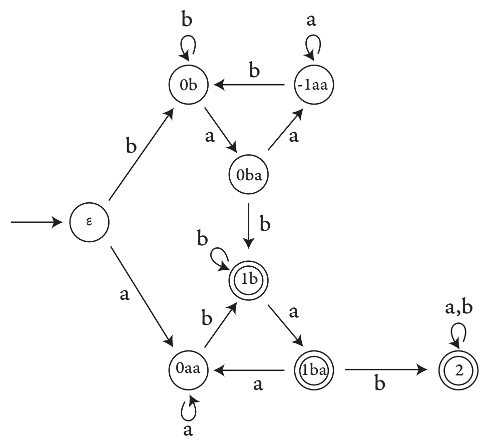
Zadanie 1. (6 pkt) Napisać lub narysować minimalny automat deterministyczny dla języka

$$\{w \in \{a,b\}^* : \#(ab,w) \geqslant \#(baa,w) + 1\}.$$

Rozwiązanie.



Minimalność uzasadniamy tabelką. Komórka w wierszu q i kolumnie w mówi czy automat akceptuje, jeśli zaczynając w stanie q wczyta słowo w. Niektóre komórki są niewypełnione, jeśli ich zawartość nie jest potrzebna dla uzasadnienia minimalności. Automat jest minimalny, ponieważ dla każdych dwówch stanów (wierszy) p, q istnieje słowo (kolumna) w takie, że komórki (p, w) i (q, w) są wypełnione i mają inną zawartość.

	ϵ	a	aa	b	aab	ab
2	$\in L$	$\in L$	$\in L$			
$1b$	$\in L$	$\in L$	$\notin L$			
$1ba$	$\in L$	$\notin L$				
ϵ	$\notin L$			$\notin L$	$\in L$	
$0b$	$\notin L$			$\notin L$	$\notin L$	$\in L$
$-1aa$	$\notin L$			$\notin L$	$\notin L$	$\notin L$
$0ba$	$\notin L$			$\in L$	$\notin L$	
$0aa$	$\notin L$			$\in L$	$\in L$	

Zadanie 2. (6 pkt) Napisać gramatykę bezkontekstową dla języka

$$\{w \in \{a,b,c\}^* \quad : \quad \#(a,w) \equiv 0 \text{ mod } 3 \quad \text{i} \quad \#(b,w) = \#(c,w)\}.$$

Rozwiązanie. W poniższej gramatyce startowym symbolem jest X_0.

$$\begin{array}{lcll} X_0 & \to & \epsilon & \\ X_i & \to & X_j X_k & \text{o ile } i \equiv j + k \text{ mod } 3 \\ X_i & \to & bX_ic \quad | \quad cX_ib & \\ X_i & \to & X_ja \quad | \quad aX_j & \text{o ile } i \equiv j + 1 \text{ mod } 3 \end{array}$$

Poprawności rozwiązania dowodzi następujący niezmiennik. Dla każdego $i \in \{0,1,2\}$ oraz słowa $w \in \{a,b,c\}^*$ zachodzi równoważność: słowo w można wygenerować z nieterminala X_i wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\#(a,w) \equiv i \text{ mod } 3 \quad \text{i} \quad \#(b,w) = \#(c,w).$$

Implikację "wtedy" dowodzi się przez indukcję po długości wyprowadznia. Implikację "tylko wtedy" dowodzi się przez indukcję po długości słowa w.

Zadanie 3. Dla języka $L \subseteq A^*$ zdefiniujmy język

$$L' = \{a^n : n \in \mathbb{N} \ \wedge \ A^n \subseteq L\}.$$

a) (6 pkt) Pokazać, że jeśli L jest regularny, to L' też.

b) (6 pkt *) Czy jeśli L jest bezkontekstowy, to L' też?

Rozwiązanie. W punkcie a) odpowiedź brzmi tak. Język $L' \subseteq a^*$ jest otrzymany z języka $L \subseteq A^*$ przez złożenie trzech operacji, które zachowują regularność: 1) dopełnienia względem A^*; 2) zamienienie wszystkich liter na a; 3) dopełnienia względem a^*. Pisząc symbolami,

$$L' = a^* - \pi(A^* - L),$$

gdzie π oznacza operację, która zamienia we wszystkich słowach języka wszystkie litery na a. Operacja dopełnienia zachowuje regularność. Podobnie z operacją π, wystarczy w wyrażeniu regularnym zamienić wszystkie litery na a.

W punkcie b) odpowiedź brzmi nie. Oto przykład języka bezkontekstowego $L \subseteq A^*$, takiego, że L' nie jest językiem bezkontekstowym. Niech $A = \{a, b\}$. Rozważmy język

$$K = \{(a^i b)^j : i, j \in \{2, 3, \ldots\}\}.$$

Liczba n jest długością słowa z K wtedy i tylko wtedy gdy n nie jest pierwsza. Rozważmy $L = A^* - K$. Język L zawiera wszystkie słowa długości n wtedy i tylko wtedy gdy język K nie zawiera żadnego słowa długości n, a więc $A^n \subseteq L$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy n jest liczbą pierwszą. A więc L', jako ciągi liter a długości pierwszej, nie jest językiem bezkontekstowym.

Pozostaje pokazać, że L jest bezkontekstowy. Poniżej napisana jest gramatyka generująca L, która dla skrócenia zapisu korzysta z wyrażeń regularnych w prawych stronach reguł.

$$\begin{array}{lcl}
S & \rightarrow & \epsilon | a^* | b | A^* bb A^* | (A^* b + \epsilon) Y (b A^* + \epsilon) \\
X & \rightarrow & a^+ Y | Y a^+ \\
Y & \rightarrow & b(a^* b)^* | a Y a
\end{array}$$