Topologia I
Zadania przygotowawcze do egzaminu

23 stycznia 2013

Definicja (Topologie na prostej)**.** W zbiorze liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ zdefiniujmy rodziny podzbiorów $\mathcal{T}_i \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$:

1. $\mathcal{T}_1 = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ – topologia dyskretna
2. $\mathcal{T}_2 = \{U \subset \mathbb{R} \colon \forall_{s \in U} \exists_{t > s} [s,t) \subset U\}$ – topologia prawej strzałki
3. $\mathcal{T}_3 = \{U \subset \mathbb{R} \colon \forall_{s \in U} \exists_{t < s} (t,s] \subset U\}$ – topologia lewej strzałki
4. $\mathcal{T}_4 = \{U \subset \mathbb{R} \colon \forall_{s \in U} \exists_{r < s < t} (r,t) \subset U\}$ – topologia euklidesowa
5. $\mathcal{T}_5 = \{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, x) \colon x \in \mathbb{R}\}$ - topologia lewych przedziałów
6. $\mathcal{T}_6 = \{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\} \cup \{(x, +\infty) \colon x \in \mathbb{R}\}$ - topologia prawych przedziałów
7. $\mathcal{T}_7 = \{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\} \cup \{U \subset \mathbb{R} \colon \mathbb{R} \setminus U \text{ jest zbiorem skończonym}\}$ – topologia Zariskiego
8. $\mathcal{T}_8 = \{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\}$ – topologia antydyskretna

Zad. 1. Niech $\mathcal{T}_i$ dla $i = 1 \ldots 8$ będą rodzinami podzbiorów prostej rzeczywistej opisanymi w Def. .

a) Sprawdź, że rodziny $\mathcal{T}_i$ są topologiami.

b) Porównaj topologie $\mathcal{T}_i$, rysując diagram inkluzji tych topologii i zbadaj ich przecięcia.

c) Zbadaj, które topologie $\mathcal{T}_i$ mają własność Hausdorffa.

d) Wykaż, że topologia generowana przez rodzinę $\mathcal{T}_5 \cup \mathcal{T}_6$ jest identyczna z topologią euklidesową. Czy ta rodzina jest topologią?

e) O których parach przestrzeni $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_i)$, $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_j)$ potrafisz powiedzieć, że są lub nie są homeomorficzne? Narysuj i wypełnij odpowiednią tabelkę.

f) Które z przestrzeni $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_i)$ spełniają I, a które II aksjomat przeliczalności? Które są ośrodkowe? (p. BCPP[1] Zad. 1.49)

g) Które z przestrzeni $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_i)$ są metryzowalne? (p. BCPP Zad. 1.1, 1.2, 1.49)

h) Scharakteryzować spójne podzbiory w przestrzeniach $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_i)$. Opisać składowe spójne tych przestrzeni.

i) Scharakteryzować zwarte podzbiory w przestrzeniach $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_i)$.

Zad. 2. Zdefiniujmy funkcje $f, g, h \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ wzorami:

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{jeżeli } x \geqslant 0 \\ 0, & \text{jeżeli } x < 0 \end{cases} \quad , \quad h(x) = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } x \in [0,1) \\ 0 & \text{jeżeli } x \notin [0,1) \end{cases}$$

Zbadać ciągłość funkcji jako przekształceń $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_i) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_j)$. Wyniki badań wpisać w tabelki.

[1]BCPP = S. Betley, J. Chaber, E.Pol, R.Pol TOPOLOGIA I, wykłady i zadania, wrzesień 2012

Zad. 3. Dla dowolnej liczby naturalnej n podać przykłady funkcji ciągłych surjekcji $f\colon \mathbb{Q} \longrightarrow \{0, 1, \dots n\}$ oraz $f\colon \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \longrightarrow \{0, \dots n\}$, gdzie $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ jest podzbiorem liczb wymiernych.

Definicja (Topologie na płaszczyźnie)**.** Na płaszczyźnie rzeczywistej $\mathbb{R}^2$ zdefiniujmy rodziny podzbiorów. $\mathcal{F}_i \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$: (punkty płaszczyzny oznaczamy $x = (x_1, x_2)$).

1) $\mathcal{F}_1 = \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ – topologia dyskretna
2) $\mathcal{F}_2 = \{(a, b) \times \mathbb{R} \colon a < b\} \cup \{\mathbb{R} \times (a, b) \colon a < b\}$
3) $\mathcal{F}_3 = \{(a, b) \times (c, d) \colon a < b,\ c < d\}$ – ($\mathcal{T}(\mathcal{F}_2)$ – topologia euklidesowa)
4) $\mathcal{F}_4 = \{B(x, r) \subset \mathbb{R}^2 \colon x \in \mathbb{R}^2,\ r > 0\}$ gdzie $B(x, r) := \{x' \in \mathbb{R}^2 \colon ||x - x'|| < r\}$
5) $\mathcal{F}_5 = \{B(x, r) \colon x \in \mathbb{R}^2,\ r > 0\} \cup \{B((x_1, x_2), |x_2|) \cup \{(x_1, 0)\} \cup B((x_1, -x_2), |x_2|) \colon\ x_1 \in \mathbb{R},\ x_2 \neq 0\}\}$ – płaszczyzna motylków Niemyckiego[2]
6) $\mathcal{F}_6 := \{\{a\} \times (c, d) \colon a \in \mathbb{R},\ c < d < 0 \,\text{lub}\, 0 < c < d\} \cup \{(a, b) \times (-c, c) \colon a < b,\ c > 0\}$ – ($\mathcal{T}(\mathcal{F}_6)$ – topologia rzeczna)
7) $\mathcal{F}_7 = \{I(\mathbf{v}, \epsilon) \colon \mathbf{v} \neq 0,\ 0 < \epsilon < 1\} \cup \{(-a, a) \times (-a, a) \colon a > 0\}$, gdzie dla wektora $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ i $\epsilon > 0$, $I(\mathbf{v}, \epsilon) := \{t\mathbf{v} \,|\, 1 - \epsilon < t < 1 + \epsilon\}$ – ($\mathcal{T}(\mathcal{F}_7)$ – topologia kolejowa)
8) $\mathcal{F}_8 := \{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R}^2\} \cup \{\mathbb{R}^2 \setminus \{p\} \colon\ p \neq 0\} \cup \{U \subset \mathbb{R}^2 \colon\ 0 \notin U\}$
9) $\mathcal{F}_9 = \{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R}^2\} \cup \{\mathbb{R}^2 \setminus \{p\} \colon p \in \mathbb{R}^2\}$ – ($\mathcal{T}(\mathcal{F}_9)$ – topologia Zariskiego)
10) $\mathcal{F}_9 = \{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\}$ – topologia antydyskretna

Topologie generowane przez te rodziny będziemy oznaczać $\mathcal{T}_i := \mathcal{T}(\mathcal{F}_i)$.

Zad. 4. Niech $\mathcal{F}_i$ dla $i = 1..10$ będą rodzinami podzbiorów płaszczyzny opisanymi w Definicji .

a) Które z rodzin $\mathcal{F}_i$ są topologiami, a które bazami topologii przez nie generowanymi?
b) Porównaj topologie $\mathcal{T}_i := \mathcal{T}(\mathcal{F}_i)$, rysując diagram ich inkluzji i zbadaj przecięcia $\mathcal{T}_i \cap \mathcal{T}_j$.
c) Zbadaj, które z topologii $\mathcal{T}_i$ mają własność Hausdorffa.
d) O których przestrzeniach $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_i)$, $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_j)$ potrafisz powiedzieć, że są lub nie są homeomorficzne? Narysuj i wypełnij odpowiednią tabelkę. (p. BCPP Zad. 1.36)
e) Dla wektora $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ definiujemy przekształcenie przesunięcia (translację) $T_{\mathbf{v}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ wzorem $T_{\mathbf{v}}(\mathbf{w}) := \mathbf{v}+\mathbf{w}$. Dla każdego $1 \leqslant i \leqslant 10$ zbadać dla jakich wektorów $\mathbf{v}$ przesuniecie $T_{\mathbf{v}} \colon (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_i) \to (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_i)$ jest przekształceniem ciągłym (homeomorfizmem).
f) BCPP Zad. 1.27 - (zdefiniować ciągłość odwzorowania w punkcie przy pomocy definicji Cauchy.)
g) Które z przestrzeni $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_i)$ spełniają I, a które II aksjomat przeliczalności?
h) Które z przestrzeni $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_i)$ są metryzowalne? Wskaż odpowiednie metryki i zbadaj jak wyglądają kule w tych metrykach. (Patrz BCPP Zad. 1.1, 1.2)
i) Opisać składowe spójne i łukowo spójne przestrzeni $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_i)$
j) Zbadać zwartość zbioru $D^2 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \colon x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1\}$ w topologiach $\mathcal{T}_i | D^n$.

Zad. 5. BCPP Zad. 1.6, 1.7

Zad. 6 (Wnętrza i domknięcia w przestrzeni odwzorowań)**.** BCPP Zad. 1.18

[2] Zazwyczaj płaszczyzną Niemyckiego nazywa się górną półpłaszczyznę z opisaną topologią. Opisana przestrzeń to sklejenie dwóch półprzestrzeni Niemyckiego wzdłuż osi poziomej $x_2 = 0$.

Zad. 7 (Rzutowania w iloczynie kartezjańskim)**.** Wykaż, że rzutowania na czynniki iloczynu kartezjańskiego $\prod_{s\in S}(X_s,\mathcal{T}_s) \xrightarrow{p_s} (X_s,\mathcal{T}_s)$ są odwzorowaniami otwartymi (tzn. obrazy zbiorów otwartych są otwarte). Zauważ, że nie zawsze są odwzorowaniami domkniętymi (tzn. obrazy zbiorów domknętych nie muszą być domknięte.) (p. BCPP Zad. 1.37). Wykaż, że jeśli Y jest przestrzenią zwartą, to rzutowanie $p_X\colon X\times Y \to X$ jest odwzorowaniem domkniętym. (BCPP Zad. 2.14)

Zad. 8 (Domknięcie w iloczynie kartezjańskim)**.** BCPP Zad. 1.37 Czy teza zadania jest prawdziwa dla iloczynów nieskończonych?

Zad. 9 (Domkniętość przekątnej i wykresu)**.** BCPP Zad. 1.40, 1.41

Zad. 10 (Zbiór Cantora)**.** Pokazać, że odwzorowanie $\prod_{1}^{+\infty}(\{0,2\},\mathcal{T}_\delta) \xrightarrow{f} ([0,1],\mathcal{T}_e)$ dane wzorem $f(\{n_i\}) := \sum_{i=1}^{+\infty}\frac{n_i}{3^i}$ jest homeomorfizmem na obraz, którym jest *zbiór Cantora*. Wykazać, że zbiór Cantora jest zwarty oraz znaleźć jego składowe spójne. p. M.Krych AM1. Przykład 6.5.

Zad. 11 (Suma prosta odcinków)**.** Wykazać, że następujące przestrzenie są homeomorficzne:

a) $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ gdzie $\mathbb{Z}$ oznacza (zawsze) liczby całkowite

b) $(0,1)\setminus\{\frac{1}{n}\,|\,n\in\mathbb{N}\}$

c) $(0,1)\times\mathbb{N}$, gdzie $\mathbb{N}$ - liczby naturalne z topologią dyskretną

d) $\coprod_{n=1}^{\infty} X_i$ gdzie $\forall_{i\in\mathbb{N}}\, X_i = (0,1)$

Zad. 12 (Dziedziczność ośrodkowości)**.** Wykazać, że podprzestrzeń ośrodkowej przestrzeni metryzowalnej jest ośrodkowa. Czy jest to prawda bez założenia metryzowalności?

Zad. 13 (Operacje i ośrodkowość)**.** Zbadać zachowanie własności ośrodkowości przy pozostałych operacjach na przestrzeniach: przestrzeni ilorazowej, produkcie kartezjańskim, sumie prostej.

Zad. 14 (Odwzorowania ilorazowe i spójność)**.** Jeśli $p:(X,\mathcal{T}_X)\to(Y,\mathcal{T}_Y)$ jest odwzorowaniem ilorazowym (w szczególności surjekcją) takim, że dla każdego punktu $y\in Y$ przeciwobraz $f^{-1}(y)$ jest zbiorem spójnym oraz $(Y,\mathcal{T}_Y)$ jest przestrzenią spójną, to $(X,\mathcal{T}_X)$ jest przestrzenią spójną. Czy teza pozostaje prawdziwa jeśli w założeniu i tezie zamienić spójność na łukową spójność?

Zad. 15 (Spójność i łukowa spójność w $\mathbb{R}^n$)**.** Udowodnij, że otwarty, spójny podzbiór $(\mathbb{R}^n,\mathcal{T}_e)$ jest łukowo spójny.

Zad. 16 (Składowe produktu)**.** BCPP Zad. 4.25.

Zad. 17 (Klasyfikacja topologiczna i homotopijna cyfr)**.** Traktując cyfry 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 jako podzbiory płaszczyzny euklidesowej (wybrać ulubioną czcionkę), podzielić je na klasy równoważności relacji homeomorfizmu i relacji homotopijnej równoważności.

Zad. 18 (Podzbiory okręgu)**.** Wykazać, że dowolny spójny podzbiór okręgu S^1 jest homeomorficzny z S^1 lub jednym z odcinków $[-1,1],[-1,1),(-1,1)$ i żadne dwie z tych przestrzeni nie są homeomorficzne.

Zad. 19. Jeśli $(X,\mathcal{T}_d)$ jest przestrzenią metryzowalną, to dla dowolnego zbioru domkniętego przestrzeń ilorazowa X/A jest Hausdorffa, a zatem jeśli X jest zwarta to X/A jest też zwarta.

Zad. 20 (Różne modele sfery)**.** Udowodnij, że dla $n>0$ następujące przestrzenie są homeomorficzne:

1. Sfera $S^n := \{x\in\mathbb{R}^{n+1}\,|\,||x||=1\}$.

2. Zbiór $(\mathbb{R}^n)^+ := \mathbb{R}^n\cup\{\infty\}$ z topologią generowaną przez kule euklidesowe zawarte w $\mathbb{R}^n$ oraz zbiory $\{x\in\mathbb{R}^n\,|\,||x||>r\}\cup\{\infty\}$ (sfera Riemanna).

3. Zbiór $\mathbb{R}^n\cup\{\infty\}$ z topologią generowaną przez podzbiory otwarte $U\subset\mathbb{R}^n$ oraz zbiory postaci $\{\infty\}\cup(\mathbb{R}^n\setminus K)$ gdzie $K\subset\mathbb{R}^n$ jest zbiorem zwartym.

4. Przestrzeń ilorazowa $D^n/\sim$ gdzie $x\sim y \iff x=y$ lub $x,y\in S^{n-1}$ a $D^n := \{\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n\colon ||\mathbf{v}||\leqslant 1\}$.

Rozwiąż zadanie najpierw dla $n = 1, 2$ i wykonaj odpowiednie rysunki. Do rozwiązania skorzystaj z rzutu stereograficznego.

Zad. 21. BCPP Zad. 1.33 Zad. 2.7

Zad. 22. BCPP Zad. 2.14

Zad. 23. BCPP Zad. 2.17

Zad. 24. BCPP Zad. 2.18

Zad. 25 (Przestrzenie przeliczalne)**.** Zauważyć, że przeliczalna przestrzeń metryczna, która ma więcej niż jeden punkt nie jest spójna, ale może nie mieć punktów izolowanych. Rozwiązać zadanie BCPP 3.6.

Zad. 26 (Metryzowalność w sposób zupełny)**.** BCPP 3.10

Zad. 27 (Tw. Baire'a)**.** BCPP 3.13

Zad. 28 (Tw. Baire'a)**.** BCPP 3.14

Zad. 29 (Tw. Baire'a)**.** BCPP 3.15

Zad. 30 (Punkty stałe)**.** BCPP 3.27

Zad. 31 (Punkty stałe)**.** BCPP 3.28

Zad. 32. Przestrzeń $(X, \mathcal{T}_X)$ nazywa się *ściągalna* jesli istnieje punkt x_0 i odwzorowanie $H\colon X \times I \to X$ takie, że dla każdego $x \in X$, $H(x, 0) = x$, $H(x, 1) = x_0$. Wykazać, że:

1) Jeśli $(Y, \mathcal{T}_Y)$ jest homeomorficzna z przestrzenią ściągalną, to jest ściągalna.

2) Przestrzeń jest ściągalna $\iff$ jest homotopijnie równoważna z przestrzenią jednopunktową.

3) Jeśli przestrzeń $(X, \mathcal{T}_X)$ jest ściągalna do punktu x_0, to jest ściągalna do dowolnego punktu $x_1 \in X$.

4) Dowolny gwiaździsty podzbiór $\mathbb{R}^n$ jest ściągalny.

5) Przestrzeń ściągalna jest łukowo spójna.

6) Retrakt przestrzeni ściągalnej jest przestrzenią ściągalną.

7) Produkt kartezjański przestrzeni ściągalnych jest przestrzenią ściągalną. (*Uwaga:* podprzestrzeń, ani przestrzeń ilorazowa przestrzeni ściągalnej nie muszą być ściągalne).

8) Jeśli $A \subset X$ jest podzprzestrzenią ściągalną i istnieje odwzorowanie $H\colon X \times I \to X$ takie, że dla każdego $x \in X$, $H(x, 0) = x$,oraz $\forall_{x \in X} H(x, 1) \in A$, to X jest przestrzenią ściągalną.

Zad. 33. Znaleźć homeomorfizmy następujących przestrzeni:

1) "Przekłutej płaszczyzny" $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$, gdzie p jest dowolnym punktem.

2) "Płaszczyzny z dziurą" $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{B}(p; r)$, gdzie p jest dowolnym punktem i $r > 0$,

3) "Płaszczyzny ze szparą" $\mathbb{R}^2 \setminus [p, q]$ gdzie $[p, q] := \{(1-t)p + tq\colon 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ jest odcinkiem domkniętym.

4) Walca $S^1 \times (-1, 1)$.

i wykazać, że każda z nich jest homotopijnie równoważne z okręgiem S^1 (wskazać homotopijną równoważność w każdym przypadku osobno).

Zad. 34. Udowodnić, że "przekłuta płaszczyzna" $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$ jest homotopijnie równoważna z S^1, a płaszczyzna przekłuta 2-razy tzn $\mathbb{R}^2 \setminus \{p_1, p_2\}$ jest homotopijnie równoważna z bukietem dwóch okręgów

$$S^1 \vee S^1 := \{(z_1, z_2) \in S^1 \times S^1\colon z_1 = 1 \,\text{lub}\, z_2 = 1\} \simeq (S^1 \times \{0, 1\})/\sim \quad \text{gdzie}\,(1, 0) \sim (1, 1)$$

A co będzie jeśli zamiast płaszczyznę rozpatrywać przekłutą sferę S^2 ?

Zad. 35. Udowodnić, że dowolne przekształcenie $S^n \to S^1$ gdzie $n > 1$ jest homotopijne ze stałym.

Wsk. Skorzystać z tw. Eilenberga mówiącego, że przekształcenie jest homotopijne ze stałym wtedy i tylko wtedy gdy posiada logarytm. Rozłożyć sferę na górną i dolną półsferę i uzgodnić logarytm na równiku.

Zad. 36. [Wstęga Möbiusa] (Por. Seria 2 Zad. 14) Wykazać, że istnieje retrakcja wstęgi Möbiusa (zarówno otwartej jak i domkniętej) na jej równik i jest ona homotopijną równoważnością. Niech M będzie domkniętą wstęgą Möbiusa a ∂M jej brzegiem (tzn. obrazem odcinków $[-1,1]\times\{-1\}\cup[-1,1]\times\{1\}$). Zauważyć, że brzeg ∂M jest homeomorficzny z okręgiem S^1 a obcięcie $[M,S^1]\to[\partial M,S^1]\simeq\mathbb{Z}$ jest monomorfizmem, którego obrazem są liczby parzyste. Wywnioskować stąd, że brzeg wstęgi Möbiusa nie jest jej retraktem.

Wsk. Skorzystać z modelu wstegi Möbiusa z Zad. 2.14 c): określone tam odwzorowanie ilorazowe $S^1\times[-1,1]\to M_3$ definiuje homotopię między dwukrotnym nawinięciem okręgu na równik wstęgi Möbiusa i homeomorfizmem z jej brzegiem.

Zad. 37. [Płaszczyzna rzutowa] Wykazać, że następujące przestrzenie są homeomorficzne:

1) Przestrzeń ilorazowa $[-1,1]\times[-1,1]/\sim$ gdzie
$(t_1,t_2)\sim(s_1,s_2) \iff (t_1,t_2)=(s_1,s_2)\,\text{lub}\,(t_1,t_2)=-(s_1,s_2)\,\text{gdzie}\,t_1\in\{-1,1\}\,\text{lub}\,t_2\in\{-1,1\}$

2) Przestrzeń ilorazowa $\bar{B}(0,1)/\sim$ gdzie $p_1\sim p_2 \iff p_1=p_2\,\text{lub}\,p_1,p_2\in S^1\,\text{oraz}\,p_1=-p_2$

3) Przestrzeń ilorazowa $S^2/\sim$ gdzie $p_1\sim p_2 \iff p_1=p_2\,\text{lub}\,p_1=-p_2$
(Uwaga: to jest przestrzeń orbit działania grupy $\mathbb{Z}_2=\{-1,1\}$ na sferze).

Przestrzeń, której różne modele są wyżej opisane nazywamy (rzeczywistą) płaszczyzną rzutową i oznaczamy $\mathbb{R}P(2)$. Zauważyć, że $\mathbb{R}P(2)$ jest przestrzenią zwartą i spójną oraz dowolny jej punkt ma otoczenie homeomorficzne z $\mathbb{R}^2$. (por. BCPP Przykład 5.1.3.)

Zad. 38. [Płaszczyzna rzutowa cd] Wykazać, że "przekłuta" płaszczyzna rzutowa jest homotopijnie równoważna z okręgiem, a nawet homeomorficzna z otwartą wstęgą Möbiusa.

Wsk. W modelu 1) lub 2) wyciąć po środku małe domknięte kółko i metodą rozcinania i sklejania pokazać homeomrofizm ze wstęgą Möbiusa. W modelu 3) wyciąć w sferze S^2 małe otoczenie bieguna północnego i południowego i skorzystać z Zad. 14 c) Serii 2.

Zad. 39 (Torus)**.** (Por. Seria 2, Zad. 16) Zauważyć, że przekłuty torus jest homotopinie równoważny z bukietem dwóch okręgów $S^1\vee S^1$.

Zad. 40 (Butelka Kleina)**.** Butelkę Kleina definiujemy jako przestrzeń ilorazową $B:=[-1,1]\times[-1,1]/\sim$ gdzie $(1,t)\sim(-1,-t)$ oraz $(s,1)\sim(s,-1)$ (p. BCPP Zad. 5.8). Zauważyć, że: B jest przestrzenią zwartą i spójną i dowolny jej punkt ma otoczenie homeomorficzne z $\mathbb{R}^2$. Wykazać, że B jest sumą dwóch podprzestrzeni homeomorficznych domkniętymi wstęgami Möbiusa, przecinającymi się wzdłuż ich brzegu. Zauważyć, że przekłuta butelka Kleina jest homotopijnie równoważna z bukietem dwóch okręgów $S^1\vee S^1$.

Zad. 41. W walcu, wstędze Möbiusa, torusie, płaszczyźnie rzutowej i butelce Kleina wskazać przykłady podzbiorów homeomorficznych z okręgiem, których dopełnienia są spójne i takie, które są niespójne.