Topologia I, Egzamin 2013-02-06
Odpowiedzi i rozwiązania

11 lutego 2013

Stwierdź czy następujące zdania są prawdziwe, zakreślając właściwą odpowiedź i skreślając pozostałe: *Punktacja: 1 poprawna odp, -0,2 błędna, 0 nie wiem* [1]

Zad. 1. W przestrzeni Hausdorffa każdy podzbiór złożony ze skończonej liczby punktów jest domknięty.

TAK

Zad. 2. Przestrzeń $\mathbb{R}^3$ z topologią $\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R}^3\} \cup \{U \subset \mathbb{R}^3 : \mathbb{R}^3 \setminus U$ jest zbiorem skończonym lub przeliczalnym$\}$ jest metryzowalna.

NIE

Zad. 3. Niech $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ będą przestrzeniami topologicznymi. Niepuste podzbiory $A \subset X$ i $B \subset Y$ są domknięte wtedy i tylko wtedy gdy $A \times B$ jest domkniętym podzbiorem $(X \times Y, \mathcal{T}_{X \times Y})$.

TAK

Zad. 4. Przestrzeń funkcji ciągłych na odcinku $[0, 1]$ z metryką d_{sup} zawiera zbiór zwarty o niepustym wnętrzu.

NIE

Zad. 5. Przestrzeń $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ z topologią euklidesową jest metryzowalna w sposób zupełny.

TAK

Zad. 6. W dowolnej przestrzeni topologicznej część wspólna dwóch zbiorów otwartych gęstych jest zbiorem gęstym.

TAK

Zad. 7. Niech $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ będą przestrzeniami topologicznymi. Niepuste podzbiory $A \subset X$ i $B \subset Y$ są spójne wtedy i tylko wtedy gdy $A \times B$ jest spójnym podzbiorem $(X \times Y, \mathcal{T}_{X \times Y})$.

TAK

Zad. 8. Niech A, B będą łukowo spójnymi podzbiorami przestrzeni $(X, \mathcal{T}_X)$. Jeżeli $A \cap B \neq \emptyset$, to $A \cap B$ jest zbiorem łukowo spójnym.

NIE

Zad. 9. Retrakt przestrzeni ściągalnej jest przestrzenia ściągalną.

TAK

Zad. 10. Walec $S^1 \times \mathbb{R}$ i wstęga Möbiusa są homotopijnie równoważne.

TAK

[1] Pozostawiona jest jedynie prawidłowa odpowiedź.

Stwierdź czy następujące zdania są prawdziwe i uzasadnij odpowiedź (zakreśl właściwą i skreśl pozostałe): *Punktacja: 1 pkt. poprawna odp, -0,2 błędna, 0 nie wiem, uzasadnienie 0 - 4 pkt.*

Zad. 11. Zbiór liczb niewymiernych $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ z topologią euklidesową posiada bazę przeliczalną.

TAK

Uzasadnienie Przestrzeń $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ posiada bazę przeliczalną (np. odcinki otwarte o końcach wymiernych), a więc dowolna jej podprzestrzeń też posiada bazę przeliczalną.

Zad. 12. Przestrzeń ilorazowa przestrzeni Hausdorffa jest przestrzenią Hausdorffa.

NIE

Uzasadnienie Np. jeśli w odcinku $[0,1]$ z topologią euklidesową utożsamimy do punktu zbiór $[0,1)]$, to w otrzymanej przestrzeni dwupunktowej punkt (klasa równoważności) $[0]$ będzie zbiorem otwartym, a jedynym zbiorem otwartym zawierającym $[1]$ będzie cała przestrzeń ilorazowa tj. zbiór $\{[0],[1]\}$. Innym przykładem jest odcinek z rozdwojonym punktem i wiele, wiele innych.

Zad. 13. Istnieje ciągłe odwzorowanie zbioru Cantora $C \subset [0,1]$ na zbiór $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ liczb wymiernych z przedziału $[0,1]$ z topologią euklidesową.

NIE

Uzasadnienie Nie istnieje, ponieważ obraz przestrzeni zwartej (a zbiór Cantora jest zwarty choćby jako ograniczony i domknięty podzbiór prostej euklidesowej), o ile jest przestrzenią Hausdorffa, to jest przestrzenią zwartą. Punkty wymierne na odcinku $[0,1]$ nie są przestrzenią zwartą (choćby dlatego, że nie są zupełną).

Zad. 14. Otwarty spójny podzbiór płaszczyzny z topologią rzeczną jest łukowo spójny.

TAK

Uzasadnienie Topologia rzeczna posiada bazę złożoną ze zbiorów łukowo spójnych (kule). Niech $U \subset (\mathbb{R}, \mathcal{T}_r)$ będzie zbiorem otwartym oraz $x_0 \in U$. Zbiór $U(x_0)$ składający się z punktów, które można połączyć drogą leżącą w U z punktem x_0 jest zatem otwarty. Jego dopełnienie $U \setminus U(x_0)$ jest także zobiorem otwartym, rozłącznym z $U(x_0)$, a zatem $U(x_0) = U$, a więc U jest łukowo spójny.

Zad. 15. Płaszczyzna rzutowa posiada podzbiór $S \subset P$, który jest homeomorficzny z okręgiem a jego dopełnienie $P \setminus S$ jest zbiorem spójnym.

TAK

Uzasadnienie Wybierzmy jako model płaszczyzny rzutowej dysk D^2 z utożsamionymi antypodycznymi punktami na brzegu. Obraz okręgu $S^1 \subset D^2$ przy przekształceniu ilorazowym $q\colon D^2 \to P$ jest homeomorficzny z okręgiem (ale $q|S^1$ nie jest homeomorfizmem!). Zbiór $q(D^2 \setminus S^1) = P \setminus q(S^1)$ jest spójny, ponieważ kula otwarta $B(0;1) = D^2 \setminus S^1$ jest zbiorem spójnym, a obraz zbioru spójnego jest spójny.

1 Zadania

Zad. 16.

Definicja. Jeżeli A jest niepustym podzbiorem przestrzeni topologicznej $(Y, \mathcal{T}_Y)$, to przez Y/A oznaczamy zbiór klas abstrakcji $Y/\sim_A$ relacji $\sim_A$, gdzie $y_1 \sim_A y_2 \iff y_1 = y_2$ lub $y_1, y_2 \in A$, wyposażony w topologię ilorazową zadaną przez rzutowanie $q\colon Y \to Y/\sim_A$, $q(x) := [x]_{\sim_A}$.

Niech $(X, \mathcal{T}_X)$ i $(Y, \mathcal{T}_Y)$ będą przestrzeniami Hausdorffa.

1) Niech $A \subset Y$ będzie podzbiorem zwartym. Wykaż, że przestrzeń ilorazowa Y/A jest przestrzenią Hausdorffa.

2) Załóżmy, że przestrzenie $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ są zwarte, $x_0 \in X$, zaś $A \subset Y$ jest niepustym podzbiorem domkniętym. Wykaż, że jeśli podprzestrzenie $X \setminus \{x_0\}$ i $Y \setminus A$ są homeomorficzne, to przestrzeń X jest homeomorficzna z przestrzenią ilorazową Y/A.

Rozwiązanie ad 1). Niech $q\colon Y \to Y/A$ będzie odwzorowaniem ilorazowym. Jeśli mamy dwa punkty $y_1, y_2 \notin A$ to wybierzmy ich rozłączne otoczenia $V_1 \ni y_1$, $V_2 \ni y_2$, które są także rozłączne z (domkniętym) zbiorem A. Ich obrazy $q(V_1) \ni [y_1]$, $q(V_2) \ni [y_2]$ są zbiorami otwartymi (bo $q^{-1}q(V_i) = V_i \in \mathcal{T}_Y$)) i rozłącznymi. Załóżmy teraz, że $y \notin A$ i pokażemy jak oddzielić klasę $[y]$ od klasy dowolnego punktu ze zbioru A: $[a] = A$. Dla dowolnego punktu $a \in A$ wybierzmy otwarte, rozłączne zbiory $U_a \ni y$ oraz $V_a \ni a$. Ponieważ A jest podzbiorem zwartym więc z pokrycia otwartego $\{V_a\}_{a\in A}$ można wybrać pokrycie skończone $V_{a_1}, \ldots, V_{a_n}$. Rozpatrzmy zbiory $U := \bigcap_{i=1}^{n} U_{a_i} \ni y$ oraz zbiór $V := \bigcup_{i=1}^{n} V_{a_i} \supset A$. Ich obrazy $q(U) \ni [y]$ oraz $q(V) \ni [a]$ są zbiorami otwartymi (bo ich przeciwobrazy są otwarte), oraz są rozłączne. □

Rozwiązanie ad 2). Niech $h\colon X \setminus \{x_0\} \to Y \setminus A$ będzie homeomorfizmem. Przedłuzymy go do odwzorowania $\bar{h}\colon X \to Y/A$ kładąc $h(x_0) := [a]$, gdzie $a \in A$. Odwzorowania $\bar{h}$ jest oczywiście bijekcją. Ponieważ przestrzeń X jest zwarta, a przestrzeń Y/A jest Hausdorffa (na mocy pkt. 1) więc wystarczy zauważyć, że przekształcenie $\bar{h}$ jest ciągłe (lub że przeprowadza zbiory otwarte na otwarte, czyli $\bar{h}^{-1}$ jest ciągłe), bowiem ciągła bijekcja przestrzeni zwartych jest homeomorfizmem. Jeśli $U \subset X$ oraz $x_0 \notin U$, to oczywiście $h(U) \subset Y/A \setminus \{[a]\} \subset Y/A$ jest zbiorem otwartym, bo h było homeomorfizmem oraz $Y \setminus A \subset Y$ jest zbiorem otwartym. Jeśli $x_0 \in U$, to jego dopełnienie $X \setminus U \in X \setminus \{x_0\}$ jest zbiorem zwartym, a więc $Y/A \setminus \bar{h}(U) = \bar{h}(X \setminus U) = q(h(X \setminus U))$ jest zbiorem zwartym, a więc na mocy pkt. 1, zbiorem domkniętym, co należało wykazać. □

Uwaga. Szczególny przypadek powyższego rozumowania, to sytuacja gdy $X = S^n$ a $Y = D^n$ oraz $A = S^{n-1} \subset D^n$ – p. Zad. przygotowawcze nr 20.

Zad. 17.

1. Wykaż, że w sferze S^2:

   a) dopełnienie dowolnego podzbioru przeliczalnego jest przestrzenią łukowo spójną;

   b) dopełnienie sumy przeliczalnej rodziny zbiorów, z których każdy jest homeomorficzny z okręgiem, jest niepuste.

2. Wykaż, że powyższe stwierdzenia są prawdziwe także dla płaszczyzny rzutowej P.

Rozwiązanie ad 1a). Dopełnienie zbioru przeliczalnego na sferze jest homeomorficzne z dopełnieniem zbioru przeliczalnego na płaszczyźnie, bo sfera po usunięciu jednego punktu jest homeomorficzna z płaszczyzną (Zad. przygotowawcze nr 20). Dla dowolnych dwóch punktów $x, y \in \mathbb{R}^2 \setminus C$ płaszczyzny przekłutej w przeliczalnej liczbie punktów, rozpatrujemy odcinek $[x, y]$ oraz prostą do niego prostopadłą L przechodzącą przez jego środek. Łamane $[x, s] \cup [s, y]$ gdzie $s \in L$ są oczywiście rozłącznymi zbiorami poza końcami x, y, a więc ponieważ jest ich nieprzeliczalnie wiele, któraś z nich musi nie zawierać punktów z C, a więc istnieje $s \in L$ taki, że $[x, s] \cup [s, y] \subset \mathbb{R}^2 \setminus C$, skąd wynika, że dowolne dwa punkty leżą w podzbiorze łukowo spójnym, więc $\mathbb{R}^2 \setminus C$ jest łukowo spójna. □

Rozwiązanie ad 1b). Pokażemy, że dowolny podzbiór w $C \subset S^2$ homeomorficzny z okręgiem (może być bardzo powykrzywianym kołem wielkim!) jest zbiorem domkniętym i brzegowym. Domkniętość wynika stąd, że C jest zwartym podzbiorem przestrzeni Hausdorffa S^2. Pokażemy, że $\mathrm{Int}(C) = \emptyset$. Niech $h\colon C \to S^1$ będzie homeomorfizmem. Jeśli $p \in \mathrm{Int}(C)$ to posiada on dowolnie małe otoczenie $U \ni p$ zawarte w C, które jest homeomorficzne z $\mathbb{R}^2$. Wobec tego $U \setminus \{p\}$ jest zbiorem spójnym. Zatem dowolnie małe otoczenia punktu $h(p) \in S^1$ musiałoby mieć tę własność, co nie jest prawdą.

Sfera jest przestrzenią zwartą, a więc zupełną. Stosując tw. Baire'a otrzymujemy tezę pkt. 2. □

Rozwiązanie ad 2). Oba punkty najprościej wykazać korzystając z modelu płaszczyzny rzutowej jako przestrzeni ilorazowej sfery $q\colon S^2 \to P$, gdzie $q(x) = q(y) \iff x = y \,\text{lub}\, x = -y$. Zauważmy, że q jest odwzorowaniem otwartym, a nawet na każdej otwartej (bez brzegu) półsferze jest homeomorfizmem.

Niech $C \subset P$ będzie podzbiorem przeliczalnym. Wtedy $q^{-1}(C) \subset C$ też jest zbiorem przeliczalnym (każdy punkt z P jest podwojony), a więc $S^2 \setminus q^{-1}(C)$ jest łukowo spójny, a zatem także jego obraz $q(S^2 \setminus q^{-1}(C)) = P \setminus C$ (q jest surjekcją!) jest łukowo spójny.

Podobnie wykazujemy odpowiednik 1b), sprowadzając przypadek przestrzeni rzutowej do sfery. Jeśli $C \subset P$ jest zbiorem homeomorficznym z okręgiem, to $q^{-1}(C) \subset S^2$ jest zbiorem domkniętym. Pokażemy, że musi mieć puste wnętrze. Ponieważ q jest odwzorowaniem otwartym i bijekcją na otwartych półsferach, więc dla dowolnego punktu $p \in q^{-1}(C)$ możemy wybrać otoczenie $U \ni p$ takie, że $q\colon U \cap q^{-1}(C) \to q(U) \cap C$ jest homeomorfizmem, a więc dowolny punkt $q^{-1}(C)$ posiada otocznie homeomorficzne z otoczeniem punktu na okręgu. Dla dowolnej rodziny zbiorów $C_i \subset P$ homeomorficznych z okręgiem mamy: $q(S^2 \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} q^{-1}(C_i)) = P \ \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$, jest więc zbiorem niepustym. □

Uwaga. Punkt 2. można też wykazać inaczej. W 2a) rozpatrując P jako iloraz dysku i sprowadzając w ten sposób do przypadku płaszczyzny. W pkt. 2a) można skorzystać z faktu, że każdy punkt w P ma otoczenie homeomorficzne z kulą w $\mathbb{R}^2$ (Zad. przygotowawcze nr 37) oraz, że P jest homeomoroficzna z podzbiorem domknietym w $\mathbb{R}^4$, a więc jest metryzowalna w sposób zupełny. Ew. skorzystać z modelu dyskowego i sprowadzić do przypadku podbiorów $\mathbb{R}^2$.

Zad. 18. Niech $D^2 := \{z \in \mathbb{C}\colon |z| \leqslant 1\}$ będzie dyskiem. Dla pary różnych punktów $z_1, z_2 \in D^2$, $D(z_1, z_2) := D^2 \setminus \{z_1, z_2\}$ oznacza dysk przekłuty w punktach z_1, z_2.

1. Zbadaj dla jakich par punktów z_1, z_2 i z_1', z_2' przestrzenie $D(z_1, z_2)$ i $D(z_1', z_2')$są homotopijnie równoważne? Wykonaj odpowiednie rysunki.
2. Wykaż, że przestrzeń $D(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ jest homotopijnie równoważna przekłutemu torusowi $T' := (S^1 \times S^1) \setminus \{(1, 1)\}$.
3. Ustal czy przestrzenie $D(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ i $T' := (S^1 \times S^1) \setminus \{(1, 1)\}$ są homeomorficzne.
(*Wsk.* Sposobów jest wiele; jeden z nich korzysta z Zadania 1.)

Rozwiązanie ad 1). Kolejność punktów jest obojętna, więc wystarczy rozpatrzyć następujące przypadki: $|z_1|, |z_2| < 1$, $|z_1| = 1, |z_2| < 1$; $|z_1| = |z_2| = 1$ Zacznijmy od końca.

- $|z_1| = |z_2| = 1$ – wtedy $D(z_1, z_2)$ pozostaje zbiorem wypukłym, a więc ściągalnym.
- $|z_1| = 1, |z_2| < 1$ – rozpatrujemy malutki okrąg o środku w z_2: $S^1(z_2, \epsilon) := \{z \in \mathbb{C}\colon |z - z_2| \leqslant \epsilon\}$ i rzutujemy płaszczyznę przekłutą w z_2, a więc w szczególności $D(z_1, z_2)$ na ten okrąg. Afiniczna homotopia pokazuje, że to jest homotopijna odwrotność włożenia $S^1_\epsilon \subset D(z_1, z_2)$
- $|z_1|, |z_2| < 1$ – zauważmy, że w tym przypadku włożenie $D(z_1, z_2) \subset \mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2\}$ jest homotopijną równoważnością. Odwzorowanie odwrotne $r\colon \mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2\} \to D(z_1, z_2)$ dane jest wzorem $r(z) := \frac{z}{|z|}$ dla $|z| \geqslant 1$ oraz $r(z) := z$ dla $|z| \leqslant 1$. Z kolei płaszczyzna przekłuta w dwóch punktach jest homotopijnie równoważna bukietowi okręgów $S^1 \vee S^1$. (Zad. przygotowawcze nr 34).

□

Rozwiązanie ad 2). Pokażemy, że przekłuty torus jest homotopijnie równoważny bukietowi dwóch okręgów (p. Zad. przygotowawacze nr 39). Spójrzmy na torus jako kwadrat $J^2 := [-1, 1] \times [-1, 1]$ z odpowiednimi utożsamieniami na bokach. Odwzorowanie ilorazowe $q\colon J^2 \to T$, $q(t_1, t_2) := (\exp(\pi i t_1), \exp(\pi i t_2))$ jest różnowartościowe na wnętrzu kwadratu, a więc $q^{-1}(1, 1) = (0, 0)$. Odwzorowanie ilorazowe $q\colon J^2 \to T$ przeprowadza boki kwadratu ∂J^2 na bukiet okręgów $S^1 \vee S^1 = S^1 \times \{1\} \cup \{1\} \times S^1$. Włożenie $\iota\colon S^1 \vee S^1 \subset (S^1 \times S^1) \setminus \{(1, 1)\}$ jest homotopijną równoważnością. Jego homotopijna odwrotność jest dana przez rzutowanie kwadratu z środka na jego brzeg $r\colon J^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \partial J^2$, które definuje odwzorowanie $\bar{r}\colon (J^2 \setminus \{(0, 0)\}) \to (\partial J^2)/\sim$. Oczywiście $\bar{r}\iota = id_{S^1 \vee S^1}$ a homotopia $\iota\bar{r} \sim id_{T'}$ jest dana przez homotopię afiniczną. □

Rozwiązanie ad 3). Skorzystamy z Zad. 1 pkt. 2) zastosowanego do torusa T i punktu $(1, 1)$ oraz dysku D^2 i dwóch punktów wewnętrznych dysku $z_1, z_2 \in D^2$. Gdyby przestrzenie T' i $D(z_1, z_2)$ były homeomorficzne, to istniałby homeomorfizm $h\colon T \to D^2/\{z_1, z_2\}$, co jest niemozliwe ponieważ dowolnie małe otoczenia dowolnego puntu torusa pozostają spójne po wyjęciu jednego punktu, a małe otoczenia punktu $[z_1] = [z_2] \in D^2/\{z_1, z_2\}$ są niespojne po usunięciu tego punktu. □