JAO: Języki, automaty i obliczenia, kolokwium 7 Maja 2014

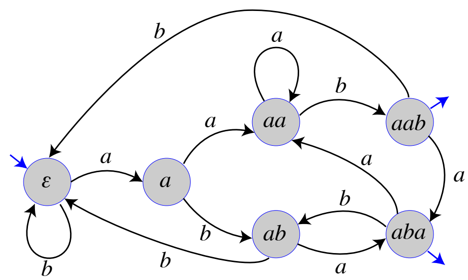
Przykładowe rozwiązania

Zadanie 1. *Narysuj minimalny automat deterministyczny akceptujący język*

$$(a \cup b)^* \, a \, (ab \cup ba).$$

Zaznacz stan początkowy i stany akceptujące.

Rozwiązanie Poniższy automat otrzymujemy jako iloraz A^* przez kongruencję wyznaczoną przez powyższy język. Jest to więc automat minimalny.



Zadanie 2. *Czy istnieje język regularny nad alfabetem $\{a, b, c\}$, taki że jego liczba słów długości n wynosi dokładnie n^2 dla każdego $n > 0$?*

Rozwiązanie Tak. Na przykład język $a^*b \ a^*b \ a^* + a^*c \ a^*c \ a^* + a^*b \ a^*$ – liczba słów długości n w tym języku wynosi $\binom{n}{2} + \binom{n}{2} + n = n^2$.

Inny przykład: język $a^*b^+a^+ + b^*a^+b^+ + a^*c^+$.

Zadanie 3. *Czy język*

$$\{ \, v\#w \ : v, w \in (\, a \, \cup \, b \,)^+, \ v \text{ nie jest sufiksem } w \, \}$$

jest bezkontekstowy? Jeśli tak to podać odpowiednią gramatykę bezkontekstową.

Rozwiązanie Jest bezkontekstowy. Do skonstruowania gramatyki użyjemy następującego faktu, którego dowód jest natychmiastowy.

Fakt. *Słowo v nie jest sufiksem słowa w wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi przynajmniej jedna z następujących możliwości:*

- *Słowo $v\#w$ da się sfaktoryzować jako $v_1av_2\#w_1bw_2$, gdzie $|v_2| = |w_2|$,*
- *Słowo $v\#w$ da się sfaktoryzować jako $v_1bv_2\#w_1aw_2$, gdzie $|v_2| = |w_2|$,*
- $|v| > |w|$.

Gramatyka generująca zadany język ma więc postać:

$S \to XaB \mid XbA \mid R$	symbol startowy
$B \to CBC \mid \#Xb$	generuje $\{v_2\#w_1bw_2 : \; \lvert v_2\rvert = \lvert w_2\rvert\}$
$A \to CAC \mid \#Xa$	generuje $\{v_2\#w_1aw_2 : \; \lvert v_2\rvert = \lvert w_2\rvert\}$
$R \to CRC \mid CR \mid C\#$	generuje $\{v\#w : \; \lvert v\rvert > \lvert w\rvert\}$
$X \to \varepsilon \mid CX$	generuje wszystkie słowa
$C \to a \mid b$	generuje literę a lub b

Z Faktu wynika, że ta gramatyka generuje język z treści zadania.

Zadanie 4. *Czy następujący język*

$$L \; = \; \{\, a^i b^j c^k \; : \; (\, j - i > 2014 \,) \;\&\; (\, k - j > 2014 \,)\,\}.$$

jest bezkontekstowy?

Rozwiązanie Nie jest. Pokażemy dwa dowody. Pierwszy jest prostszy, ale używa lematu Ogdena. Drugi jest trochę bardziej skomplikowany, ale używa prostszego lematu o pompowaniu.

Lemat Ogdena. *Niech L będzie językiem bezkontekstowym. Wówczas istnieje stała N o następującej własności. Dla dowolnego słowa $w \in L$ z wyróżnionymi przynajmniej N pozycjami, istnieje faktoryzacja $w = u\alpha v\beta u'$ taka, że:*

Przynajmniej jedno ze słów α,β zawiera wyróżnioną pozycję, Słowo $\alpha v\beta$ zawiera najwyżej N wyróżnionych pozycji, Słowo $u\alpha^k v\beta^k u'$ należy do L dla $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Dowód 1. Przypuśćmy, że L jest bezkontekstowy. Niech N będzie stałą z lematu Ogdena. Rozważmy słowo

$$w = \underline{a}^N b^{N+2015} c^{N+4030},$$

w którym wyróżnionych jest N pierwszych pozycji. Słowo to należy do języka L. Niech $u\alpha v\beta u'$ będzie jego faktoryzacją, o jakiej mowa w lemacie Ogdena. A zatem, musi być tak, że α lub β zawierają przynajmniej jedną literę a.

Gdyby któreś ze słów α, β zawierało przynajmniej dwie różne litery (a oraz b, lub b oraz c, itd.), to pompując dwukrotnie, otrzymalibyśmy słowo które nie jest postaci $a^*b^*c^*$, więc nie należy do języka L. A zatem, słowa α i β składają się z samych liter a, albo z samych liter b, albo z samych litery c. Zatem, któraś z liter b, c nie pojawia się ani w słowie α, ani w słowie β.

Rozważmy słowo $w' = u\alpha^{4030} v\beta^{4030} u'$. To słowo posiada przynajmiej $N + 4030$ liter a. Jednak albo liczba liter b, albo liter c jest taka sama, jak w słowie w, czyli nie większa niż 4030. Tak więc, słowo w' nie należy do języka L. Jest to sprzeczność z tezą lematu Ogdena. A zatem język L nie jest bezkontekstowy.

Dowód 2. Przypuśćmy, że L jest bezkontekstowy. Niech N będzie stałą z lematu o pompowaniu dla języków bezkontekstowych. Rozważmy słowo
$w = a^N b^{N+2015} c^{N+4030}$.

Słowo to należy do języka L. Niech $u\alpha v\beta u'$ będzie jego faktoryzacją, o jakiej mowa w lemacie o pompowaniu.

Gdyby któreś ze słów α, β zawierało przynajmniej dwie różne litery (a oraz b, lub b oraz c, itd.), to pompując dwukrotnie, otrzymalibyśmy słowo które nie jest postaci $a^*b^*c^*$, więc nie należy do języka L. A zatem, słowa α i β składają się z samych liter a, albo z samych liter b, albo z samych litery c. Zatem, któraś z liter a, b, c nie pojawia się ani w słowie α, ani w słowie β.

Załóżmy, że litera a nie pojawia się ani w słowie α, ani w słowie β. Wtedy, rozważmy słowo $u\alpha^0 v\beta^0 u' = uvu'$. To słowo ma mniej liter b lub c niż słowo w, czyli albo ma najwyżej $N + 2014$ liter b, albo ma $N + 2029$ liter c; w obu przypadkach, nie należy do języka L, a powinno na mocy lematu o pompowaniu. A zatem, ten przypadek jest niemożliwy, czyli litera a musi się pojawić w słowie α lub w słowie β. Czyli któraś z liter a, b nie pojawia się ani w słowie α, ani w słowie β.

Rozważmy słowo $w' = u\alpha^{4030} v\beta^{4030} w$. To słowo ma taką samą liczbę liter b co w, albo taką samą liczbę liter c co w, a ma przynajmniej przynajmiej $N + 4030$ liter a. Jednak albo liczba liter b, albo liter c jest taka sama, jak w słowie w, czyli nie większa niż 4030. Tak więc, słowo w' nie należy do języka L. Jest to sprzeczność z tezą lematu o pompowaniu. A zatem język L nie jest bezkontekstowy.