Zadania ze Wstępu do Procesów Stochastycznych - 1

W zadaniach poniżej $(N_t)_{t\geqslant 0}$ oznacza proces Poissona z parametrem (intensywnością) λ.

1. Obliczyć $\mathbb{P}(N_1 = 1,\ N_2 = N_3 = 3)$ i $\mathbb{P}(N_1 < N_2 < N_5)$.

2. Udowodnić, że z prawdopodobieństwem 1 trajektorie procesu Poissona są niemalejące, przyjmują wartości całkowite nieujemne, mają wszystkie skoki równe 1 oraz dążą do nieskończoności.

3. Wykazać, że moment pierwszego skoku w procesie Poissona
$$\tau_1 := \inf\{t\colon\ N_t > 0\}$$
jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym z parametrem λ.

4. Niech
$$\tau_k := \inf\{t\colon\ N_t = k\} \tag{1}$$
będzie momentem k-tego skoku w procesie Poissona. Wykazać, że odstępy między skokami
$$\tau_1, \tau_2 - \tau_1, \tau_3 - \tau_2, \ldots$$
są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym z parametrem λ.

5. Udowodnić, że $\lim_{t\to\infty} \frac{N_t}{t} = \lambda$ p.n.

6. Niech $N_t^{(1)}$ i $N_t^{(2)}$ będą niezależnymi procesami Poissona z parametrami odpowiednio λ_1 i λ_2. Wykazać, że $N_t^{(1)} + N_t^{(2)}$ jest procesem Poissona.

7. Niech $T > 0$. Wykazać, że $(N_{t+T} - N_t)_{t\geqslant 0}$ jest procesem Poissona z parametrem λ.

8. Niech τ_k będzie zdefiniowane wzorem (1) Oblicz
i) $\mathbb{E}(N_5|N_3 = 4)$,
ii) $\mathbb{E}(N_3|N_5 = 4)$,
iii) $\mathbb{E}\tau_6$,
iv) $\mathbb{E}(\tau_6|N_3 = 4)$.

9. Niech τ_k będzie zdefiniowane wzorem (1) oraz $t > 0$. Znajdź
i) warunkowy rozkład zmiennej τ_1 pod warunkiem $N_t = 1$,
ii) warunkowy rozkład wektora (τ_1, τ_2) pod warunkiem $N_t = 2$,
iii) warunkowy rozkład wektora $(\tau_1, \ldots, \tau_k)$ pod warunkiem $N_t = k$.

10. Proces N_t mierzący liczbę zamówień w pewnym sklepie internetowym do chwili t ma rozkład Poissona z parametrem λ. Załóżmy, że każdy z zamawiających z prawdopodobieństwem p płaci z góry, a z prawdopodobieństwem $1 - p$ przy odbiorze towaru

(i nie ma zależności między sposobami płatności różnych klientów). Niech $N_t^{(1)}$ (odp. $N_t^{(2)}$) oznacza liczbę zamówień do chwili t opłaconych z góry (odp. przy odbiorze towaru). Wykaż, że $N_t^{(1)}$ i $N_t^{(2)}$ są niezależnymi procesami Poissona z parametrami odpowiednio $p\lambda$ i $(1-p)\lambda$.

11. Niech $T > 0$, θ ma rozkład Poissona z parametrem λ oraz $\xi_1, \xi_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na $[0, T]$, niezależnymi od θ. Wykaż, że proces $(X_t)_{t\in[0,T]}$ zadany wzorem

$$X_t := \sum_{j=1}^{\theta} \mathbf{1}_{[0,t]}(\xi_j)$$

jest procesem Poissona z parametrem λ.

Zadania ze Wstępu do Procesów Stochastycznych - 2

W zadaniach poniżej i w kolejnych seriach $(W_t)_{t\geqslant 0}$ oznacza proces Wienera.

1. Znajdź rozkład zmiennej $5W_1 - W_3 + W_7$.

2. Dla jakich parametrów a i b, zmienne $aW_1 - W_2$ oraz $W_3 + bW_5$ są niezależne?

3. Znajdź rozkład wektora losowego $(W_{t_1}, W_{t_2}, \ldots, W_{t_n})$ dla $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$.

4. Oblicz $\mathbb{E}(W_5^2|W_2)$ oraz $\mathbb{E}(W_2^2|W_5)$.

5. Udowodnij, że następujące procesy też są procesami Wienera:
   a) $X_t = -W_t$ (odbicie),
   b) $Y_t = c^{-1/2}W_{ct}, c > 0$ (przeskalowanie czasu),
   c) $Z_t = tW_{1/t}$ dla $t > 0$ oraz $Z_0 = 0$ (inwersja czasu),
   d) $U_t = W_{T+t} - W_T, T \geqslant 0$,
   e) $V_t = W_t$ dla $t \leqslant T$, $V_t = 2W_T - W_t$ dla $t > T$, gdzie $T \geqslant 0$.

6. Wykaż, że proces
$$B_t := (1+t)W_{t/(1+t)} - tW_1 \quad t \in [0, \infty)$$
jest procesem Wienera (zauważ, że definicja B_t zależy tylko od $(W_t)_{t\in[0,1]}$).

7. Udowodnij, że $\lim_{t\to\infty} \frac{W_t}{t} = 0$ p.n..

8. Niech $\pi_n = \{t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \ldots, t_{k_n}^{(n)}\}$, gdzie $a = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \ldots < t_{k_n}^{(n)} = b$ będzie ciągiem podziałów odcinka $[a, b]$ oraz $\|\pi_n\| := \max_k |t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}|$ oznacza średnicę π_n. Udowodnij, że
$$S_n := \sum_{k=1}^{k_n} |W_{t_k^{(n)}} - W_{t_{k-1}^{(n)}}|^2 \to b - a \ \text{ w } L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \text{ przy } n \to \infty,$$
jeśli $\|\pi_n\| \to 0$ oraz $S_n \to b - a$ p.n., jeśli $\sum_n \|\pi_n\| < \infty$.

9. Udowodnij, że prawie wszystkie trajektorie procesu Wienera mają nieskończone wahanie na każdym przedziale.

Zadania ze Wstępu do Procesów Stochastycznych - 3

1. Udowodnij, że jeśli zbiór $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$, to istnieje zbiór przeliczalny $T_0 \subset T$ taki, że jeśli $x, y \in \mathbb{R}^T$ oraz $x(t) = y(t)$ dla $t \in T_0$ to $x \in A \Leftrightarrow y \in A$.

2. Niech $T = [a, b]$ oraz $a < t_0 < b$. Wykaż, że następujące zbiory nie należą do $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$:
   i) $A_1 = \{x \in \mathbb{R}^T\colon \sup_{t\in[a,b]} |x_t| \leqslant 1\}$;
   ii) $A_2 = \{x \in \mathbb{R}^T\colon t \to x_t$ ciągłe na [a,b] $\}$;
   iii) $A_3 = \{x \in \mathbb{R}^T\colon \lim_{t\to t_0} x_t = 0\}$:
   iv) $A_4 = \{x \in \mathbb{R}^T\colon t \to x_t$ ciągłe w $t_0\}$.
   Wykaż mierzalność tych zbiorów przy założeniu ciągłości (prawostronnej ciągłości) trajektorii, tzn. wykaż, że wszystkie te zbiory po przecięciu z $C(T)$ ($RC(T)$ odp.) należą do $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T) \cap C(T)$ ($\mathcal{B}(\mathbb{R}^T) \cap RC(T)$ odp.).

3. Niech $T = [a, b]$. Udowodnij, że $\mathcal{F} = \{A \cap C(T)\colon A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^T)\}$ jest σ-ciałem zbiorów borelowskich (w metryce supremum) na $C(T)$.

4. Wykaż, że istnieje proces $(X_t)_{t\geqslant 0}$ o przyrostach niezależnych, startujący z 0 taki, że $X_t - X_s$ ma rozkład Cauchy'ego z parametrem $t - s$ (proces taki nazywamy procesem Cauchy'ego, bądź procesem 1-stabilnym).

Zadania ze Wstępu do Procesów Stochastycznych - 4

1. Proces X jest modyfikacją procesu Wienera. Które z następujących własności są spełnione dla procesu X:
   a) niezależność przyrostów,
   b) stacjonarność przyrostów,
   c) ciągłość trajektorii,
   d) $\lim_{t\to\infty} \frac{X_t}{t} = 0$ p.n.
   e) $\lim_{t\to\infty} \frac{X_t}{t} = 0$ według prawdopodobieństwa?

2. Proces Y jest modyfikacją procesu Poissona z parametrem λ. Czy wynika stąd, że
   a) $\forall_{t\geqslant 0}\ \mathbb{P}(Y_t \in \mathbb{Z}) = 1$,
   b) $\mathbb{P}(\forall_{t\geqslant 0}\ Y_t \in \mathbb{Z}) = 1$,
   c) Y ma z prawdopodobieństwe 1 prawostronnie ciągłe trajektorie,
   d) $\lim_{t\to\infty} \frac{Y_t}{t} = \lambda$ p.n.
   e) $\lim_{t\to\infty} \frac{Y_t}{t} = \lambda$ według prawdopodobieństwa?

3. Rozpatrzmy następujące 3 własności procesów:
   a) ciągłość trajektorii;
   b) stochastyczną ciągłość (tzn. $X_t \xrightarrow{\mathbb{P}} X_s$ gdy $t \to s$);
   c) ciągłość wg p-tego momentu (tzn. $\mathbb{E}|X_t - X_s|^p \to 0$ gdy $t \to s$).
   Jakie implikacje zachodzą między powyższymi własnościami?

4. Wykaż, że trajektorie procesu Wienera z prawdopodobieństwem 1 nie są lokalnie 1/2-hölderowskie.

5. Wykaż, że trajektorie procesu Wienera z prawdopodobieństwem 1 nie są jednostajnie ciągłe na $[0, \infty)$.

Zadania ze Wstępu do Procesów Stochastycznych - 5

1. Które z następujących procesów są gaussowskie?:
   a) W_{3t}, b) W_t^2, c) $W_{t^2} + 2t^2$, d) $3W_{2t} - 2W_2$, e) $W_{2t}\mathbf{1}_{W_t \neq 1}$, f) $W_t W_1$?

2. Policz funkcję kowariancji mostu Browna $W_t - tW_1$.

3. Wykaż, że proces gaussowski ma przyrosty niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy jego funkcja kowariancji spełnia $K(t,u) = K(s,u)$ dla $t, s \geqslant u$ (czyli $K(s,t) = \varphi(t \wedge s)$ dla pewnej funkcji φ).

4. Wykaż, że proces gaussowski o funkcji średniej $m(t) = EX_t$ i funkcji kowariancji $K(s,t) = \mathrm{Cov}(X_s, X_t)$ jest stacjonarny wtedy i tylko wtedy, gdy m jest stała oraz $K(s+h, t+h) = K(s,t)$ dla wszystkich t, s, h (czyli $K(s,t) = \varphi(|t-s|)$ dla pewnej funkcji φ).

5. Wykaż, że istnieje proces gaussowski na $[0,\infty)$ o funkcji średniej $m(t) = \cos t$ i funkcji kowariancji
$$K(s,t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } \ t = s \\ \frac{\sin(|t-s|)}{|t-s|} & \text{dla } \ t \neq s. \end{cases}$$
   Czy proces ten ma modyfikację ciągłą? Co można powiedzieć o hölderowskości jej trajektorii?

6. Wykaż, że trajektorie ułamkowego ruchu Browna z parametrem H są z prawdopodobieństwem 1 lokalnie Hölderowskie z wykładnikiem $H - \varepsilon$ dla dowolnego $\varepsilon > 0$.

7. Pokaż, że jeśli $X_\lambda \sim \mathrm{Poiss}(\lambda)$ i $\lambda \leqslant 1$ to dla dowolnego $p > 0$, $\mathbb{E}|X_\lambda|^p \leqslant C_p\lambda$, gdzie $C_p = \mathbb{E}|X_1|^p < \infty$. Wywnioskuj stąd, że w twierdzeniu o ciągłej modyfikacji założenie $\beta > 0$ jest istotne.

8. Wykaż, że jeżeli proces gaussowski na $[0,\infty)$ jest samopodobny stopnia H i ma stacjonarne przyrosty, to ma funkcję kowariancji postaci $K(s,t) = C(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H})$, gdzie $C \geqslant 0$ jest stałą. Co można powiedzieć o parametrze H?

Zadania ze Wstępu do Procesów Stochastycznych - 6

1. Załóżmy, że T jest przedziałem i określmy:

$$\mathcal{F}_{t+} := \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s, \quad \mathcal{F}_{t-} := \sigma\Big(\bigcup_{s<t} \mathcal{F}_s\Big).$$

a) Wykaż, że filtracja $\mathcal{F}_{t+}$ jest prawostronnie ciągła, tzn. $\mathcal{F}_{t++} = \mathcal{F}_{t+}$.
b) Udowodnij, że jeśli $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^X$ jest filtracją generowaną przez proces X o lewostronnie ciągłych trajektoriach, to $\mathcal{F}_{t-} = \mathcal{F}_t$.
c) Niech $T = [0,\infty), A \in \mathcal{F}$ oraz $X_t = (t-1)^+ I_A$. Znajdź $\mathcal{F}_t^X$.
d) Dla X jak w punkcie c) określmy $\tau := \inf\{t\colon X_t > 0\}$. Wykaż, że τ nie jest momentem zatrzymania względem $\mathcal{F}_t^X$ ale jest momentem zatrzymania względem $\mathcal{F}_{t+}^X$.

2. Załóżmy, że T jest przedziałem. Wykaż, że:
a) jeśli τ jest momentem zatrzymania, to $\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t$ dla wszystkich t
b) jeśli $\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t$ dla wszystkich t, to τ jest momentem zatrzymania względem $\mathcal{F}_{t+}$.

3. Niech $T = [0,\infty)$, a τ będzie momentem zatrzymania, które ze zmiennych τ^2, $\tau + 1$, $(\tau - 1)_+$ muszą być momentami zatrzymania?

4. Niech $T = [0,\infty)$, a $(X_t)_{t\in T}$ procesem $(\mathcal{F}_t)$-adaptowalnym, o ciągłych trajektoriach. Wykaż, że dla A otwartego $\tau_A := \inf\{t\colon X_t \in A\}$ jest momentem zatrzymania względem $\mathcal{F}_{t+}$.

5. Wykaż, że jeśli proces X_t ma niezależne przyrosty i prawostronnie ciągłe trajektorie, to dla $s < t$ zmienna $X_t - X_s$ jest niezależna od $\mathcal{F}_{s+}^X$.

6. Wykaż, że jeśli τ i σ są momentami zatrzymania. Wykaż, że
a) $\tau \wedge \sigma$ jest momentem zatrzymania oraz $\mathcal{F}_{\tau\wedge\sigma} = \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma$,
b) zdarzenia $\{\tau < \sigma\}$, $\{\tau = \sigma\}$ i $\{\tau \leqslant \sigma\}$ należą do $\mathcal{F}_\tau$, $\mathcal{F}_\sigma$ i $\mathcal{F}_{\tau\wedge\sigma}$.

7. Wykaż, że jeśli τ jest momentem zatrzymania, to proces $X_t := I_{[0,\tau)}(t)$ jest progresywnie mierzalny.

8. Niech τ będzie momentem zatrzymania względem $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$, a (X_t) będzie procesem $\mathcal{F}_t$-adaptowalnym. Udowodnij, że jeśli τ przyjmuje przeliczalnie wiele wartości, to X_τ jest $\mathcal{F}_\tau$ mierzalny na zbiorze $\tau < \infty$.

9. Wykaż, że jeśli σ jest momentem zatrzymania, $\tau \geqslant \sigma$, τ ma wartości w $T \cup \{\infty\}$ oraz jest $\mathcal{F}_\sigma$-mierzalny, to τ jest momentem zatrzymania.

Zadania ze Wstępu do Procesów Stochastycznych - 7

1. Załóżmy, że N_t jest procesem Poissona z intensywnościa λ Wykaż, że $(N_t - \lambda t)_{t\geqslant 0}$ oraz $((N_t - \lambda t)^2 - \lambda t)_{t\geqslant 0}$ są martyngałami względem filtracji $(\mathcal{F}_t^N)_{t\geqslant 0}$.

2. i) Czy istnieje wielomian trzeciego stopnia p taki, że $p(W_t)$ jest martyngałem względem filtracji generowanej przez proces Wienera?
ii) Wskaż rodzinę wielomianów trzeciego stopnia $(p_t)_{t\geqslant 0}$ taką, że $p_t(W_t)$ jest martyngałem względem filtracji generowanej przez proces Wienera.

3. Wykaż, że $(\exp(\lambda W_t - \frac{\lambda^2 t}{2}), \mathcal{F}_t^W)_{t\geqslant 0}$ jest martyngałem dla dowolnego $\lambda \in \mathbb{R}$.

4. Niech W_t będzie n-wymiarowym procesem Wienera (tzn. $W = (W^{(1)}, W^{(2)}, \ldots, W^{(n)})$, gdzie $W^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots, n$ są niezależnymi procesami Wienera), zaś f funkcją harmoniczną na $\mathbb{R}^n$ taką, że $\mathbb{E}|f(W_t)| < \infty$ dla wszystkich t. Wykaż, że $(f(W_t), \mathcal{F}_t^W)_{t\geqslant 0}$ jest martyngałem.

5. Niech W_t będzie jednowymiarowym procesem Wienera oraz
$$\tau_a := \inf\{t > 0 \colon W_t = a\}, \ \tilde{\tau}_a := \inf\{t > 0 \colon |W_t| = a\}.$$
Rozpatrując martyngały W_t i $W_t^2 - t$ wykaż, że
a) $\tau_a \wedge \tau_{-b} < \infty$ p.n. dla wszystkich $a, b > 0$,
b) $\mathbb{P}(\tau_a < \tau_{-b}) = \frac{b}{a+b}$ dla $a, b > 0$,
c) $\tau_a < \infty$ p.n. dla wszystkich $a \in \mathbb{R}$,
d) $\mathbb{E}\tilde{\tau}_a = a^2$ dla $a \geqslant 0$,
e) $\mathbb{E}\tau_a \wedge \tau_{-b} = ab$ dla $a, b > 0$,
f) $\mathbb{E}\tau_a = \infty$ dla wszystkich $a \neq 0$.

6. Rozpatrując martyngały $M_t^\lambda := \exp(\lambda W_t - \lambda^2 t/2)$ oraz $N_t^\lambda := (M_t^\lambda + M_t^{-\lambda})/2$ wykaż, że przy oznaczeniach poprzedniego zadania, dla wszystkich $a, \lambda \geqslant 0$,
a) $\mathbb{E}e^{-\lambda\tau_a} = e^{-a\sqrt{2\lambda}}$,
b) $\mathbb{E}e^{-\lambda\tilde{\tau}_a} = (\cosh(a\sqrt{2\lambda}))^{-1}$.

Zadania ze Wstępu do Procesów Stochastycznych - 8

1. Niech τ będzie momentem zatrzymania względem $\mathcal{F}_t^W$.
   a) Wykaż, że $(W_{\tau\wedge n}, \mathcal{F}_{\tau\wedge n})_{n=1}^{\infty}$ jest martyngałem.
   b) Udowodnij, że jeśli $\mathbb{E}\tau < \infty$, to $\mathbb{E}\sup_n W_{\tau\wedge n}^2 < \infty$.
   c) Wykaż, że jeśli $\mathbb{E}\tau < \infty$, to $\mathbb{E}W_\tau^2 = \mathbb{E}\tau$ i $\mathbb{E}W_\tau = 0$.

2. (Prawo iterowanego logarytmu dla procesu Wienera) Wykaż, że
   a) $\limsup_{t\to\infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t\ln\ln t}} = 1$ p.n.
   b) $\liminf_{t\to\infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t\ln\ln t}} = -1$ p.n.

   Wskazówki:
   i) Niech $C > 1$ oraz $u > C^{1/2}$. Wykaż, że
   $$\sum_n \mathbb{P}\Big(\sup_{C^n\leqslant t\leqslant C^{n+1}} W_t \geqslant u\sqrt{2C^n\ln\ln C^n}\Big) < \infty$$
   i wywnioskuj stąd, że $\limsup_{t\to\infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t\ln\ln t}} \leqslant u$ p.n.
   ii) Wykaż, że $\limsup_{t\to\infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t\ln\ln t}} \leqslant 1$ p.n. oraz $\liminf_{t\to\infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t\ln\ln t}} \geqslant -1$ p.n.
   iii) Udowodnij, że dla $g \sim \mathcal{N}(0,1)$ i $t > 0$,
   $$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^3}\Big)e^{-t^2/2} \leqslant \mathbb{P}(g \geqslant t) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}t}e^{-t^2/2}.$$
   iv) Wykaż, że dla $C > 1$ i $u < 1$
   $$\sum \mathbb{P}(W_{C^n} - W_{C^{n-1}} \geqslant u\sqrt{1-1/C}\sqrt{2C^n\ln\ln C^n}) = \infty$$
   i wywnioskuj stąd i z ii), że $\limsup_{t\to\infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t\ln\ln t}} \geqslant u(1-1/C)^{1/2} - C^{-1/2}$ p.n.

3. Udowodnij, że
   a) $\limsup_{t\to 0+} \frac{W_t}{\sqrt{2t\ln\ln(1/t)}} = 1$ p.n.
   b) $\liminf_{t\to 0+} \frac{W_t}{\sqrt{2t\ln\ln(1/t)}} = -1$ p.n.