

1 Zadanie

Pan X postanowił, że każdego dnia będzie pracował lub nie, przestrzegając przy tym zasady, by na żadne siedem kolejnych dni nie przypadło więcej niż cztery dni pracy. Możliwy rozkład pracy pana X w ciągu n kolejnych dni możemy przedstawić jako n -bitowe słowo, gdzie 1 odpowiada dniowi pracy, a 0 odpoczynku. Dowieść, że zbiór wszystkich tak otrzymanych słów jest językiem regularnym (nad alfabetem $\{0,1\}$). Znaleźć automat minimalny.

Ogólniej możemy zażądać, aby na każde, kolejne, n dni nie przypadło więcej niż m dni pracy.

2 Pseudo-matematyczny zapis

Inaczej pisząc mamy dowieść, iż język:

$$L = \{w \in \{0,1\}^* : \forall v \preceq w, |v| \leq n \Rightarrow \#_1(v) \leq m\}$$

jest regularny.

(gdzie $v \preceq w$ oznacza, że v jest podsłowem w)

3 Automat

Automat (dla ustalonych n i m) rozpoznający ten język jest zdefiniowany następująco:

$$A = \{S, \{0,1\}, \delta, q_0, F\}, \text{ gdzie :}$$

$$S = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \{0..n-m\}, x_i \leq x_j, \text{ dla } i \leq j\} \cup \{\emptyset\}$$

$$q_0 = \{0, \dots, 0\}$$

$$F = \{x \in S : x \neq \emptyset\}$$

$$\delta(s)(c) = \begin{cases} \emptyset & \text{, jeżeli } s = \emptyset \\ (x_1 - 1, \dots, x_n - 1) & \text{, jeżeli } c = 0 \\ (x_2, \dots, n - m) & \text{, jeżeli } x_1 = 0 \text{ oraz } c = 1 \\ \emptyset & \text{, jeżeli } x_1 \neq 0 \text{ oraz } c = 1 \end{cases}$$

(przyjmujemy, że $0 - 1 := 0$)

Jak każdy jest w stanie policzyć oznacza to że stanów w naszym automacie mamy $\binom{n}{m}$, nie licząc śmietnika, czyli tyle ile jest niemalejących m -elementowych ciągów o wartościach naturalnych niewiększych niż $n - m$

4 Dlaczego to działa

Aby wykazać poprawność tego automatu wystarczy wykazać, że: Pan X, może całkowicie zapomnieć o dniu pracy jeżeli miał po nim conajmniej $n - m$ dni odpoczynku.

Nawet jeśli te dni były także czasem odpoczynku dla innych dni w których X pracował.

Innymi słowy o 1 w ciągu możemy zapomnieć wtedy i tylko wtedy gdy nastąpi po niej $n - m$ 0.

5 Rysunek

Niestety dla $n = 7$ i $m = 4$ mamy, nielicząc śmietnika, 35 stanów co powoduje że obrazek jest nieczytelny.

Dlatego też zamieszczony zostaje automat $n = 5$ $m = 2$, i dla czytelności pomijam stan śmietnik (\emptyset), oraz wszelkie "strzałki" doń idące.

Dodatkowo, jeśli na początku ciągu występują zera to są pomijane.

