. Zastosujemy dwukrotnie powyższy lemat.

Φ jest surjekcją, bo dowolne $f\colon X \to S^1$ jest homotopijne z odwzorowaniem $g\colon X \to S^1$ $g(x) := f(x)f(x_0)^{-1}$ dla którego $g(x_0) = 1$.

Φ jest injekcją. Jeśli $F\colon X \times I \to Y$ jest homotopią między punktowanymi przekształceniami, to $G(x,t) := F(x,t)F(x_0,t)^{-1}$ jest punktowaną homotopią. □

Na przestrzeniach punktowanych można wykonywać konstrukcje opisane w Rozdziale 3. Podprzestrzeń przestrzeni punktowanej zawierająca wyróżniony punkt jest oczywiście przestrzenią punktowaną a włożenie przekształceniem punktowanym, przestrzeń ilorazowa jest przestrzenią punktowana - wyróżnionym punktem jest w niej klasa równoważności punktu wyróżnionego. Podobnie produkt kartezjański rodziny przestrzeni z wyróżnionym punktem $(X_s, x_s^0)_{s\in S}$ posiada naturalny punkt wyróżniony $x^0 := \{x_s^0\}_{s\in S}$, a rzutowania na czynniki są odwzorowaniami punktowanymi. Inaczej jest z konstrukcją sumy prostej; w sumie rozłącznej mamy dwa punkty wyróżnione, które następnie utożsamiamy. Odpowiednik sumy prostej dla przestrzeni punktowanych nazywa się *bukietem*, co uzasadnia następująca:

Definicja 9.2.2. Niech (X, x_0) (Y, y_0) będą przestrzeniami z wyróżnionymi punktami. Bukietem tych przestrzeni nazywamy przestrzeń punktowaną $X \vee Y := X \sqcup Y/\sim$ gdzie $(x_0, 1) \sim (y_0, 2)$ i punktem wyróżnionym jest klasa $[(x_0,1)] = [(y_0,2)]$, wyposażoną w włożenia $j_X\colon X \to X \vee Y$ oraz $j_Y\colon Y \to X \vee Y$ (por. Definicja 4.5.2).

Zauważmy, że bukiet $X \vee Y$ jest homeomorficzny z podzbiorem produktu kartezjańskiego:

$$X \vee Y = \{(x,y) \in X \times Y\colon x = x_0 \,\mathrm{lub}\, y = y_0\}.$$

i ten podzbiór bywa przyjmowany za definicję bukietu.

Stwierdzenie 9.2.2. *Niech (Z, z_0) będzie przestrzenią z wyróżnionym punktem. Dla dowolnych dwóch przestrzeni Hausdorffa z wyróżnionymi punktami włożenia $j_X : X \subset X \vee Y$, $j_Y : Y \subset X \vee Y$ definiują bijekcję*

$$(j_1^*, j_2^*) \colon [X \vee Y, Z]_* \to [X, Z]_* \times [Y, Z]_*$$

Dowód. Mamy oczywistą bijekcję $(j_1^*, j_2^*) \colon \operatorname{Map}_*(X \vee Y, Z) \to Map_*(X, Z) \times \operatorname{Map}_*(Y, Z)$. Trzeba pokazać, że odwzorowanie to pozostaje bijekcją po przejściu do klas homotopii. Oczywiście pozostaje surjekcją. Niech $f, g \colon X \vee Y \to Z$ będą dwoma odwzorowaniami takimi, że $f|X \sim g|X$ oraz $f|Y \sim g|Y$ i niech $H_X : X \times I \to Z$ oraz $H_Y : Y \times I \to Z$ będą odpowiednimi punktowanymi homotopiami.Definiujemy homotopię $H \colon (X \vee Y) \times I \to Z$ następująco (traktujemy $X \vee Y$ jako podzbiór $X \times Y$):

$$H(x, y, t) = \begin{cases} H_X(x, t) & \text{jeśli} \quad y = y_0 \\ H_Y(y, t) & \text{jesli} \quad x = x_0 \end{cases}$$

Ponieważ homotopie H_X i H_Y są punktowane, więc H jest dobrze określone, a ponieważ podzbiory $X \times I \subset (X \vee Y) \times I$ oraz $Y \times I \subset (X \vee Y) \times I$ są domknięte (tu korzystamy z własności Hausdorffa!), więc H jest ciągłe. $\square$

Wniosek 9.2.1. *Niech $(S^1, 1)$ będzie punktowanym okręgiem. Dla dowolnych dwóch przestrzeni Hausdorffa z wyróżnionymi punktami włożenia $j_X : X \subset X \vee Y$, $j_Y : Y \subset X \vee Y$ definiują izomorfizm grup*

$$(j_1^*, j_2^*) \colon [X \vee Y, S^1] \to [X, S^1] \times [Y, S^1].$$

Dowód. Ze Stw. otrzymujemy izomorfizm grup punktowanych klas homotopii $(j_1^*, j_2^*) \colon [X \vee Y, S^1]_* \to [X, S^1]_* \times [Y, S^1]_*$. Dzięki Stw. 9.2.1 możemy zastapić zbiory klas punktowanych przez klasy zwykłej homotopii. $\square$

Uwaga 9.2.1. Ponieważ jak zauważyliśmy włożenie $(S^1, 1) \subset (\mathbb{C}^*, 1)$ jest punktowaną homotopijną równoważnością, więc we Wn. 9.2.1 mozna zastąpić okrąg przez $\mathbb{C}^*$.

9.3 Przekształcenia i przestrzenie ściągalne

Definicja 9.3.1. Przekształcenie $f \colon X \to Y$ nazywa się *ściągalne* jeśli jest homotopijne z przekształceniem stałym w pewien punkt. Przestrzeń X nazywa się ściągalna jeśli przekształcenie identycznościowe $Id \colon X \to X$ jest ściągalne.

Przykład 9.3.1. Podzbiór $G \subset \mathbb{R}^n$ nazywamy gwiaździstym jeśli istnieje punkt $p_0 \in G$ (srodek gwiazdy) taki, że dla każdego $p \in G$ odcinek $[p_0, p] \subset G$. Zbiory wypukłe są gwiaździste. Dowolny podzbiór gwiaździsty jest ściągalny, a ściagnięcie jest dane wzorem $F \colon G \times I \to G$, $F(p, t) = (1 - t)p_0 + tp$.

Stwierdzenie 9.3.1. *Dowolne przekształcenie określone na przestrzeni ściągalnej lub o wartościach w przestrzeni ściągalnej jest ściągalne.* $\square$

9.4 Homotopijna równoważność

Definicja 9.4.1. Przekształcenie $f : X \to Y$ nazywa się *homotopiją równoważnością* jeśli istnieje $g : Y \to X$ takie, że $f \circ g \sim Id_Y$ i $g \circ f \sim Id_X$. Mówimy, że przestrzenie X, Y są homotopijnie równoważne.

Uwaga 9.4.1. Każdy homeomorfizm jest homotopijną równoważnością. Przestrzeń jest ściągalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest homotopijnie równoważna z przestrzenią jednopunktową.

Stwierdzenie 9.4.1. *Jeśli $f\colon X \to Y$ jest homotopijną równoważnością i Z jest dowolną przestrzenią, to $f^{\#}\colon [Y,Z] \to [X,Z]$, $f^{\#}([\phi]) := [\phi \circ f]$ oraz $f_{\#}\colon [Z,X] \to [Z,Y]$, $f_{\#}([\psi]) := [f \circ \psi]$ są bijekcjami. W szczególności f definiuje bijekcję zbiorów składowych łukowych $f_{\#}\colon \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$.*

Dowód. Wykażemy, że $f_{\#}$ jest bijekcją. Niech $g\colon Y \to X$ będzie homotopijną odwrotnością tzn. $fg \sim id_Y$ i $gf \sim id_X$. Z Wniosku 9.1.1 otrzymujemy równości $f_{\#}g_{\#} = (fg)_{\#} = id_{[Z,Y]}$ i $g_{\#}f_{\#} = (gf)_{\#} = id_{[Z,X]}$, a więc $f_{\#}$ jest bijekcją. Podobnie rozumowanie przeprowadzamy dla $f^{\#}$. □

Przykład 9.4.1. Podajemy przykłady ważnych homotopijnych równoważności:

1) Homotopijną odwrotnością włożenia $\iota\colon S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ jest retrakcja $r\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to S^{n-1}$, $r(x) := \frac{x}{||x||}$

2) Jeśli Y jest ściągalna, to $p_X\colon X \times Y \to X$ jest homotopijną równoważnością.

3) Włożenie równika $S^1 \hookrightarrow M$ we wstęgę Möbiusa jest homotopijną równoważnością.

9.5 Jednospójność

Definicja 9.5.1. Łukowo spójną przestrzeń X nazywamy *jednospójną* jeśli dowolne odwzorowanie $S^1 \to X$ jest ściągalne.

Przykład 9.5.1. Dowolna przestrzeń ściągalna jest jednospójna.

Stwierdzenie 9.5.1. *Dla $n \geqslant 0$ odwzorowanie $f\colon S^n \to X$ jest ściągalne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje odwzorowanie $\bar{f}\colon D^{n+1} \to X$ ($D^{n+1} := \bar{B}(0,1) \subset \mathbb{R}^{n+1}$) takie, że $\bar{f}|S^n = f$.*

Dowód. $\Longrightarrow$ Jeśli f jest ściągalne, to istnieje homotopia $F\colon S^n \times [0,1] \to X$ taka, że $F(x,0) = x_0$ i $F(x,1) = f(x)$. Rozpatrzmy odwzorowanie $q\colon S^n \times [0,1] \to D^{n+1}$, $q(\mathbf{v},t) := t\mathbf{v}$. Ponieważ q jest domknięte (a więc ilorazowe) odwzorowanie $\bar{f}([\mathbf{v},t]) := F(\mathbf{v},t)$ jest dobrze zdefiniowanym i ciągłym rozszerzeniem f.

$\Longleftarrow$ Jeśli f rozszerza się na D^{n+1} to jest ściągalne, bowiem dysk jest ściągalny jako podzbiór wypukły. Ściągnięcie f można zadać wzorem: $F(\mathbf{v},t) := (1-t)f(\mathbf{v}) + t\mathbf{e_1}$, gdzie $\mathbf{e_1}$ jest wektorem bazy kanonicznej. □

Zamiast odzwzorowań zdefiniowanych na okręgu $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ wygodnie jest rozważać zamknięte drogi (pętle) czyli odzwzorowania określone na odcinku $\omega\colon [0,1] \to X$ takie, że $\omega(0) = \omega(1)$. Nawet jesli interesują nas pętle, to pożyteczne jest też rozpatrywanie dróg o różnych początku i końcu.

Stwierdzenie 9.5.2. *Niech $(X, \mathcal{T}_X)$ będzie dowolną przestrzenią topologiczną. Odwzorowanie $p\colon [0,1] \to S^1$ dane wzorem $p(t) := (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ ustanawia bijekcję między zbiorem dróg zamkniętych (pętli) w X tzn. odwzorowań $\omega\colon [0,1] \to X$ takich, że $\omega(0) = \omega(1)$ a zbiorem odwzorowań $S^1 \to X$.*

Dowód. Dowolnemu odwzorowaniu $\alpha\colon S^1 \to X$ przypisujemy drogę zamkniętą $\alpha_p := p \circ \alpha\colon I \to X$. Odwrotnie, jeśli $\omega\colon [0,1] \to X$ jest drogą zamkniętą, to odwzorowanie $\omega^p\colon S^1 \to X$, $\omega^p(z) := \omega(t)$ gdzie $p(t) = z$ jest dobrze zdefiniowane i jest ciągłe, ponieważ p jest odwzorowaniem ilorazowym (a nawet domkniętym). $\square$

Przypomnijmy z GAL, że odwzorowanie $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ nazywa się afiniczne jeśli zachowuje kombinacje wypukłe tzn. dla każdego $t \in [0,1]$ zachodzi równość

$$f((1-t)a + tb) = (1-t)f(a) + tf(b).$$

Obrazem przekształcenia afinicznego jest odcinek euklidesowy łączący punkty $f(a)$ i $f(b)$.

Definicja 9.5.2.

1) Drogę $\omega\colon I \to A \subset \mathbb{R}^n$ nazywamy kawałkami afiniczną (lub kawałkami liniową) jeśli istnieje podział odcinka $0 = t_0 < \cdots < t_{n-1} < t_n = 1$ taki, że obcięcia $\omega|[t_i, t_{i+1}]$ są przekształceniami afinicznymi.

2) Drogę $\omega\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$ nazywamy łamaną jeśli jest afiniczna i jest przekształceniem różnowartościowym (a więc homeomorfizmem $\omega\colon [0,1] \xrightarrow{\simeq} \omega([0,1])$).

Lemat 9.5.1. *Dla dowolnej drogi $\alpha\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$ i liczby $\epsilon > 0$ istnieje droga kawałkami afiniczna $\beta\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$ taka, że $\alpha(0) = \beta(0)$, $\alpha(1) = \beta(1)$ oraz $d_{\sup}(\alpha, \beta) < \epsilon$.*

Dowód. Pokryjmy obraz $\alpha([0,1])$ kulami euklidesowymi o środkach $x \in \alpha([0,1])$ i promieniach ϵ: $\{B(x,\epsilon)\}_{x \in \alpha([0,1])}$ i rozpatrzmy pokrycie odcinka przeciwobrazami $\{\alpha^{-1}(B(x,\epsilon))\}_{x \in \alpha([0,1])}$. Niech $\lambda > 0$ będzie liczbą Lebesgue'a tego pokrycia a $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = 1$ podziałem odcinka takim, że $|t_i - t_{i+1}| < \lambda$. Niech $\beta_i\colon [t_i, t_{i+1}] \to \mathbb{R}^n$ będzie drogą afiniczną łączącą punkt $\alpha(t_i)$ z $\alpha(t_{i+1})$. Definiujemy kawałkami afiniczną drogę $\beta(s) := \beta_i(s)$ jesli $t_i \leqslant s \leqslant t_{i+1}$. Oczywiście $d_{\sup}(\alpha, \beta) < \epsilon$. $\square$

Twierdzenie 9.5.1. *Dla $n > 1$ sfera S^n jest jednospójna, a nawet dowolne odwzorowanie $S^k \to S^n$ gdzie $k < n$ jest ściągalne.*

Dowód. Niech $\alpha\colon I \to S^n$ będzie dowolną pętlą (tzn. $\alpha(0) = \alpha(1) = p_0$). Pokażemy, że jest ona homotopijna z pętlą, której obraz nie jest całą sferą, a więc zawartą w zbiorze ściągalnym $S^n \setminus \{p\} \simeq \mathbb{R}^n$. Rozważmy naszą pętlę jako odwzorowanie w całą przestrzeń euklidesową $\alpha\colon I \to S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ i korzystając z Lematu 9.5.1 wybierzmy kawałkami afiniczną petlę zaczepioną w p_0 $\beta\colon I \to \mathbb{R}^{n+1}$ taką, że $d_{\sup}(\alpha, \beta) < 1$. Wynika stąd, że

$\beta\colon I \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ a także obraz homotopii afinicznej $F(s,t) : (1-t)\alpha(s) + t\beta(s)$ leży w $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Składając tę homotopię z retrakcją $r\colon \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to S^n$, $r(x) := \frac{x}{||x||}$ otrzymujemy homotopię $H := r \circ F\colon I \times I \to S^n$ łączącą pętlę $\alpha\colon I \to S^n$ z pętlą $r \circ \beta\colon I \to S^n$. Zauważmy, że $r(\beta(I))$ jest suma mnogościową skończonej liczby łuków kół wielkich, a więc nie wypełnia sfery, skąd wynika, że $\alpha \sim \beta$ jest ściagalna. $\square$

Sfera jednowymiarowa S^1 nie jest jednospójna – gdyby była, to każda przestrzeń byłaby jednospójna! W dalszych rozdziałach zajmiemy się zbadaniem zbioru klas homotopii odzworowań $[S^1, S^1]$ i wykazaniem szeregu wniosków dotyczących topologii powierzchni.

9.6 Odwzorowanie wykładnicze i logarytm

This is the most important function in mathematics.
Walter Rudin[1]

Opiszemy jedno z najważniejszych odwzorowań topologii i analizy zespolonej, mające daleko idące uogólnienia w geometrii różniczkowej. Od tej pory wygodnie nam będzie traktować płaszczyznę euklidesową $\mathbb{R}^2$ jako zbiór liczb zespolonych $\mathbb{C}$ i korzystać z dodawania i mnożenia liczb zespolonych. Płaszczyznę euklidesową traktowaną jako ciało liczb zespolonych nazywa się płaszczyną Gaussa[2]. Będziemy też oznaczać $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ zbiór liczb zespolonych różnych od zera, który jest grupą abelową ze względu na mnożenie liczb zespolonych.

Definicja 9.6.1. Jeśli $z = x + iy$ jest liczbą zespoloną to definiujemy

$$\exp(z) := e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y) \in \mathbb{C}^*.$$

Część rzeczywistą liczby zespolonej $z = x + iy$ będziemy oznaczać $\Re(z) := x$ a część urojoną $\Im(z) := y$. Przez $\arg(z)$ argument liczby z, czyli liczbę $0 \leqslant \theta < 2\pi$ taką, że $z = |z|(\cos\theta + i \sin\theta)$, gdzie $|z|$ jest modułem z.

Stwierdzenie 9.6.1 (Własności exp)**.** *Odwzorowanie* $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$, *(oznaczane krócej* $p := \exp$*) ma następujące własności:*

1. $p(z_1+z_2) = p(z_1)p(z_2)$, $p(0) = 1$, *czyli p jest homomorfizmem grupy addytywnej liczb zespolonych w grupę multyplikatywną.*

2. *p jest surjekcją oraz $p(z) = p(z')$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba całkowita $k \in \mathbb{Z}$ taka, że $z' = z + 2k\pi i$).*

3. *Dla ustalonego punktu $z_0 \in \mathbb{C}^*$ oznaczmy półprostą $L^*_{z_0} := \{tz_0\colon t \in \mathbb{R}_+\} \subset \mathbb{C}^*$. Przeciwobraz pólprostej $p^{-1}(L^*_{z_0}) = \{z \in \mathbb{C}\colon \Im(z) = \arg(z) + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}\}$, czyli jest sumą rozłączną przeliczalnie wielu prostych równoległych do osi rzeczywistej.*

[1] Walter Rudin *Real & Complex Analysis.* Second Edition.McGraw-Hill Series in Higher Mathematics 1966, Prologue.

[2] Carl Friedrich Gauß (Braunschweig 1777 – 1855 Göttingen) worked in a wide variety of fields in both mathematics and physics incuding number theory, analysis, differential geometry, geodesy, magnetism, astronomy and optics. His work has had an immense influence in many areas. [Mac Tutor]

4. *Przeciwobraz* $p^{-1}(\mathbb{C}^* \setminus L^*_{z_0})$ *jest sumą rozłączną otwartych pasów*

$$U_k(z_0) := \{z \in \mathbb{C}\colon\ \arg(z_0) + 2k\pi < \Im(z) < \arg(z_0) + 2(k+1)\pi\}$$

a każdy z nich jest odwzorowywany przez p *homeomorficznie na* $\mathbb{C}^* \setminus L^*_z$, *a więc* p *jest otwartą surjekcją.*

5. *Przeciwobrazem okręgu o promieniu* $r > 0$, $S^1_r := \{z \in \mathbb{C}^*\colon |z| = r\}$ *jest prosta równoległa do osi urojonej* $x = \log r$.

Dowód. Ad 1,2. Równości wynikają z definicji funkcji wykładniczej przez szereg zespolony badź z własności rzeczywistych funkcji trygonometrycznych.

Ad 3. Z definicji funkcji exp wynika, że

$$p^{-1}(\mathbb{C}^* \setminus L^*_{z_0}) = \{z \in \mathbb{C}\colon \Im(z) \neq \arg(z_0) + 2k\pi i\}.$$

Żeby pokazać, że $p\colon U_k(z_0) \to \mathbb{C}^* \setminus L^*_{z_0}$ jest homeomorfizmem skonstruujemy odwzorowanie odwrotne $\log_k\colon \mathbb{C}^* \setminus L^*_{z_0} \to U_k(z_0)$ dane wzorem

$$\log_k(w) := \log|w| + (\arg(z_0) + \theta(w) + 2k\pi)i$$

gdzie $\theta(w)$ jest kątem między półprostą $L^*_{z_0}$ a wektorem $w \in \mathbb{C}^*$. Ciągłość tego odwzorowania wynika z ciągłości logarytmu rzeczywistego oraz funkcji $\theta\colon \mathbb{C}^* \setminus L^*_{z_0} \to (0, 2\pi)$. Ponieważ pasy $U_k(z_0)$ i dopełnienia półprostych $\mathbb{C}^* \setminus L^*_{z_0}$ są podzbiorami otwartymi, a więc p jest odwzorowaniem otwartym. □

Definicja 9.6.2. Logarytmem odwzorowania ciagłego $f\colon X \to \mathbb{C}^*$ będziemy nazywać dowolne odwzorowanie ciagłe $\tilde{f}\colon X \to \mathbb{C}$ takie, że $\exp \circ \tilde{f} = f$, czyli dla każdego $x \in X$ zachodzi równość $\exp(\tilde{f}(x)) = f(x)$ tzn. diagram przekształceń:

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{C} \arrow[d, "\exp"] \\ X \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"] & \mathbb{C}^* \end{tikzcd}$$

jest przemienny.

Zauważmy, że identyczność $Id\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ nie posiada logarytmu, nawet na podzbiorze $A \subset \mathbb{C}^*$, o ile zawiera on okrąg okrążający zero.

Stwierdzenie 9.6.2 (Jednoznaczność logarytmu)**.**

1. *Niech* $f\colon X \to \mathbb{C}^*$. *Jeśli* $\tilde{f}\colon X \to \mathbb{C}$ *jest logarytmem* f, *to dla każdej liczby całkowitej* $k \in \mathbb{Z}$, $\tilde{f}_k(x) := \tilde{f}(x) + 2k\pi i$ *jest także logarytmem* f.

2. *Jeśli* X *jest spójna i* $\tilde{f}_k\colon X \to \mathbb{C}$, $k = 1, 2$ *są logarytmami odwzorowania* $f\colon X \to \mathbb{C}^*$, *takimi, że dla pewnego punktu* $x_0 \in X$ $\tilde{f}_1(x_0) = \tilde{f}_2(x_0)$ *to* $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$

3. *Jeśli* X *jest spójna i* $\tilde{f}_k\colon X \to \mathbb{C}$, $k = 1, 2$ *są logarytmami odwzorowania* $f\colon X \to \mathbb{C}^*$ *to istnieje liczba całkowita* $k \in \mathbb{Z}$ *taka, że dla każdego* $x \in X$ $\tilde{f}_1(x) - \tilde{f}_2(x) = 2k\pi i$.

Dowód.

Ad 1. Wynika bezpośrednio z Tw. 9.6.1 pkt. 2.

Ad 2. Załóżmy, że X jest przestrzenią spójną. Wykażemy, że zbiór

$$\{x \in X \colon \tilde{f}_1(x) = \tilde{f}_2(x)\}$$

jest otwarto – domknięty. Domkniętość wynika stąd, że $\mathbb{C}$ jest przestrzenią Hausdorffa. Wykażemy, że jest także otwarty. Jeśli dla pewnego punktu $\tilde{f}_1(x) = \tilde{f}_2(x) = z_0$ to możemy wybrać pewien pas $U_k(z) \ni z_0$ oraz otoczenie $V \ni x$ takie, że $\tilde{f}_i(V) \subset U_k(z)$ dla $i = 1, 2$. Z definicji logarytmu zachodzą równości $p\tilde{f}_1 = p\tilde{f}_2 = f$. Ponieważ $p\colon U_k(z) \to \mathbb{C}^*$ jest różnowartościowe, więc stąd wynika, że $\tilde{f}_1(x') = \tilde{f}_2(x')$ dla $x' \in U$. Jedynym niepustym podzbiorem otwarto–domknietym przestrzeni spójnej jest cała przestrzeń, a więc $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$ na X.

Ad 3. Niech $x_0 \in X$; z własności funkcji wykładniczej (Tw. 9.6.1) wynika istnienie liczby całkowitej $k \in \mathbb{Z}$ takiej, że $\tilde{f}_1(x_0) = \tilde{f}_2(x_0) + 2k\pi i$. Z punktów 1,2 wynika, że $\tilde{f}_1(x) = \tilde{f}_2(x) + 2k\pi i$ dla wszystkich $x \in X$. □

Wniosek 9.6.1. *Niech $f\colon X \to \mathbb{C}^*$ będzie odwzorowaniem ciągłym. Załóżmy, że istnieje pokrycie $X = A_1 \cup A_2$ gdzie oba zbiory są otwarte, albo oba sa domknięte, ich przecięcie $A_1 \cap A_2$ jest spójne, oraz obcięcie przekształcenia $f|A_i$ posiada logarytm dla $i = 1, 2$. Wtedy przekształcenie f posiada logarytm.*

Dowód. Niech $\tilde{f}_i\colon A_i \to \mathbb{C}$ dla $i = 1, 2$ będą logarytmami. Oznaczmy $A_{12} := A_1 \cap A_2$. Ze Stw. 9.6.2 wnioskujemy, że istnieje $k \in \mathbb{Z}$ takie, że $\tilde{f}_1|A_{12} + 2k\pi i = \tilde{f}_2|A_{12}$. Stąd formuła

$$\tilde{f}(p) := \begin{cases} \tilde{f}_1|A_{12}(p) + 2k\pi i & \text{dla} \quad p \in A_1 \\ \tilde{f}_2|A_{12}(p) & \text{dla} \quad p \in A_2 \end{cases}$$

określa logarytm f na X. □

Twierdzenie 9.6.1 (S. Eilenberg[3]). *Niech X będzie przestrzenią zwartą.*

1) Odwzorowanie $f\colon X \to \mathbb{C}^*$ jest ściągalne wtedy i tylko wtedy, gdy posiada logarytm.

2) Dwa odwzorowania $f, g\colon X \to \mathbb{C}^*$ są homotopijne wtedy i tylko wtedy, gdy ich iloraz f/g posiada logarytm.

Dowód. Ad 1. $\Longleftarrow$ Niech $\tilde{f}\colon X \to \mathbb{C}$ będzie logarytmem tzn. $p \circ \tilde{f} = f$. Ponieważ przestrzeń $\mathbb{C}$ jest ściągalna, a więc przekształcenie $\tilde{f}$ jest ściagalne, a zatem złożenie z dowolnym innym przekształceniem jest ściągalna. Nb. homotopia może być łatwo zapisana wzorem $H\colon X \times I \to \mathbb{C}^*$, $H(x,t) := p(t\tilde{f}(x))$.

Ad 2. Jeśli $f \sim g$ i $F\colon X \times I \to \mathbb{C}^*$ jest homotopią między nimi, to $H(x,t) := F(x,t)/g(x)$ jest homotopią między odwzorowanien stałym w $1 \in \mathbb{C}^*$ a f/g. Odwrotnie, jeśli $H(x,t)$ jest homotopia między f/g a odwzorowaniem stałym w $1 \in \mathbb{C}^*$, to iloczyn $H(x,t)g(x)$ jest homotopią między f i g. □

[3]Samuel Eilenberg (Warszawa 1913 – 1998 New York)

Dowód punktu 1 twierdzenia w przeciwną stronę, a więc że przekształcenie ściągalne posiada logarytm, poprzedzimy ciekawym lematem, w którym wykorzystuje się mnożenie liczb zespolonych.

Lemat 9.6.1. *Niech X będzie przestrzenią zwarta a $F\colon X\times I\to\mathbb{C}^*$ homotopią taką, że $F(x,0)=z_0$ dla wszystkich $x\in X$. Dla dowolnego otoczenia otwartego $1\in U\subset\mathbb{C}^*$ istnieją funkcje $G_1,\dots G_n\colon X\times I\to U\subset\mathbb{C}^*$ takie, że dla każdego $x\in X$ zachodzi równość: $F(x,t)=z_0G_1(x,t)\dots G_n(x,t)$.*

Dowód lematu.. Zbiory $\{zU\}_{z\in\mathbb{C}^*}$ tworzą otwarte pokrycie $\mathbb{C}^*$. Zatem dzięki zwartości X możemy wybrać liczbę $\epsilon>0$ taką, że jeśli $|t-t'|<\epsilon$, to dla każdego $x\in X$, $F(x,t),F(x,t')\in zU$ dla pewnego $z\in\mathbb{C}^*$. Niech $0=t_0<t_1<\dots<t_{n-1}<t_n=1$ będzie podziałem odcinka takim, że $|t_i-t_{i+1}|<\epsilon$. Dla $j=0,..,n-1$ zdefiniujemy funkcje

$$G_j(x,t):=\frac{F(x,\frac{j+1}{n}t)}{F(x,\frac{j}{n}t)}$$

□

Dowódu pkt. 1 Twierdzenia 9.6.1. $\Longrightarrow$ Niech $f\colon X\to\mathbb{C}^*$ będzie ściągalne a $F\colon X\times I\to\mathbb{C}^*$ będzie jego ściagnięciem, a więc homotopią taką, że $F(x,0)=z_0$ oraz $F(x,1)=f(x)$. Korzystając z Lematu 9.6.1 rozłóżmy F na iloczyn: $F(x,t)=z_0G_1(x,t)\dots G_n(x,t)$. w którym $G_j(x,t)\in\{z\in\mathbb{C}\colon\ \arg(z)\neq\pi\}$. Ze Stw. 9.6.1 pkt.4 wiemy, że obcięcie odwzorowania wykładniczego

$$p\colon\{z\in\mathbb{C}\colon\ -\pi<\Im(z)<\pi\}\xrightarrow{\cong}\{z\in\mathbb{C}\colon\ \arg(z)\neq\pi\}$$

jest homeomorfizmem i oznaczmy jego odwrotność

$$\log_0\colon\{z\in\mathbb{C}\colon\ \arg(z)\neq\pi\}\xrightarrow{\cong}\{z\in\mathbb{C}\colon\ -\pi<\Im(z)<\pi\}.$$

Niech w_0 będzie dowolnym punktem takim, że $p(w_0)=z_0$. Definiujemy logarytm F wzorem:

$$\tilde{F}(x,t):=w_0+\log_0(G_1(x,t))+\dots+\log_0(G_n(x,t)).$$

Z tej definicji natychmiast widać, że $\tilde{F}$ jest odwzorowaniem ciągłym, a z własności przekształcenia wykładniczego, że $p\tilde{F}=F$. □

9.7 Homotopijna klasyfikacja odwzorowań w $\mathbb{C}^*$.

Dla dowolnej przestrzeni X zbiór odwzorowań $\mathrm{Map}\,(X,\mathbb{C}^*)$ posiada strukturę grupy abelowej, wyznaczoną przez mnożenie liczb zespolonych – funkcje mnożymy mnożąc je w każdym punkcie. W dalszym ciągu będziemy rozpatrywać zbiór klas homotopii odwzorowań $[X,\mathbb{C}^*]=[X,S^1]$, który tę strukturę grupową dziedziczy, bowiem jeśli $f_0\sim f_1, g_0\sim g_1\colon X\to\mathbb{C}^*$ to ich iloczyny też są homotopijne: $f_0\cdot g_0\sim f_1\cdot g_1$.

Definicja 9.7.1. Zbiór $H^1(X):=[X,\mathbb{C}^*]=[X,S^1]$ z wyżej zdefiniowanym działaniem będziemy nazywać (pierwszą) grupą kohomologii (lub kohomotopii) przestrzeni X.

Ponieważ mnożenie liczb zespolonych jest przemienne, więc dla dowolnej przestrzeni grupa $H^1(X)$ jest abelowa.

Stwierdzenie 9.7.1. *Przyporządkowanie przestrzeni topologicznej X grupy $H^1(X)$ ma następujące własności:*

1. *Dla dowolnego przekształcenia $\phi\colon X \to Y$ przekształcenie $\phi^*\colon H^1(Y) \to H^1(X)$ dane wzorem $\phi^*(f) := f \circ \phi$ jest homomorfizmem grup.*

2. *Jeśli przekształcenia $\phi_0, \phi_1\colon X \to Y$ są homotopijne, to $\phi_0^* = \phi_1^*$*

3. *Dla dowolnych dwóch przestrzeni $X_1 X_2$ włożenia zadają izomorfizm grup*

$$H^1(X_1 \sqcup X_2) \xrightarrow{\simeq} H^1(X_1) \times H^1(X_2).$$

Dowód.
Ad 1. $\phi^*(f \cdot g)(x) := (f \cdot g)(\phi(x)) = f(\phi(x) \cdot g(\phi(x)) = \phi^*(f) \cdot \phi^*(g)$.
Ad 2. To jest szczególny przypadek Wniosku 9.1.1.
Ad 3. Włożenia $\iota_1\colon X_1 \subset X_1 \sqcup X_2$ i $\iota_2\colon X_2 \subset X_1 \sqcup X_2$ zadają homorfizm grup

$$(\iota_1^\#, \iota_2^\#)\colon H^1(X_1 \sqcup X_2) \xrightarrow{\simeq} H^1(X_1) \times H^1(X_2).$$

Z definicji sumy prostej łatwo sprawdzić, że jest on bijekcją. □

Dla dowolnej przestrzeni ściągalnej $H^1(X) = 0$. Zajmiemy się więc obliczeniem grupy $H^1(S^1)$, czyli zbadaniem zbioru klas homotopii $[S^1, \mathbb{C}^*] = [S^1, S^1]$. Rozpoczniemy od zdefiniowania stopnia przekształcenia $S^1 \to \mathbb{C}^*$ (zwanego też indeksem pętli względem punktu 0). Korzystając z Stw.9.5.2 bedziemy utożsamiać odwzorowania $S^1 \to X$ z drogami zamkniętymi, czyli pętlami $[0,1] \to X$ i oznaczać je tą samą literą.

Niech $\alpha\colon [0,1] \to \mathbb{C}^*$ będzie drogą zamkniętą. Ponieważ odcinek jest przestrzenią ściągalną, na mocy Twierdzenia 9.6.1 odwzorowanie α posiada logarytm $\tilde{\alpha}\colon [0,1] \to \mathbb{C}$. Zdefiniujemy stopień α:

$$\deg(\alpha) := \frac{1}{2\pi i}(\tilde{\alpha}(1) - \tilde{\alpha}(0)).$$

Stwierdzenie 9.7.2. *Przyporządkowanie pętli $\alpha\colon [0,1] \to \mathbb{C}^*$ jej stopnia $\deg(\alpha)$ ma następujące własności:*

1. *Wartość $\deg(\alpha)$ nie zależy od wyboru logarytmu $\tilde{\alpha}$ i jest liczbą całkowitą.*

2. *Jeśli $\alpha_0 \sim \alpha_1\colon S^1 \to \mathbb{C}^*$ są homotopijne, to $\deg(\alpha_0) = \deg(\alpha_1)$.*

3. *Dla dowolnych $\alpha, \beta\colon S^1 \to \mathbb{C}^*$ zachodzi: $\deg(\alpha\beta) = \deg(\alpha) + \deg(\beta)$.*

4. *Dla dowolnej liczby całkowitej $n \in \mathbb{Z}$ odwzorowanie $\phi_n\colon S^1 \to \mathbb{C}^*$, $\phi_n(z) := z^n$, ma stopień n.*

Dowód.

Ad 1. Ponieważ odcinek jest przestrzenią spójną, więc na mocy Stw. 9.6.2 logarytm $\tilde{\alpha}$ jest wyznaczony jednoznacznie z dokładnością do składnika $2k\pi i$, a więc $\deg(\alpha)$ nie zależy od wyboru logarytmu. Ponieważ $\alpha(0) = \alpha(1)$ więc $\tilde{\alpha}(1) - \tilde{\alpha}(0) = 2d\pi i$, dla pewnej liczby całkowitej $d \in \mathbb{Z}$ skąd wynika, że $\deg(\alpha) = d$ jest liczbą całkowitą.

Ad 2. Skoro $\alpha_0 \sim \alpha_1$ to istnieje homotopia $H\colon [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}^*$ taka, że $H(\cdot, 0) = \alpha_0$, $H(\cdot, 1) = \alpha_1$, $H(0,t) = H(1,t)$. Ponieważ kwadrat jest zwartą przestrzenią ściągalną więc na mocy Tw. 9.6.1 przekształcenie H posiada logarytm $\tilde{H}\colon [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}$. Rozważmy funkcję $d(t) := \frac{1}{2\pi i}(\tilde{H}(1,t) - \tilde{H}(0,t))$. Funkcja ta jest ciągła i na mocy pkt. 1 przybiera wartości całkowite, a więc jest stała. Wynika stąd, że $\deg(\alpha_0) = d(0) = d(1) = \deg(\alpha_1)$

Ad 3. Jesli $\tilde{\alpha}\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ i $\tilde{\beta}\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ są odpowiednio logarytmami α i β, to $\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}$ jest logarytmem iloczynu $\alpha \cdot \beta$.

Ad 4. Logarytmem funkcji potęgowej $\phi_n(z) := z^n$ traktowanej jako odwzorowanie odcinka $\phi_n'\colon [0,1] \to \mathbb{C}^*$, $\phi_n'(t) = \exp(2n\pi i t)$ jest przekształcenie $\tilde{\phi}_n'(t) = 2n\pi i t$ a więc $\deg(\phi_n) = n$. □

Twierdzenie 9.7.1. *Stopień wyznacza izomorfizm grup* $\deg\colon [S^1, \mathbb{C}^*] \xrightarrow{\simeq} \mathbb{Z}$.

Dowód. Na mocy Stw. 9.7.2 $\deg\colon [S^1, \mathbb{C}^*] \to \mathbb{Z}$ jest dobrze zdefiniowanym homomorfizmem grup i jest epimorfizmem. Pozostaje zauważyć, że jest monomorfizmem. Niech $\deg(\alpha) = 0$; oznacza to, że dla pewnego logarytmu $\tilde{\alpha}(1) - \tilde{\alpha}(0) = 0$, czyli logarytm jest drogą zamkniętą, a więc definiuje przekształcenie $\tilde{\alpha}\colon S^1 \to \mathbb{C}$ takie, że $\alpha = p\tilde{\alpha}$. Ponieważ $\mathbb{C}$ jest ściągalna, więc $\alpha \sim 1$. □

Ostatnie twierdzenie powiada, że dowolne odwzorowanie $\alpha\colon S^1 \to \mathbb{C}^*$ jest homotopijne z jednym z odwzorowań potęgowych ϕ_n i żadne dwa różne takie odwzorowania nie są homotopijne.

Wniosek 9.7.1. $[S^1 \vee \cdots \vee S^1, S^1] \simeq \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}$

Sformułujemy kilka ważnych wniosków wypływających ze znajomości homotopijnej klasyfikacji odwzorowań $S^1 \to \mathbb{C}^*$.

Wniosek 9.7.2. *Okrąg S^1 nie jest ściągalny i nie jest retraktem dysku* $D^2 := \{z \in \mathbb{C}\colon ||z|| \leqslant 1\}$.

Dowód. Dla $n = 1$ twierdzenie wynika ze spójności odcinka oraz niespójności sfery S^0. Odwzorowanie identycznościowe $id : S^1 \to S^1$ ma stopień 1, zatem nie jest ściągalne. Jeśli istniałaby retrakcja $r\colon D^2 \to S^1$, to oznaczałoby to, że identyczność na S^1 jest ściągalna (p. Stw. 9.5.1). □

Uwaga 9.7.1. Sfera S^n nie jest ściągalna dla każdego $n \geqslant 0$. Zauważmy, że $S^0 = \{-1, 1\}$ nie jest spójna. Dowód dla $n > 1$ opiera się na konstrukcji stopnia dla odwzorowań $S^n \to S^n$.[4]. Poniższe słynne twierdzenie Brouwera[5] o punktach stałych także zachodzi dla dysków dowolnych wymiarów i jest wnioskiem z nieściągalności sfery.

---

[4] John W. Milnor *Topology from Differentiable Viewpoint* Tłum. polskie PWN 1969

[5] Luitzen Egbertus Jan Brouwer (Overschie, Rotterdam 1881 - 1966 Blaricum, Netherlands) best known for his topological fixed point theorem. He founded the doctrine of mathematical intuitionism, which views mathematics as the formulation of mental constructions that are governed by self-evident laws. [Mac Tutor]

Wniosek 9.7.3 (Twierdzenie Brouwera dla $n \leqslant 2$)**.** *Dowolne odwzorowanie $f\colon D^n \to D^n$, dla $n \leqslant 2$, ma punkt stały.*

Dowód. Jeśli $f\colon D^n \to D^n$ byłoby przekształceniem bez punktów stałych, to istniałaby retrakcja $r\colon D^n \to S^{n-1}$ zdefiniowana następująco: $r(x)$ jest punktem przecięcia półprostej $f(x)+t(x-f(x))$ dla $t \geqslant 1$ ze sferą S^n . Pokazaliśmy, że sfera S^{n-1} nie jest retraktem dysku D^n dla $n \leqslant 2$, więc dla tych wymiarów twierdzenie Brouwera jest w pełni udowodnione. □

Piekną ilustracją jedności matematyki jest to, że kurs topologii kończy się dowodem podstawowego twierdzenia algebry, powiadającego, że ciało liczb zespolonych jest algebraicznie domknięte.

Wniosek 9.7.4 (Zasadnicze twierdzenie algebry)**.** *Dowolny wielomian dodatniego stopnia o współczynnikach zespolonych posiada pierwiastek zespolony.*

Dowód. Niech $w(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ będzie wielomianem takim, że $w(z) \neq 0$ dla $z \in \mathbb{C}$, zadaje więc odwzorowanie wielomianowe $w\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$. Ponieważ $\mathbb{C}$ jest przestrzenią ściągalną, więc odwzorowanie w obcięte do dowolnego jej podzbioru, w szczególności $S^1 \subset \mathbb{C}$, jest odwzorowaniem ściągalnym. Z drugiej strony fomuła

$$H(z,t) := z^n + ta_{n-1}z^{n-1} + \cdots + t^{n-1}a_1 z + t^n a_0 = \begin{cases} t^n w(\frac{z}{t}) & \text{dla}\, t \neq 0 \\ z^n & \text{dla}\, t = 0 \end{cases}$$

zadaje homotopię $H\colon S^1 \times [0,1] \to \mathbb{C}^*$ między $H(z,0) = z^n := \phi_n(z)$ i $H(z,1) = w(z)$, a więc $\deg(w) = n > 0$, co oznacza, że otrzymaliśmy sprzeczność. □

Uwaga 9.7.2. Zasadnicze twierdzenie algebry oczywiście nie zachodzi dla ciała liczb rzeczywistych, natomiast zachodzi dla wielomianów o współczynnikach w ciele kwaternionów (które nie jest przemienne). Dowód opiera się na nieściągalności sfery $S^4 = \mathbb{H} \cup \{\infty\}$ gdzie $\mathbb{H}$ oznacza ciało kwaternionów.[6]

Wniosek 9.7.5 (Twierdzenie Borsuka[7] – Ulama[8] o antypodach dla $n \leqslant 2$)**.** *Dla dowolnego odwzorowania ciągłego $f\colon S^n \to \mathbb{R}^n$, gdzie $n \leqslant 2$, istnieje punkt $p \in S^n$ taki, że $f(p) = f(-p)$.*

Dowód. Załóżmy, że istnieje odwzorowanie $f\colon S^n \to \mathbb{R}^n$ takie, że dla każdego $p \in S^2$, $f(p) \neq f(-p)$. Zdefiniujmy odwzorowanie $g\colon S^n \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $g(p) := f(p) - f(-p)$. Sferę S^{n-1} można traltować jako podzbiór S^n ("równik") a obcięcie odwzorowania $g|S^{n-1}$ jest ściągalne (bowiem rozszerza się górną półsferę, czyli dysk) oraz spełnia warunek $g(-z) = -g(z)$.

Dla $n = 1$ jest to niemożliwe, bo odwzorowanie $S^0 \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ jest homotopije ze stałym wtedy i tylko wtedy, gdy przyjmuje wartości stałego znaku, co warunek $g(-z) = -g(z)$ wyklucza.

---

[6] Samuel Eilenberg and Ivan Niven. *The "fundamental theorem of algebra" for quaternions.* Bull. Amer. Math. Soc. Volume 50, Number 4 (1944), pp. 246-248.

[7] Karol Borsuk (Warszawa 1905 - 1982 Warszawa) [Mac Tutor]

[8] Stanisław Ulam (Lwów 1909 - 1984 Santa Fe, New Mexico, USA) solved the problem of how to initiate fusion in the hydrogen bomb. He also devised the 'Monte-Carlo method' widely used in solving mathematical problems using statistical sampling.[Mac Tutor]

Niech teraz $n = 2$. Pokażemy, że odwzorowanie $g\colon S^1 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} = \mathbb{C}^*$ spełniające warunek $g(-z) = -g(z)$ nie może być ściągalne, bowiem musi mieć nieparzysty stopień. Rozważmy drogę zamkniętą $[0,1] \xrightarrow{p} S^1 \xrightarrow{g} \mathbb{C}^*$, którą będziemy oznaczać g_p i obliczymy jej stopień. Jeśli $g_p(0) = g(1) = z_0 = |z_0| \exp(i\theta_0)$ to

$$g_p(\frac{1}{2}) = g(-1) = -z_0 = |z_0| \exp(i(\theta_0 + (2k+1)\pi))$$

Niech $\tilde{g}'_p\colon [0, \frac{1}{2}] \to \mathbb{C}^*$ będzie logarytmem $g_p|[0, \frac{1}{2}]$. Z powyższego wzoru wynika, że dla pewnego $k \in Z$ zachodzi równość: $\tilde{g}'_p(\frac{1}{2}) = \tilde{g}'_p(0) + (2k+1)\pi i$. Warunek $g(-z) = -g(z)$ oznacza, że odwzorowanie g, a więc logarytm g_p jest wyznaczony przez wartości g na górnym półokręgu. Zdefiniujmy więc logarytm $\tilde{g}_p\colon [0,1] \to \mathbb{C}^*$ wzorem:

$$\tilde{g}_p(t) := \begin{cases} \tilde{g}'_p(t) & \text{dla} \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ \tilde{g}'_p(t - \frac{1}{2}) + (2k+1)\pi i \quad \text{dla} \quad \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

Stąd $(2\pi i) \deg(g) = \tilde{g}_p(1) - \tilde{g}_p(0) = \tilde{g}'_p(\frac{1}{2}) + (2k+1)\pi i - \tilde{g}'_p(0) =$
$\tilde{g}'_p(0) + (2k+1)\pi i + (2k+1)\pi i - \tilde{g}'_p(0) = 2(2k+1)\pi i$, a więc $\deg(g) = 2k+1$ jest liczbą nieparzystą, czyli g nie jest ściągalne. □

Uwaga 9.7.3. Podobnie jak twierdzenie Brouwera, twierdzenie Borsuka – Ulama zachodzi dla dowolnrgo wymiaru n i także stanowi konsekwencję klasyfikacji homotopijnej odwzorowań $S^n \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ przez odpowiednio zdefiniowany stopień.

Rozdział 10

Powierzchnie

W tym rozdziale zajmiemy się topologią zamkniętych powierzchni, a więc przestrzeni zwartych, lokalnie homeomorficznych z płaszczyzną $\mathbb{R}^2$. Dokładniej:

Definicja 10.0.2. Powierzchnią (lub rozmaitością 2-wymiarową) nazywamy przestrzeń Hausdorffa posiadającą przeliczalną bazę taka, że każdy jej punkt posiada otoczenie otwarte homeomorficzne z podzbiorem otwartym płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ (równoważnie z płaszczyzną $\mathbb{R}^2$). Powierzchnią zamkniętą nazywamy powierzchnię, która jest przestrzenią zwartą.

Nasze dalsze rozważania ograniczymy do poznanych przykładów powierzchni zwartych, czyli: sfery, torusa , płaszczyzny rzutowej , butelki Kleina i wykażemy, że żadne dwie z nich nie są homeomorficzne.

10.1 Sfera

Chociaż w tym rozdziale interesujemy się przede wszystkim powierzchniamy, to własności sfer przedyskutujemy dla dowolnego wymiaru. Przypomnijmy, że n-wymiarową sferą nazywamy podprzestrzeń przestrzeni euklidesowej $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, ||x|| = 1\}$, a n–wymiarowym dyskiem podprzestrzeń $D^n := \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \colon ||\mathbf{v}|| \leqslant 1\}$, czyli domknięcie kuli euklidesowej o środku w 0 i promieniu 1. Zauważmy, że brzeg dysku jest sferą: $\partial D^n = S^{n-1}$.

Stwierdzenie 10.1.1. *Dla $n > 0$ następujące przestrzenie są homeomorficzne są homeomorficzne ze sferą S^n:*

1. *Zbiór $(\mathbb{R}^n)^+ := \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ z topologią generowaną przez kule euklidesowe zawarte w $\mathbb{R}^n$ oraz zbiory $\{x \in \mathbb{R}^n \,|\, ||x|| > r\} \cup \{\infty\}$;*

2. *Zbiór $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ z topologią generowaną przez podzbiory otwarte $U \subset \mathbb{R}^n$ oraz zbiory postaci $\{\infty\} \cup (\mathbb{R}^n \setminus K)$ gdzie $K \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem zwartym;*

3. *Przestrzeń ilorazowa $D^n/\sim$ gdzie $x \sim y \iff x = y \text{ lub } x, y \in S^{n-1}$.*

Sfera jest przestrzenią zwartą, w której każdy punkt posiada otoczenie homeomorficzne z $\mathbb{R}^2$.

Dowód. Zaczniemy od zauważenia, że sfera jest przestrzenią zwartą, jako ograniczony i domknięty podzbiór $\mathbb{R}^{n+1}$. Także łatwo jest zauważyć, że każdy punkt posiada otocznie homeomorficzne z otwartą kulą $B(0,1) \in \mathbb{R}^n$ pokrywając sferę $2(n+1)$ półsferami. Homeomorfizmy półsfer z $B(0,1)$ są dane przez rzutowania na odpowiednie płaszczyzny. Dalej wykażemy, że sferę można pokryć dwoma zbiorami, z których każdy jest homeomorficzny z $\mathbb{R}^n$, a mianowicie wybrawszy dowolny punkt $p \in S^n$, $S^n = (S^n \setminus \{p\}) \cup (S^n \setminus \{-p\})$.

Zauważmy teraz , że topologie w zbiorze $(\mathbb{R}^n)^+ := \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ opisane w pkt. 1 i 2 są identyczne. Oznaczmy je odpowiednio $\mathcal{T}_1$ i $\mathcal{T}_2$. Ponieważ domknięcia kul euklidesowych są zbiorami zwartymi, więc $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$. Odwrotnie, dowolny zbiór zwarty jest podzbiorem pewnej kuli domknietej, a więc zachodzi inkluzja $\mathcal{T}_1 \supset \mathcal{T}_2$, skąd topologie są równe.

Skonstruujemy ciągłą bijekcję $D^n/\sim \to (\mathbb{R}^n)^+$. Dla $n=1$ wybierzmy homeomorfizm $h_1\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$ np. $h_1(t) := \frac{t}{t^2-1}$ i rozszerzmy do odwzorowania $\bar{h}_1\colon D^1 \to (\mathbb{R}^1)^+$ kładąc $h_1(1) = h_1(-1) = \infty$ Odwzorowanie to jest ciagłe i definiuje odwzorowanie przestrzeni ilorazowej $\bar{h}_1\colon D^1/\sim \to (\mathbb{R}^1)^+$ które jest ciagłą bijekcją. Ponieważ $D^1/\sim$ jest przestrzenią zwartą, więc jest homemorfizmem. W przypadku sfery dowolnego wymiaru przeprowadzamy dokładnie takie samo rozumowanie, uciekając do nieskończoności poprostych przechodzących przez 0. Definiujemy homeomorfizm $h_n\colon B(0;1) \to \mathbb{R}^n$ wzorem $h_n(t\mathbf{v}) := h_1(t)\mathbf{v}$, gdzie $\mathbf{v} \in S^{n-1}$ i $0 \leqslant t < 1$. Podobnie jak w przypadku jednowymiarowym rozszerzamy to przekształcenie do $h_n\colon D^n \to (\mathbb{R}^n)^+$ kładąc $h_n(\mathbf{v}) = \infty$ dla $\mathbf{v} \in S^{n-1}$. Przekształcenie to definiuje ciagła bijekcję $\bar{h}_n\colon D^n/\sim \to (\mathbb{R}^n)^+$, która jest homeomorfizmem bo $(\mathbb{R}^n)^+$ jest oczywiście przestrzenią Hausdorffa.

Homeomorfizm $S^n \to (\mathbb{R}^n)^+$ można określić wykorzystując *rzut stereograficzny*, czyli homeomorfizm $h\colon S^n \setminus p \to \mathbb{R}^n$. Wybierzmy punkt $p := (0,\dots,0,1) \in S^n$ i zdefiniujmy:

$$h(x_1,\dots,x_{n+1}) := \frac{1}{x_{n+1}-1}(x_1,\dots,x_n).$$

Łatwo się przekonać, że kładąc $h(p) = \infty$ otrzymujemy ciągłą bijekcję $\bar{h}\colon S^n \to (\mathbb{R}^n)^+$, a więc homeomorfizm. $\square$

Uwaga 10.1.1. Zauważmy, że model sfery opisany w punkcie 2) nie wymaga wyboru metryki w przestrzeni $\mathbb{R}^n$, a jest wyznaczony jedynie przez topologię tej przestrzeni!

Wniosek 10.1.1. *Dla dowolnego punktu $p \in S^n$ przekłuta sfera $S^n \setminus \{p\}$ jest homeomorficzna z przestrzenią euklidesową $\mathbb{R}^n$.*

Dowód. Zauważmy, że dla dowolnych dwóch punktów $p_1, p_2 \in S^n$ sfery w tych punktach przekłute są homeomorficzne, bowiem istnieje homeomorfizm sfery $h\colon S^n \to S^n$ taki, że $h(p_1) = p_2$. Homeomorfizm p jest łatwo skonstruować metodami znanymi z algebry liniowej. Niech $P \in \mathbb{R}^2$ bedzie dwuwymiarową podprzestrzenią zawierającą punkty p_1, p_2. W tej płaszczyźnie można przeprowadzić punkt p_1 na p_2 przy pomocy obrotu, który jest izometrią liniową. Kładąc identyczność na podprzestrzeni prostopadłej $P^\perp$ otrzymujemy izometrię liniową $h\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$, która oczywiście zachowuje sferę i przeprowadza p_1 na p_2. Korzystając 10.1.1 pkt. 2 i wyjmując punkt ∞ otrzymujemy tezę. $\square$

Twierdzenie 10.1.1. *Jeśli $n > 1$, to $H^1(S^n) := [S^n, S^1] = 0$.*

Dowód. Skorzystamy z Twierdzenia 9.6.1, pokazując , że dowone odwzorowanie $f\colon S^n \to \mathbb{C}^*$ posiada logarytm. Zauważmy, że rozkłada się na sumę dwóch podzbiorów domkniętych $S^n = S^n_+ \cup S^n_-$, z których każdy jest homeomorficzny z dyskiem D^n a ich przecięcie $S := S^n_+ \cap S^n_-$ jest homeomorficzne ze sferą S^{n-1}, a więc jest spójne. Ponieważ dyski są ściągalne, więc odwzorowanie f posiada na nich logarytmy. Z Wniosku 9.6.1 wynika istnienie logarytmu $\tilde{f}\colon X \to \mathbb{C}$, a więc odwzorowanie f jest ściągalne. □

10.2 Torus

Torusem nazywamy produkt dwóch okręgów $S^1 \times S^1$ [1]. Zauważmy, że tak zdefiniowany torus jest w naturalny sposób podprzestrzenią w 4-wymiarowej przestrzeni euklidesowej: $S^1 \times S^1 \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Można go jednak zanurzyć w $\mathbb{R}^3$ oraz przedstawić jako przestrzeń ilorazową kwadratu.

Zauważmy też, że torus jest grupą (mnożenie po współrzędnych) oraz działanie a także branie elementu odwrotnego są odwzorowaniami ciągłymi.

Stwierdzenie 10.2.1. *Następujące przestrzenie są homeomorficzne z torusem:*

a) T' *– powierzchnia w* $\mathbb{R}^3$ *otrzymaną przez obrót wokół osi* x_3 *okręgu położonego w płaszczyźnie* $x_2 = 0$*, który nie przecina osi* x_3*.*

b) T'' *– przestrzeń ilorazowa* $[-1,1] \times [-1,1]/\sim$ *gdzie* $(-1,t) \sim (1,t)$*,* $(s,1) \sim (s,-1)$ *a pozostałe klasy abstrakcji są jednopunktowe.*

Torus jest przestrzenią zwartą, w której każdy punkt posiada otoczenie homeomorficzne z $\mathbb{R}^2$*.*

Dowód. Torus jest zwarty jako produkt kartezjański dwóch przestrzeni zwartych. Dla dowolnego punktu torusa (z_1, z_2) zbiór $(S^1 \setminus \{z_1\}) \times (S^1 \setminus \{z_2\})$ jest zbiorem otwartym, homeomorficznym z $\mathbb{R}^2$ i zbiory tej postaci oczywiście pokrywają torus.

Homeomorfizm $[-1,1]\times[-1,1]/\sim \to S^1 \times S^1$ jest zadany przez odwzorowanie $p(s,t) := (\exp \pi t, \exp \pi s)$. Zanurzenie torusa w przestrzeń $\mathbb{R}^3$ jest opisane w skrypcie z Analizy Matematycznej[2] . □

Stwierdzenie 10.2.2. *Dla dowolnych dwóch punktów torusa* (z_1, z_2) *i* (w_1, w_2) *istnieje homeomorfizm* $h\colon T \to T$ *taki, że* $h(z_1, z_2) = (w_1, w_2)$*.*

Dowód. Definiujemy $h(u_1, u_2) := (u_1, u_2)(z_1, z_2)^{-1}(w_1, w_2) = (u_1 z_1^{-1} w_1, u_2 z_2^{-1} w_2)$. □

Stwierdzenie 10.2.3. *Niech* $p \in T$ *będzie dowolnym punktem. Przekłuty torus* $T \setminus \{p\}$ *jest homotopijnie równoważny z bukietem okręgów* $S^1 \vee S^1$*, a więc*

$$H^1(T \setminus \{p\}) = [S^1 \vee S^1, S^1] \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

[1] Wizualizacja p. Neil Strickland web page

[2] Michał Krych *'AM 2, Funkcje wielu zmiennych - ciągłość'*

Dowód. Wybierzmy model torusa jako przestrzeni ilorazowej kwadratu i punkt $p := (0,0) \in [-1,1] \times [-1,1] =: J^2$. Odwzorowanie $[-1,1] \times [-1,1] \setminus \{p\} \to T$ pozostaje ilorazowe. Oczywista retrakcja przekłutego kwadratu na jego (euklidesowy) brzeg $r\colon J^2 \setminus \{p\} \to \partial J^2$ wyznacza odwzorowanie retrakcję $\bar{r}\colon (J^2 \setminus \{p\})/\sim \to (\partial J^2)/\sim$. Odwzorowanie $\bar{r}\colon (J^2 \setminus \{p\})/\sim \to (\partial J^2)/\sim \subset (J^2 \setminus \{p\})/\sim$ jest homotopijne z identycznością; homotopia jest wyznaczona przez afiniczną homotopię $r\colon J^2 \setminus \{p\} \to \partial J^2 \subset J^2 \setminus \{p\}$ z identycznością. Z definicji bukietu wnika, że $(\partial J^2)/\sim \subset J^2/\sim$ jest bukietem okręgów. □

Uwaga 10.2.1. Teza Stw. 10.2.2 pozostaje prawdziwa jeśli zamiast punktu wyjmiemy z torusa mały dysk lub kwadrat wokół niego np. $\bar{B}(0;\epsilon)$ lub $[-\epsilon,\epsilon] \times [-\epsilon,\epsilon]$ gdzie $0 < \epsilon < 1$.

Twierdzenie 10.2.1. *Włożenie $j\colon S^1 \vee S^1 \subset S^1 \times S^1$ definiuje izomorfizm*

$$j^*\colon [S^1 \times S^1, S^1] \xrightarrow{\simeq} [S^1 \vee S^1, S^1] \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

Dowód. Homomorfizm j^* jest epimorfizmem. Jeśli $f\colon S^1 \vee S^1 \to S^1$ jest pewnym odwzorowaniem, to definiujemy jego rozszerzenie na cały torus wzorem: $\bar{f}(z_1,z_2) := f(z_1,1)f(1,z_2)$. Wykażemy, że j^* jest monomorfizmem. Załóżmy więc, że obcięcie przekształcenia $g\colon S^1 \times S^1 \to S^1$ do bukietu $S^1 \vee S^1$ jest homotopijne z przekształceniem stałym. Podobnie jak w dowodzie Tw. 10.1.1, stosując Tw. 9.6.1, dla takiego g skonstruujemy jego logarytm $\tilde{g}\colon S^1 \times S^1 \to \mathbb{C}$. Niech $p = (-1,-1) \in T$ i rozłóżmy torus na sumę dwóch podzbiorów otwartych $T = U_1 \cup U_2$ gdzie $U_1 := (T \setminus \{p\})$ a $U_2 := ((S^1 \setminus \{1\}) \times (S^1 \setminus \{1\}))$. Zbiór U_2 jest oczywiście homeomorficzny z otwartym kwadratem $(-1,1) \times (-1,1)$, a więc jest ściągalny. Na mocy Stw. 10.2.2 włożenie $S^1 \vee S^1 \subset T \setminus \{p\}$ jest homotopijną równoważnością. Stąd wynika, że dla $i = 1,2$ obcięcie $g|U_i$ posiada logarytm. Ponieważ przecięcie $U_1 \cap U_2$ jest spójne (homeomorficzne z przekłutym kwadratem), a więc na mocy Wniosku 9.6.1, g posiada logarytm, czyli na mocy Tw. 9.6.1 jest odwzorowaniem ściągalnym. □

Wniosek 10.2.1. *Torus nie jest homeomorficzny ze sferą.*

Dowód. Jeśli $h\colon T \to S^2$ byłoby homeomorfizmem (a nawet tylko homotopijną równoważnością), to $h^*\colon 0 = H^1(S^2) \to H^1(T) \neq 0$ byłoby bijekcją, co jest niemozliwe. □

10.3 Płaszczyzna rzutowa i wstęga Möbiusa

Bardzo ważną i interesującą powierzchnią jest płaszczyzna rzutowa. Jak pokazaliśmy sferę można sobie wyobrażać jako płaszczyznę z dodanym jednym punktem w nieskończoności. Płaszczyzna rzutowa to płaszczyzna do której dodano po jednym punkcie w nieskończoności dla każdej prostej przechodzącej przez 0, lub równoważnie dla każdej klasy prostych równoległych (jedna przechodzi przez 0). Ponieważ o dysku $D(0,1) \subset \mathbb{R}^2$ można mysleć jako o przestrzeni $\mathbb{R}^2$ (wnętrze dysku) do której dodano po jednym punkcie w nieskończoności dla każdej półprostej, a więc naturalne jest zdefiniowanie płaszczyzny rzutowej jako przestrzeni iloraowej dysku, w której antypodyczne punkty na jego brzegu są utożsamione:

$$P := D(0,1)/\sim \quad \text{gdzie} \quad p_1 \sim p_2 \iff p_1 = p_2 \quad \text{lub} \quad p_1, p_2 \in S^1 \quad \text{oraz} \quad p_1 = -p_2$$

Definicja ta i intuiucja bez trudu uogólnia się na wyższe wymiary.

Stwierdzenie 10.3.1. *Następujące przestrzenie są homeomorficzne z płaszczyzną rzutową P:*

1) *Przestrzeń ilorazowa* $P' := [-1,1] \times [-1,1]/\sim$ *gdzie* $(t_1,t_2) \sim (s_1,s_2) \iff (t_1,t_2) = (s_1,s_2)$ *lub* $(t_1,t_2) = -(s_1,s_2)$ *gdzie* $t_1 \in \{-1,1\}$ *lub* $t_2 \in \{-1,1\}$

2) *Przestrzeń ilorazowa* $P'' := S^2/\sim$ *gdzie* $p_1 \sim p_2 \iff p_1 = p_2$ *lub* $p_1 = -p_2$.

3) *Przestrzeń ilorazowa* $P''' := (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})/\sim$ *gdzie* $p_1 \sim p_2 \iff p_1 = p_2$ *lub* $p_1 = \lambda p_2$ *dla pewnej liczby* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Płaszczyzna rzutowa jest zwarta, a każdy jej punkt posiada otoczenie homeomorficzne z $\mathbb{R}^2$*.*

Dowód. Żeby sprawdzić zwartość płaszczyzny rzutowej wystarczy wykazać, że jest przestrzenią Hausdorffa, co jest łatwo sprawdzić bezpośrednio z definicji P, P', P'', P'''. To, ze każdy punkt ma otoczenie homeomorficzne z $\mathbb{R}^2$ najłatwiej jest zauważyć w modelu P'': odwzorowanie ilorazowe $q\colon S^2 \to P''$ odwzorowuje homeomorficznie otwarte półsfery na podzbiory otwarte płaszczyzny rzutowej.

Kanoniczny homeomorfizm dysku i kwadratu ("po promieniach") zachowuje antypodyczność punktów, a więc definiuje homeomorfizm $P \to P'$. Z kolei włożenie $S^2 \subset \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ definiuje ciągłą bijekcję $P'' \to P'''$, a ponieważ P'' jest przestrzenią zwartą, jest więc ona homeomorfizmem. Pozostaje wskazać homeomorfizm $P'' \to P$. Niech $p\colon S^2 \to D^2$ będzie projekcją na pierwsze dwie współrzędne: $p(x_0,x_1,x_2) := (x_0,x_1)$. Łatwo zauważyć, że zadaje ona bijekcję na klasach równoważności, a więc ciągłą bijekcję $P'' \to P$, która wobec zwartości P'' jest homeomorfizmem. □

Uwaga 10.3.1. Przestrzeń P'' jest przestrzenią orbit działania grupy $\mathbb{Z}_2 = \{-1,1\}$ na sferze S^2, a przestrzeń P''' jest przestrzenią orbit działania grupy multyplikatywnej liczb rzeczywistych $\mathbb{R}^*$ na $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

Uwaga 10.3.2. Zanurzenie płaszczyzny rzutowej w przestrzeń euklidesową $\mathbb{R}^4$ opisane jest w BCPP (p. BCPP[3] Przykład 5.1.3.)

Wniosek 10.3.1. *Dla dowolnych dwóch punktów* $p_1, p_2 \in P$ *istnieje homeomorfizm* $h\colon P \to P$ *taki, że* $h(p_1) = p_2$*.*

Dowód. Skorzystamy z interpertacji płaszczyzny rzutowej jako przestrzeni ilorazowej sfery S^2 oraz homeomorfizmu sfery skonstruowanego w dowodzie Wniosku 10.1.1. Niech $p_1 = [\mathbf{v}_1]$, $p_2 = [\mathbf{v}_2]$ liniowa izometria $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ taka, że $h(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_2$ zadaje homeomorfizm płaszczyny rzutowej $\bar{h}\colon P'' \to P''$ taki, że $\bar{h}(p_1) = p_2$). □

Stwierdzenie 10.3.2. *Niech* $p_0 \in P$*. Przekłuta płaszczyzna rzutowa* $P \setminus \{p_0\}$ *jest homeomorficzna z otwartą wstęgą Möbiusa. Istnieje rozkład płaszczyzny rzutowej na sumę dwóch podzbiorów domkniętych* $P = M \cup K$ *gdzie* M *jest domkniętą wstęgą Möbiusa,* K *– zbiorem homeomorficznym z dyskiem a* $M \cap K$ *ich wpólnym brzegiem, czyli podzbiorem homeomorficznym z okręgiem.*

[3]BCPP = S. Betley, J. Chaber, E.Pol, R.Pol TOPOLOGIA I, wykłady i zadania, wrzesień 2012

Dowód. Rozpatrzmy odwzorowanie ilorazowe $q\colon S^2 \to P''$ i jego obcięcie do przeciwobrazu przekłutej płaszczyzny rzutowej $q\colon S^2 \setminus \{\mathbf{v}_0, -\mathbf{v}_0\} \to P'' \setminus \{p_0\}$ gdzie $p_0 = [\mathbf{v}_0] = [-\mathbf{v}_0]$. Sfera z wykłutymi punktami antypodycznymi jest homeomorficzna z otwartym walcem $W := S^1 \times (-1, 1)$, przy czym punkty antypodyczne na sferze przechodzą na punkty antypodyczne na walcu, skąd otrzymujemy homeomorfizm $W/\sim\, \simeq P'' \setminus \{p_0\}$, a jak wiemy (otwarty) walec z utożsamieniem antypodycznych punktów jest homeomorficzny z (otwartą) wstęgą Möbiusa.

Rozkład przestrzeni rzutowej na sumę dwóch podzbiorów domkniętych $P = M \cup D$ gdzie M jest domkniętą wstęgą Möbiusa, D – dyskiem a $M \cap D$ ich wspólnym brzegiem otrzymujemy rozkładając "duży" dysk $D^2 = \bar{B}(0, \frac{1}{2}) \cup (D^2 \setminus B(0, \frac{1}{2}))$. $\square$

Twierdzenie 10.3.1. $H^1(P) := [P, S^1] = 0.$

Dowód twierdzenia poprzedzimy lematem traktującym o homotopijnych własnościach wstęgi Möbiusa. Domkniętą wstęgę będziemy utożsamiać z przestrzenią ilorazową domkniętego walca $S^1 \times [-1, 1]$ otrzymaną przez utożsamienie punktów antypodycznych: $(z, t) \sim (-z, -t)$.

Twierdzenie 10.3.2. *Rzutowanie wstegi Möbiusa na jej równik $p\colon M \to S^1$ zdefiniowane $p([z, t]) := z^2$ jest homotopijną równoważnością. Jeśli $\iota_1\colon S^1 \to M$, $\iota_1(z) := [z, 1]$ (włożenie okręgu na brzeg wstęgi) to złożenie $S^1 \xrightarrow{\iota_1} M \xrightarrow{p} S^1$ jest odwzorowaniem stopnia 2. Włożenie $\iota_1\colon S^1 \to M$ definiuje monomorfizm $\iota_1^*\colon [M, S^1] \to [S^1, S^1]$, którego obrazem jest podgrupa generowana przez odwzorowanie stopnia 2.*

Dowód. Zauważmy najpierw, że punkty $M_0 := \{[z, 0] \in M\colon z \in S^1\}$ tworzą równik wstęgi, a odwzorowanie $p|M_0\colon M_0 \to S^1$ jest homeomorfizmem. Oznaczmy odwzorowanie odwrotne $\iota_0\colon S^1 \to M_0 \subset M$. Złożenie $p\iota_0 = id_{S^1}$. Złożenie $\iota_0 \circ p\colon M \to M$ jest homotopijne z $id\colon M \to M$ poprzez homotopię $H([z, t], s) := [z, st]$. Z definicji wynika, że $(p \circ \iota_1)(z) = p([z, 1]) = z^2$ jest więc odwzorowaniem stopnia 2, a więc złożenie $\mathbb{Z} \simeq [S^1, S^1] \xrightarrow{p^*} [M, S^1] \xrightarrow{\iota_1^*} [S^1, S^1] \simeq Z$ przeprowadza $id\colon S^1 \to S^1$ na $\phi_2\colon S^1 \to S^1$, a więc jest monomorfizmem. Ponieważ p jest homotopijną równoważnością, p^* jest izomorfizmem, a stąd wynika, że ι_1^* jest różnowartościowe a jego obraz jest generowany przez odwzorowanie stopnia 2. $\square$

Dowód Tw. 10.3.1. Tak jak w przypadku sfery i torusa skorzystamy z Tw. 9.6.1, konstruujac logarytm dla dowolnego odwzorowania $g\colon P \to \mathbb{C}^*$. Skorzystamy z rozkładu przestrzeni rzutowej skonstruowanego w Stw.10.3.2 $P = M \cup K$ i pokażemy, że g posiada logarytm na obu skladnikach, a stąd wobec spójności przecięcia $M \cap K$, na całej płaszczyźnie rzutowej, a więc g jest ściągalne (p.Wniosek 9.6.1). Ponieważ K jest zbiorem ściągalnym, więc $g|K$ posiada logarytm, skad wynika, że $g|\partial K$ jest odwzorowaniem ściągalnym. Żeby pokazać, że $g|M$ posiada logarytm, wykażemy że jest ściągalne. Ponieważ brzeg dysku $\partial K = \partial M$, a więc g obcięte do brzegu wstęgi Möbiusa jest ściągalne. Z Tw. 10.3.2 wynika, że $g|M$ jest ściągalne. $\square$

Wniosek 10.3.2. *Płaszczyzna rzutowa nie jest homeomorficzna ani ze sferą, ani z torusem.*

Dowód. Nie istnienie homeomorfizmu płaszczyzny rzutowej z torusem jest natychmiastowe, bowiem $H^1(P) = 0$, a $H^1(T) \neq 0$. Jesli istniałby homeomorfizm $h\colon P \to S^2$, to dawałby homeomorfizm przekłutych przestrzeni. To jest jednak niemozliwe, bo przekłuta sfera jest ściagalna, a przekłuta płaszczyzna rzutowa jest homotopijnie równoważna z okręgiem, a więc ściągalna nie jest. □

10.4 Butelka Kleina

Butelkę Kleina[4] zazwyczaj definiuje się jako przestrzeń powstała z następujących utożsamień na bokach kwadratu $J^2 = [-1,1] \times [-1,1]$: $(1,t) \sim (-1,-t)$ oraz $(s,1) \sim (s,-1)$. Podobnie jak sfera, torus i płaszczyzna rzutowa butelka Kleina posiada także inne użyteczne modele.

Uwaga 10.4.1. Zanurzenie butelki Kleina w przestrzeń euklidesową $\mathbb{R}^4$ opisane jest w BCPP (p. BCPP Zad. 5.8)

Stwierdzenie 10.4.1. *Nastepujące przestrzenie są homeomorficzne z butelką Kleina.*

1) B' – *przestrzeń ilorazowa walca* $S^1 \times [-1,1]$ *w którym utożsamiamy punkty* $(z,1) \sim (\bar{z},-1)$,

2) B'' – *przestrzeń ilorazowa torusa* $S^1 \times S^1$ *w którym utożsamiamy punkty* $(z_1,z_2) \sim (\bar{z}_1,-z_2)$, *gdzie* $\bar{z}$ *oznacza sprzężenie zespolone.*

3) B''' – *przestrzeń ilorazowa sumy prostej dwóch domkniętych wstęg Möbiusa* $M_1 \sqcup M_2$ *w której utożsamiamy punty* $([z,1],1) \sim ([z,1],2)$ – *czyli dwie wstęgi Möbiusa sklejone wzdłuż brzegów.*

Butelka Kleina jest przestrzenią zwarta, której każdy punkt ma otoczenie homeomorficzne z $\mathbb{R}^2$.

Dowód. W celu sprawdzenia zwartości, wystarczy zauważyć, że butelka Kleina jest przestrzenią Hausdorffa. Odwzorowanie ilorazowe $q\colon T \to B''$ jest homeomorfizmem na górnych i dolnych "ćwiartkach" torusa, które są homeomorficzne z $\mathbb{R}^2$. Czytelnik, który dobrnął do tego miejsca bez trudu wyobrazi sobie i zapisze powyższe homeomorfizmy ;). □

Uwaga 10.4.2. Podobnie jak poprzednio rozważane powierzchnie, butelka Kleina jest topologicznie jednorodna, a przekłuta butelka Kleina jest homotopijnie równoważna z bukietem dwóch okręgów.

Twierdzenie 10.4.1. *Przekształcenie okręgu na wspólny brzeg wstęg* $\iota\colon S^1 \to B'''$, $\iota(z) := [[z,1],1] = [[-z,-1],1] = [[z,1],2] = [[-z,-1],2]$ *(dwukrotne nawinięcie) definiuje monomorfizm* $\iota^*\colon H^1(B''') \to H^1(S^1)$, *którego obrazem jest podgrupa cykliczna generowana przez klasę homotopii odwzorowanie stopnia 2, a więc* $H^1(B) \simeq \mathbb{Z}$.

[4] Felix Christian Klein (Duesseldorf 1849 - Goettingen 1925) is best known for his work in non-euclidean geometry, for his work on the connections between geometry and group theory, and for results in function theory. [Mac Tutor]

Dowód. Oznaczmy $E := \iota(S^1) = M_1 \cap M_2$ i nazwijmy ten zbiór, homeomorficzny z okręgiem, równikiem butelki Kleina. Niech $g\colon B \to S^1$ będzie odwzorowaniem, które po obcięciu do równika jest ściągalne. Z Tw. 10.3.2 wynika, że jest ono ściągalne na obu wstęgach Möbiusa, a więc na obu można określić jego logarytm. Ponieważ przecięcie tych wstęg jest spójne, wieć na mocy Wniosku 9.6.1 istnieje logarytm g określony na całej butelce, a więc g jest ściągalne. □

Wniosek 10.4.1. *Butelka Kleina nie jest homeomorficzna (a nawet homotopijnie równoważna) ze sferą, torusem, ani płaszczyzną rzutową.*

Dowód. Grupy kohomologii wymienionych przestrzeni nie są izomorficzne, a więc nie są one homotopijnie równoważne. □