Topologia I, Kolokwium 2012-12-11[1]

Zad. 1 (4 pkt.)**.** Na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ rozważmy następujące topologie:

1) Topologię Zariskiego $\mathcal{T}_Z := \{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R}^2\} \cup \{U \subset \mathbb{R}^2 \colon \mathbb{R}^2 \setminus U \text{ jest zbiorem skończonym}\}$;

2) Topologię $\mathcal{T}_0 := \{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R}^2\} \cup \{U \subset \mathbb{R}^2 \colon\ 0 \in U \text{ i } \mathbb{R}^2 \setminus U \text{ jest zbiorem skończonym}\} \cup \{U \subset \mathbb{R}^2 \colon\ 0 \notin U\}$;

3) Topologię $\mathcal{T}_k$ definiowaną przez metrykę kolejową.

W poniższej tabeli należy wypełnić każdą kratkę wpisując **TAK, NIE** lub **?** (nie wiem). w zależności od tego, czy wyszczególniona w nazwach kolumn przestrzeń posiada odpowiednią własność wymienioną w wierszach.

Własność / Przestrzeń	$(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_Z)$	$(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_0)$	$(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_k)$
Jest przestrzenią Hausdorffa	NIE	TAK	TAK
Posiada bazę przeliczalną	NIE	NIE	NIE
Posiada bazę przeliczalną w każdym punkcie	NIE	NIE	TAK
Jest przestrzenią ośrodkową	TAK	NIE	NIE
Jest przestrzenią zwartą	NIE	TAK	NIE
Jest przestrzenią spójną	TAK	NIE	TAK
Jest przestrzenią metryzowalną	NIE	NIE	TAK

Czy odwzorowanie identycznościowe $Id \colon (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_i) \to (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_j)$ gdzie $i, j = Z, 0, k$ jest ciągłe? W odpowiednie kratki wpisz odpowiedź **TAK, NIE** lub **?** (nie wiem). W nazwach wierszy są nazwy dziedzin odwzorowania, w kolumnach przeciwdziedzin:

Dziedzina/Przeciwdz.	do $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_Z)$	do $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_0)$	do $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_k)$
z $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_Z)$	TAK	NIE	NIE
z $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_0)$	TAK	TAK	NIE
z $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_k)$	TAK	NIE	TAK

Zad. 2 (3 pkt.)**.** Opisz składowe spójne przestrzeni $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e) \times (\mathbb{R}, \mathcal{T}_s)$ gdzie $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ jest prostą rzeczywistą z topologią euklidesową, a $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_s)$ prostą rzeczywistą z topologią prawej strzałki. Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie. Można skorzystać z Zadania 3.8 (BCPP 4.25) . Przestrzeń $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ jest spójna, więc ma jedną składową. Składowymi spójnymi strzałki są zbiory jednopunktowe. W takim razie składowymi spójnymi przestrzeni $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e) \times (\mathbb{R}, \mathcal{T}_s)$ są zbiory $\mathbb{R} \times \{x\}$. Można też bezpośrednio zauważyć, że $\mathbb{R} \times \{x\}$ są maksymalnymi zbiorami spójnymi. $\square$

[1] Grupa A - zadania w grupie B były merytorycznie takie same.

Zad. 3 (**A** 4 pkt.). Niech $S^1 := \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 \colon ||\mathbf{v}|| = 1\}$ będzie okręgiem o promieniu (euklidesowym) 1. Rozpatrzmy go jako podprzestrzeń płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ z topologią:

1) euklidesową $\mathcal{T}_e$;

2) kolejową $\mathcal{T}_k$;

3) rzeka $\mathcal{T}_r$;

4) Niemyckiego $\mathcal{T}_N$, czyli generowaną przez rodzinę

$$\{B((x_1,x_2),r) \subset \mathbb{R}^2 \colon (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2,\ r > 0\} \cup \{M(x_1,x_2) \subset \mathbb{R}^2 \colon (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2,\ x_2 \neq 0\}$$

gdzie $B((x_1,x_2),r)$ jest kulą (otwartą) w metryce euklidesowej o środku w (x,x_2) i promieniu $r > 0$ a

$$M(x_1,x_2) := B((x_1,x_2),|x_2|) \cup \{(x_1,0)\} \cup B((x_1,-x_2),|x_2|)$$

W poniższej tabeli wypełnij każdą kratkę wpisując **TAK, NIE** lub **?** (nie wiem) zależnie od tego czy odpowiednie przestrzenie są homeomorficzne.

Homeo	$(S^1, \mathcal{T}_e\|_{S^1})$	$(S^1, \mathcal{T}_k\|_{S^1})$	$(S^1, \mathcal{T}_r\|_{S^1})$	$(S^1, \mathcal{T}_N\|_{S^1})$
$(S^1, \mathcal{T}_e\|_{S^1})$	TAK	NIE	NIE	TAK
$(S^1, \mathcal{T}_k\|_{S^1})$	NIE	TAK	NIE	NIE
$(S^1, \mathcal{T}_r\|_{S^1})$	NIE	NIE	TAK	NIE
$(S^1, \mathcal{T}_N\|_{S^1})$	TAK	NIE	NIE	TAK

Poniżej uzasadnij odpowiedź w przypadku pary $(S^1, \mathcal{T}_k|_{S^1})$, $(S^1, \mathcal{T}_r|_{S^1})$.

Uzasadnienie. Okrąg z topologią kolejową $(S^1, \mathcal{T}_k|_{S^1})$ jest przestrzenią dyskretną, podczas gdy okrąg z topologią rzeczną $(S^1, \mathcal{T}_r|_{S^1})$ ma dwa punkty skupienia: $(1,0)$ i $(-1,0)$, a więc nie jest przestrzenią dyskretną. $\square$

Zad. 4 (5 pkt.)**.** Niech $C([0,3])$ oznacza przestrzeń złożoną z funkcji ciągłych określonych na odcinku euklidesowym $[0,3]$. Przestrzeń tę rozpatrujemy z topologią $\mathcal{T}(d_{\sup})$. Niech dla $f \in C([0,3])$, $r > 0$:

$$D(f,r) := \{g \in C([0,3]) \colon \forall_{1 \leqslant t \leqslant 2} \, |f(t) - g(t)|) \leqslant r\}.$$

Niech 0 oznacza funkcję tożsamościowo równą 0. Odpowiedz na pytania **(niepotrzebne skreślić)** i podaj uzasadnienia:

1. Czy dla dowolnej funkcji f i promienia $r > 0$ podprzestrzenie $D(0,1)$ i $D(f,r)$ są homeomorficzne?

   TAK ~~**NIE**~~ ~~**NIE WIEM**~~

   Dowód. Niech $T_f \colon C([0,3]) \to C([0,3])$ będzie przesunięciem $T_{-f}(g) := g - f$. Obrazem kuli $D(f,r)$ jest kula $D(0,r)$. Odwrotne przekształcenie jest dane przez przesunięcie T_f. Ponieważ przesunięcie jest ciągłę (jest izometrią), więc kule o tym samym promieniu i różnych środkach są homeomorficzne. Trzeba sprawdzić, że $D(0,r)$ jest homeomoficzna z $D(0,1)$. W tym celu rozważamy odwzorowanie mnożenia przez skalar: $M_r \colon C([0,3]) \to C([0,3])$, $M_r(f)(x) := rf(x)$. Odwzorowanie odwrotnym jest $M_{\frac{1}{r}}$. □

2. Czy podprzestrzeń $D(0,1)$ jest spójna? **TAK** ~~**NIE**~~ ~~**NIE WIEM**~~

   Dowód. Tak, bowiem jest łukowo spójna. Dla dowolnych dwóch funkcji $f, g \in D(0,1)$ definiujemy drogę $\omega(t) := (1-t)f + tg$. To jestodwzorowanie ciągłe i dzięki nierówności trójkąta $\forall_{t \in [0,1]} \, (1-t)f + tg \in D(0,1)$ □

3. Czy podprzestrzeń $D(0,1))$ jest zwarta? ~~**TAK**~~ **NIE** ~~**NIE WIEM**~~

   Patrz BCPP Zadanie 2.7 (Seria 4 zad. 4). Podzbiór $D(0,1)$ zawiera kulę $B(0,1)$, a więc jego wnętrze nie jest puste. Można też łatwo podać ciąg funkcji w $D(0,1)$, który nie zawiera podciągu zbieżnego, lub po prostu zauważyć, że zbiór $D(0,1)$ jest nieograniczony (funkcje poza odcinkiem $[1,2] \subset [0,3]$ mogą przyjmować dowolnie duże wartości.

Zad. 5 (4 pkt.)**.** Niech $a, b \in [0,1]$ będą różnymi punktami odcinka euklidesowego. Zdefiniujmy relację równoważności $R_{a,b}$: $x \, R_{a,b} \, y \iff x = y \operatorname{lub} x, y \in \{a, b\}$. Zbiór klas abstrakcji relacji $R_{a,b}$ z topologią ilorazową oznaczmy symbolem $X_{a,b} := [0,1]/R_{a,b}$. Dla jakich par punktów przestrzenie $X_{a,b}$ są homeomorficzne, a dla jakich nie są? Odpowiedź uzasadnij. Rozwiązanie zilustruj rysunkiem.

Rozwiązanie. Relacja $R_{a,b}$ nie zależy od kolejności punktów, więc możemy rozważać pary (a,b) takie, że $a < b$. Pary punktów (a,b) możemy podzielić na trzy klasy:

1. oba punkty są końcami,
2. jeden punkt jest wewnętrzny, a drugi jest końcem,
3. oba punkty są wewnętrzne.

Ad 1. Oba punkty są końcowe tzn $a = 0$, $b = 1$. Wtedy $X_{0,1}$ jest homeomorficzna z okręgiem S^1. (Seria 2, Zad 12).

Ad 2. Podobnie jak poprzednio: dla dowolnej pary punktów (a,b), (c,d) takich, że dokładnie jeden w każdej parze jest końcowy istnieje homeomorfizm $h \colon [0,1] \to [0,1]$ taki,że $\{h(a), h(b)\} = \{c, d\}$, przy czym punkt końcowy przechodzi na punkt końcowy, a więc typ homemorficzny przestrzeni $X_{a,b}$ także w tym przypadku nie zależy od wyboru punktów. Przyjmując $a = 0$, $b = \frac{1}{2}$ dostajemy, że $X_{a,b}$ jest homeomorficzne z okręgiem z doklejonym końcem odcinkiem.

Ad 3. Dla dowolnych dwóch par punktów wewnętrznych (a,b), (c,d) istnieje homeomorfizm odcinka $h \colon [0,1] \to [0,1]$ taki, że $h(a) = c$, $h(b) = d$ (zdefiniować!). Homeomorfizm h wyznacza homeomorfizm $\bar{h} \colon X_{a,b} \to X_{c,d}$, a więc typ homeomorfizny przestrzeni $X_{a,b}$ nie zależy od wyboru punktów wewnętrznych. Niech np. $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{3}{4}$. Wtedy $X_{a,b}$ jest homeomorficzne z okręgiem z doklejonymi końcami dwoma odcinkami.

Przestrzenie $X_{0,1}, X_{0,\frac{1}{2}}$, $X_{\frac{1}{4},\frac{3}{4}}$ nie są homeomorficzne, bo $X_{\frac{1}{4},\frac{3}{4}} \setminus \{[\frac{1}{4}]\}$ ma trzy składowe spójne, a w przestrzeniach $X_{0,1}, X_{0,\frac{1}{2}}$ nie ma takiego punktu. Podobnie $X_{0,1}, X_{0,\frac{1}{2}}$ nie są homeomorficzne, bo $X_{0,\frac{1}{2}} \setminus \{[\frac{1}{2}]\}$ ma dwie składowe spójne, a po wyjęciu dowolnego punktu okrąg $X_{0,1}$ pozostaje spójny. □