Topologia I. Test kompetencji 2013-03-01. Odpowiedzi i uzasadnienia.

Zad. 1. Niech $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ będą przestrzeniami topologicznymi. Dla dowolnego zbioru otwartego $U \subset X \times Y$ istnieją zbiory otwarte $V \subset X$ i $W \subset Y$ takie, że $U = V \times W$.

NIE. Np. kula na płaszczyźnie w metryce euklidesowej.

Zad. 2. Przestrzeń funkcji ciągłych na odcinku $[0,1]$ z metryką d_{sup} zawiera zbiór przeliczalny o niepustym wnętrzu.

NIE. Każda kula w tej przestrzeni jest nieprzeliczalna.

Zad. 3. Retrakt przestrzeni zwartej jest przestrzenia zwartą.

TAK Retrakt jest Haudorffa jako podprzestrzeń przestrzeni Hausdorffa i jest obrazem przestrzeni zwartej.

Zad. 4. Walec $S^1 \times \mathbb{R}$ i wstęga Möbiusa są homotopijnie równoważne.

TAK Obie przestrzenie są homotropijnie równoważne z okręgiem.

Zad. 5. Zbiór punktów o obu współrzędnych niewymiernych na płaszczyźnie z topologią rzeka posiada bazę przeliczalną.

NIE. W tej przestrzeni istnieje nieprzeliczalnie wiele otwartych zbiorów rozłącznych.

Zad. 6. Przestrzeń ilorazowa przestrzeni ośrodkowej jest przestrzenią ośrodkową.

TAK. Dowolny obraz ciągły przestrzeni orodkowej jest przestrzenią orodkową.

Zad. 7. Istnieje ciągłe odwzorowanie produktu zbioru Cantora i zbioru liczb całkowitych $C \times \mathbb{Z} \subset [0,1] \times \mathbb{R}$ z topologią euklidesową na zbiór $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ liczb wymiernych z przedziału $[0,1]$ z topologią euklidesową.

TAK. Przekształcenie jest złożeniem rzutowania $C \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ z dowolną surjekcją $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \cap [0,1]$, która istnieje ponieważ zbiór $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ jest przeliczalny, a jest ciągła ponieważ $\mathbb{Z}$ jest przestrzeniądyskretną.

Zad. 8. Otwarta wstęga Möbiusa posiada podzbiór $S \subset P$, który jest homeomorficzny z okręgiem a jego dopełnienie $P \setminus S$ jest zbiorem spójnym.

TAK. Równik.

Zad. 9. Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną składającą się z co najmniej dwóch punktów. Jesli zbiór X jest przeliczalny, wówczas X nie jest spójna.

TAK. Wybrać różne punkty $x_0, x_1 \in X$ i rozpatrzyć funkcję ciągłą $d(x_0, \cdot) \colon X \to \mathbb{R}$. Jeli X byłaby spójna, to obraz tej funkcji musiałby składać się jedynie z zera, a to niemożliwe, bo $d(x_0, x_1) > 0$.

Zad. 10. Zbiór Cantora zawiera nieprzeliczalny podzbiór dyskretny.

NIE. Zbiór Cantora jest zwartą przestrzenią metryczną, a więc posiada baze przeliczalną. Stąd dowolna jego podprzestrzeń też posiada bazę przeliczalną.

Zad. 11. Niech $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_s)$ będzie prostą z topologią strzałki (baza zbiory postaci $[a, b)$) oraz $A = [0, 1)$. Wtedy przestrzeń $\mathbb{R}/A$ z topologią ilorazową pochodzącą z topologii strzałki na $\mathbb{R}$, jest homeomoroficzna z $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_s)$.

NIE. Strzałka nie ma punktów izolowanych, a w przestrzeni ilorazowej klasa $[0]$ jest zbiorem otwartym, a więc ten punkt jest izolowany.

Zad. 12. Niech $X_i = [0,1]$ zaś $U_i = (0,1)$. Czy podzbiór $\prod_{i=1}^{\infty} U_i \subseteq \prod_{i=1}^{\infty} X_i$ jest otwarty?

NIE. Ten podzbiór nie zawiera żadnego zbioru bazowego postaci $U_1 \times U_2 \times \ldots U_n \times [0,1] \times [0,1] \times \ldots$.

Zad. 13. Ograniczony i domknięty podzbiór płaszczyzny z metryką rzeczną jest zwarty.

NIE. Np. okrąg.

Zad. 14. Przestrzenie podzbiory prostej z topologią euklidesową: $X_1 := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ oraz $X_2 := (0,1) \setminus \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ są homeomorficzne?

TAK. Obie przestrzenie są homeomorficzne z sumą prostą przeliczalnie wielu odcinków otwartych.

Zad. 15. Przestrzeń ściągalna jest spójna.

TAK Jest nawet łukowo spójna, bo ściągnięcie definiuje drogi łączące dowolny punkt z punktem do którego sciąga.

Zad. 16. Przestrzeń ilorazowa przestrzeni ściągalnej jest ściągalna.

NIE. Np. okrąg jest przestrzenią ilorazową odcinka.

Zad. 17. W przestrzeni zupełnej przecięcie przeliczalnej rodziny podzbiorów gęstych jest podzbiorem gęstym.

NIE. Może być nawet puste!

Zad. 18. Istnieje retrakcja domkniętej wstęgi Möbiusa na jej brzeg.

NIE. Niech $\partial M \subset M$ będzie brzegiem wstęgi, a $h\colon S^1 \to \partial M$ standardowym homemomorfizmem. Zuważmy, że dla dowolnego $f\colon M \to S^1$ złożenie $S^1 \xrightarrow{h} M \to S^1$ ma stopień parzysty, bo jest homotopijne ze złożeniem $S^1 \xrightarrow{h} M \xrightarrow{p} R \xrightarrow{f|R} S^1$, gdzie $M \xrightarrow{p} R$ jest rzutowaniem na równik wstęgi, homeomorficzny z S^1. Zachodzi równość: $\deg(fph) = \deg(f|R)\deg(ph) = 2\deg(f|R)$. Zatem identycznoć $\partial M \to \partial M$, nie da się rozszerzyć na M, bo ma stopień 1.

Zad. 19. Przekłuta płaszczyzna rzutowa jest homotopijnie równoważna z okręgiem.

TAK. Jest homeomorficzna z otwartą wstęgą Möbiusa.

Zad. 20. Płaszczyzna rzutowa po usunięciu przeliczalnie wielu punktów jest zbiorem spójnym.

TAK. Niech $q\colon S^2 \to P$ bedzie przekształceniem ilorazowym sklejającym punkty antypodyczne, a $S \subset P$ będzie zbiorem przeliczalnym. Wtedy $q^{-1}(S) \subset S^2$ jest zbiorem przeliczalnym, a więc jego dopełnienie w sferze (= dopełnienie w płaszczyźnie) jest łukowo spójne, stąd jego obraz jest też łukowo spójny.