Analiza Funkcjonalna I*

Rafał Latała

styczeń 2013/czerwiec 2020

Skrypt ten zawiera notatki do wykładu z Analizy Funkcjonalnej I* przeprowadzonego na Wydziale Matematyki, Mechaniki i Informatyki Uniwersytetu Warszawskiego w semestrze zimowym 2012/13. Notatki przejrzano i poprawiono (pewną część) literówek na wiosnę 2020.

Spis treści

1 Podstawowe definicje i przykłady

Definicja 1.1. *Przestrzenią unormowaną* nad ciałem $\mathbb{F}$ równym $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$ nazywamy parę $(X, \| \ \|)$, gdzie X jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{F}$, a $\| \ \|$ *normą*, tzn. funkcją na X o wartościach w $[0, \infty)$ spełniającą warunki:
i) $\|x\| = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 0$;
ii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ dla $\lambda \in \mathbb{F}$ i $x \in X$;
iii) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ dla $x, y \in \mathbb{F}$.

Przykłady.
i) Przestrzeń $\mathbb{F}^n$ z normą euklidesową $\|x\| = (\sum_{i \leqslant n} |x_i|^2)^{1/2}$.
ii) Przestrzeń $\mathbb{F}^n$ z normą maksimum $\|x\| = \max_{i \leqslant n} |x_i|$.
iii) Przestrzeń wielomianów z normą suma modułów współczynników.
iv) Przestrzeń $C[0, 1]$ funkcji ciągłych na $[0, 1]$ z normą supremum $\|f\| = \sup_t |f(t)|$.
v) Przestrzeń $C[0, 1]$ z normą $\|f\| = \int_0^1 |f(t)|dt$.
vi) Przestrzeń $C_{\mathrm{ogr}}(\mathbb{R})$ funkcji ciągłych ograniczonych na $\mathbb{R}$ z normą supremum.
vii) Przestrzeń $C_{\mathrm{zw}}(\mathbb{R})$ funkcji ciągłych na $\mathbb{R}$ o nośniku zwartym z normą supremum.
viii) Przestrzeń $C^1[0, 1]$ funkcji różniczkowalnych w sposób ciągły na $[0, 1]$ (na końcach rozważamy jednostronne pochodne) z normą supremum.

Uwaga 1.2. Każda przestrzeń unormowana jest przestrzenią metryczną względem metryki indukowanej przez normę $\rho(x, y) = \|x - y\|$. Oczywiście nie każda metryka na przestrzeni liniowej jest indukowana przez pewną normę.

Okazuje się, że szczególnie istotną rolę wśród przestrzeni unormowanych odgrywają przestrzenie zupełne. Przypomnijmy, że przestrzeń metryczna jest zupełna, jeśli każdy ciąg Cauchy'ego jest zbieżny.

Definicja 1.3. Przestrzenią Banacha nazywamy przestrzeń unormowaną $(X, \| \ \|)$, która jest zupełna (w metryce indukowanej przez normę).

Przestrzenie z przykładów i),ii),iv) i vi) są Banacha, z przykładów iii),v), vii) i viii) nie są.

Omówimy teraz kilka ważnych klas przestrzeni Banacha.

1.1 Przestrzenie funkcji ciągłych

Fakt 1.4. *Załóżmy, że K jest zbiorem zwartym, wówczas $C(K)$ przestrzeń funkcji ciągłych z K w $\mathbb{F}$ z normą supremum jest przestrzenią Banacha.*

Ogólniej, jeśli X jest przestrzenią Banacha, to $C(K,X)$ przestrzeń funkcji ciągłych z K w X, z normą $\|f\| = \sup_{t\in K}\|f(t)\|_X$ jest przestrzenią Banacha.

Dowód. Wykażemy zupełność $C(K,X)$. Niech (f_n) będzie ciągiem Cauchy'ego z tej przestrzeni. Wówczas, dla dowolnego $t \in K$, $f(t)$ jest ciągiem Cauchy'ego w X (gdyż $\|f_n(t) - f_m(t)\|_X \leqslant \|f_n - f_m\|$), stąd z zupełności X wynika jego zbieżność. Zatem ciąg f_n jest zbieżny punktowo do pewnej funkcji $f\colon K \to X$. Zauważmy, że dla $t \in K$,

$$\|f(t)-f_n(t)\|_X = \lim_{m\to\infty}\|f_m(t)-f_n(t)\|_X \leqslant \limsup_{m\to\infty}\|f_m-f_n\| \leqslant \sup_{m\geqslant n}\|f_m-f_n\|.$$

Tak więc

$$\sup_{t\in K}\|f(t) - f_n(t)\|_X \leqslant \sup_{m\geqslant n}\|f_m - f_n\| \to 0 \text{ przy } n \to \infty,$$

czyli ciąg (f_n) jest zbieżny jednostajnie do funkcji f, co implikuje, że f jest funkcją ciągłą i f_n zbiega do f w normie przestrzeni $C(K,X)$. □

Podobnie dowodzimy fakt:

Fakt 1.5. *Załóżmy, że E jest przestrzenią topologiczną, wówczas $C_{\mathrm{ogr}}(E)$ przestrzeń funkcji ciągłych, ograniczonych z E w ciało skalarów $\mathbb{F}$ z normą supremum jest przestrzenią Banacha.*

Przykłady.
i) Rozważmy liczby naturalne $\mathbb{N}$ z topologią dyskretną. Wówczas $C_{\mathrm{ogr}}(\mathbb{N})$ możemy utożsamiać z przestrzenią ciągów ograniczonych oznaczaną l_∞ z metryką supremum.
ii) Niech $K = \mathbb{N}^*$ będzie jednopunktowym uzwarceniem $\mathbb{N}$. Funkcje z $C(K)$ możemy traktować jako ciągi zbieżne. Przestrzeń taką (z metryką supremum) będziemy oznaczać symbolem c.

1.2 Przestrzenie L_p, $1 \leqslant p < \infty$

Definicja 1.6. Załóżmy, że μ jest miarą nieujemną na $(X,\mathcal{F})$ oraz $1 \leqslant p < \infty$. Określamy wówczas dla funkcji mierzalnej $f\colon X \to \mathbb{F}$,

$$\|f\|_p := \Big(\int_X |f(t)|^p \mathrm{d}\mu(t)\Big)^{1/p}$$

i

$$L_p(X,\mathcal{F},\mu) := \{f\colon X \to \mathbb{F} \text{ mierzalne takie, że } \int_X |f(t)|^p \mathrm{d}\mu(t) < \infty\}. \quad (1)$$

Uwaga 1.7. Dla uproszczenia oznaczeń będziemy często pisać $L_p(X,\mu)$, $L_p(X)$ lub $L_p(\mu)$ zamiast $L_p(X,\mathcal{F},\mu)$.

Twierdzenie 1.8. *Przestrzeń L_p z normą $\| \ \|_p$ jest przestrzenią Banacha.*

Uwaga 1.9. Zauważmy, że $\|f-g\|_p = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f = g$ μ-prawie wszędzie. Zatem formalnie elementy przestrzeni $L_p(\mu)$ to klasy równoważności funkcji całkowalnych z p-tą potęgą względem relacji równości μ-p.w..

By udowodnić Twierdzenie 1.8 musimy wpierw pokazać, że $\| \ \|_p$ jest normą. Jedyny nieoczywisty warunek to nierówność trójkąta. Jest to tak zwana nierówność Minkowskiego.

Fakt 1.10 (Minkowski)**.** *Dla dowolnych funkcji mierzalnych f,g na $(X,\mathcal{F},\mu)$*

$$\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p \quad 1 \leqslant p < \infty. \tag{2}$$

Dla $p=1$ nierówność natychmiast wynika z odcałkowania nierówności $|f(t)+g(t)| \leqslant |f(t)|+|g(t)|$, dla pozostałych p użyjemy nierówności Höldera.

Fakt 1.11 (Hölder)**.** *Dla dowolnych funkcji mierzalnych f,g na $(X,\mathcal{F},\mu)$, $1 < p,q < \infty$ takich, że $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$ zachodzi $\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p\|g\|_q$, tzn.*

$$\int_X |fg|\mathrm{d}\mu \leqslant \Big(\int_X |f|^p\mathrm{d}\mu\Big)^{1/p}\Big(\int_X |f|^q\mathrm{d}\mu\Big)^{1/q}. \tag{3}$$

Dowód. Jeśli któraś z liczb $\|f\|_p$ lub $\|g\|_q$ jest równa 0 lub ∞, to nierówność jest oczywista, z uwagi na jednorodność możemy zatem zakładać, że $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$. Wklęsłość logarytmu implikuje następującą nierówność Younga

$$|f(t)g(t)| \leqslant \frac{1}{p}|f(t)|^p + \frac{1}{q}|g(t)|^q,$$

która po odcałkowaniu po X daje $\|fg\|_1 \leqslant \frac{1}{p}\|f\|_p^p + \frac{1}{q}\|g\|_q^q = 1 = \|f\|_p\|g\|_q$. □

Dowód nierówności Minkowskiego (2)*.* Będziemy zakładać, że $\|f\|_p, \|g\|_p < \infty$ (w przeciwnym przypadku nierówność jest oczywista). Wtedy

$$\|f+g\|_p^p = \int_X |f+g|^p\mathrm{d}\mu \leqslant \int_X 2^p(|f|^p+|g|^p)\mathrm{d}\mu = 2^p(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p) < \infty.$$

Ponadto,

$$\begin{aligned}\|f+g\|_p^p &= \int_X |f+g||f+g|^{p-1}\mathrm{d}\mu \leqslant \int_X |f||f+g|^{p-1}\mathrm{d}\mu + \int_X |g||f+g|^{p-1}\mathrm{d}\mu \\ &\leqslant \|f\|_p^p\|f+g\|_p^{p-1} + \|g\|_p^p\|f+g\|_p^{p-1},\end{aligned}$$

gdzie druga nierówność wynika z nierówności Höldera (3) zastosowanej do funkcji $|f|$ i $|f+g|^{p-1}$ oraz $|g|$ i $|f+g|^{p-1}$

Dzieląc stronami przez $\|f+g\|_p^{p-1}$ dostajemy nierówność (2). $\square$

Dowód Twierdzenia 1.8. Wiemy, że $\| \ \|_p$ jest normą, pozostaje więc wykazać zupełność L_p. Niech (f_n) będzie ciągiem Cauchy'ego w L_p, wówczas istnieje taki jego podciąg $g_k = f_{n_k}$, że

$$\|g_k - g_l\|_p \leqslant 4^{-k} \quad \text{dla } l \geqslant k.$$

Wystarczy udowodnić zbieżność ciągu g_k w L_p. Zdefiniujmy następujące zbiory dla $k = 1, 2, \ldots$,

$$A_k := \{t \in X \colon \ |g_k(t) - g_{k+1}(t)| \geqslant 2^{-k}\}.$$

Mamy

$$4^{-kp} \geqslant \|g_k - g_{k+1}\|_p^p \geqslant \int_{A_k} |g_k - g_{k+1}|^p \mathrm{d}\mu \geqslant 2^{-kp}\mu(A_k),$$

więc $\mu(A_k) \leqslant 2^{-kp}$. Połóżmy

$$A := \limsup A_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{l=k}^{\infty} A_l,$$

wtedy $\mu(A) \leqslant \mu(\bigcup_{l \geqslant k} A_l) \leqslant \sum_{l \geqslant k} \mu(A_l) \leqslant \sum_{l \geqslant k} 4^{-lp}$ i z dowolności k wynika, że $\mu(A) = 0$. Zauważmy, że dla $t \notin A$, $|g_k(t) - g_{k+1}(t)| \leqslant 2^{-k}$ dla dostatecznie dużych k, co implikuje zbieżność ciągu $g_k(t)$. Możemy więc określić

$$g(t) := \begin{cases} \lim_{k\to\infty} g_k(t) & t \in A, \\ 0 & t \notin A \end{cases}$$

i wówczas g_k zbiega do g μ-prawie wszędzie. Zauważmy, że na mocy lematu Fatou,

$$\|g - g_k\|_p^p = \int_X \lim_{l\to\infty} |g_l - g_k|^p \mathrm{d}\mu \leqslant \liminf_{l\to\infty} \int_X |g_l - g_k|^p \mathrm{d}\mu \leqslant \sup_{l \geqslant k} \|g_l - g_k\|_p^p \leqslant 4^{-kp}.$$

Stąd $g - g_k \in L_p$, więc również $g = (g - g_k) + g_k \in L_p$ oraz g_k zbiega do g w L_p. $\square$

Uwaga 1.12. Dowód Twierdzenia 1.8 pokazuje, że każdy ciąg zbieżny w L_p ma podciąg zbieżny μ-prawie wszędzie.

Przykłady.
i) Niech $A \subset \mathbb{R}^n$ będzie borelowskim zbiorem takim, że $\lambda_n(A) > 0$, gdzie λ_n oznacza miarę Lebesgue'a. Przez $L_p(A)$ oznaczamy wówczas przestrzeń $L_p(A, \mathcal{B}(A), \lambda_n)$.
ii) Rozważmy $\mathbb{N}$ z miarą liczącą μ. Wówczas przestrzeń $L_p(\mathbb{N})$ możemy utożsamiać z przestrzenią ciągów sumowalnych z p-tą potęgą, którą będziemy oznaczać przez ℓ_p. Wówczas

$$\|(x_n)\|_p = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\Big)^{1/p}.$$

iii) Ogólniej, możemy rozważyć dowolny zbiór Γ z miarą liczącą μ otrzymując przestrzeń ciągów $(x_t)_{t\in\Gamma}$ sumowalnych z p-tą potęgą oznaczaną przez $\ell_p(\Gamma)$. Gdy Γ jest zbiorem n-elementowym przestrzeń tą możemy utożsamiać z $\mathbb{R}^n$, używamy wtedy oznaczenia ℓ_p^n.

Uwaga 1.13. Dla $0 < p < 1$ przestrzeń $L_p(X, \mathcal{F}, \mu)$ określamy wzorem (1). Nie jest to jednak przestrzeń Banacha, ale zupełna przestrzeń metryczna z metryką

$$\rho_p(f, g) = \int_X |f - g|^p \mathrm{d}\mu.$$

1.3 Przestrzenie L_∞

Definicja 1.14. Załóżmy, że μ jest miarą nieujemną na $(X, \mathcal{F})$ oraz $f\colon X \to \mathbb{F}$ jest mierzalne, określamy wówczas

$$\|f\|_\infty = \inf\{M \geqslant 0\colon\ \mu\{t \in X\colon\ f(t) > M\} = 0\}$$

oraz

$$L_\infty(X, \mathcal{F}, \mu) := \{f\colon X \to \mathbb{F} \text{ mierzalne takie, że } \|f\|_\infty < \infty\}.$$

Uwaga 1.15. Tak jak dla przetrzeni L_p formalnie elementami $L_\infty(\mu)$ są klasy równoważności funkcji względem relacji równości μ-prawie wszędzie.

Uwaga 1.16. Zauważmy, że $\mu\{t \in X\colon\ f(t) > \|f\|_\infty\} = 0$ oraz dla dowolnego $f \neq 0$ i $u < \|f\|_\infty$, $\mu\{t \in X\colon\ f(t) > u\} > 0$.

Twierdzenie 1.17. *Przestrzeń L_∞ z normą $\|\ \|_\infty$ jest przestrzenią Banacha.*

Dowód. Wykażemy zupełność. Przechodząc ewentualnie do pociągu możemy rozpatrywać ciąg funkcji (f_n) taki, że $\|f_k - f_l\|_\infty \leqslant 2^{-k}$ dla $l > k$. Określmy

$$A_k := \{t \in X\colon \ |f_k(t) - f_{k+1}(t)| > 2^{-k}\},$$

wówczas $\mu(A_k) = 0$ więc jeśli $A := \bigcup_{k \geqslant 1} A_k$, to $\mu(A) = 0$. Zauważmy, że jeśli $x \notin inA$, to $|f_k(x) - -f_{k+1}(t)| \leqslant 2^{-k}$ dla wszystkich k, więc istnieje granica $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)$ oraz $|f(x) - f_k(x)| \leqslant \sum_{l \geqslant k} 2^{-l} = 2^{1-k}$. Kładąc $f(x) = 0$ dla $x \in A$ widzimy, że $\|f - f_k\|_\infty \leqslant \sup_{x \in A} |f(x) - f_k(x)| \leqslant 2^{1-k}$. W szczególności $f - f_k \in L_\infty$, więc $f = (f - f_k) + f_k \in L_\infty$ oraz $f_k \to f$ w L_∞. □

Uwaga 1.18. Nierówność Höldera (Fakt 1.11) zachodzi też dla $p = \infty$, tzn. $\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_\infty \|g\|_1$. Istotnie wystarczy odcałkować nierówność $|f(t)g(t)| \leqslant \|f\|_\infty |g(t)|$, która zachodzi dla μ-prawie wszystkich $t \in X$.

Przykłady.
i) Tak jak dla $p < \infty$, dla borelowskiego zbioru $A \subset \mathbb{R}^n$ o dodatniej mierze Lebesgue'a określamy $L_\infty(A)$ jako $L_\infty(A, \mathcal{B}(A), \lambda_n)$.
ii) Zauważmy, że dla miary liczącej μ na zbiorze Γ jedyne zbiory miary zero to zbiory puste zatem $\ell_\infty(\Gamma) := L_\infty(\Gamma, \mu)$ to przestrzeń wszystkich ciągów ograniczonych $(x_t)_{t \in \Gamma}$ z normą supremum. W szczególności dla $\Gamma = \mathbb{N}$ otrzymujemy już wcześniej rozważaną przestrzeń ℓ_∞. Dla $\Gamma = \{1, 2, \ldots, n\}$, $\ell_\infty(\Gamma)$ możemy utożsamić z $\mathbb{R}^n$ z normą maksimum, przetrzeń tą oznaczamy ℓ_∞^n.

1.4 Miary zespolone

Definicja 1.19. Miarą ze znakiem (odp. miarą zespoloną) na przestrzeni mierzalnej $(X, \mathcal{F})$ nazywamy sigma-addytywną funkcję μ na $\mathcal{F}$ o wartościach rzeczywistych (odp. zespolonych), tzn. funkcję spełniającą warunek

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\Big) = \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n) \quad \text{dla parami rozłącznych zbiorów } A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}. \tag{4}$$

Uwaga 1.20. Warunek (4) implikuje zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^\infty \mu(A_n)$. Ponieważ suma zbiorów się nie zmienia przy permutacji indeksów, więc ten szereg jest zbieżny bezwarunkowo, czyli $\sum_{n=1}^\infty |\mu(A_n)| < \infty$.

Definicja 1.21. Załóżmy, że μ jest miarą ze znakiem lub miarą zespoloną na $(X, \mathcal{F})$. Określamy wówczas dla $A \in \mathcal{F}$

$$|\mu|(A) := \sup\Big\{ \sum_{n=1}^{\infty} |\mu(A_n)| \colon A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F} \text{ parami rozłączne }, \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A \Big\}.$$

Twierdzenie 1.22. *Dla dowolnej miary ze znakiem (miary zespolonej) μ na $(X, \mathcal{F})$, $|\mu|$ jest skończoną miarą nieujemną taką, że $|\mu|(A) \geqslant |\mu(A)|$. Ponadto $|\mu|$ jest najmniejszą taką miarą.*

Nieoczywistym punktem jest skończoność $|\mu|$, by go wykazać potrzebny będzie nam następujący lemat.

Lemat 1.23. *Załóżmy, że $z_1, z_2, \ldots, z_n$ są liczbami zespolonymi, wówczas istnieje $I \subset \{1, \ldots, n\}$ taki, że*

$$\Big| \sum_{i \in I} z_i \Big| \geqslant \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{n} |z_i|.$$

Dowód. Płaszczyznę zespoloną można podzielić na cztery ćwiartki ograniczone prostymi $y = \pm x$. W jednej z tych ćwiartek leżą wektory $(z_i)_{i \in I}$ o sumie modułów nie mniejszej niż $\frac{1}{4} \sum_{i \leqslant n} |z_i|$. Bez straty ogólności możemy założyć, że jest to ćwiartka $C = \{z = x + iy \colon \ |y| \leqslant x\}$. Zauważmy, że $\mathrm{Re}(z) \geqslant |z|/\sqrt{2}$ dla $z \in C$, stąd

$$\Big| \sum_{i \in I} z_i \Big| \geqslant \sum_{i \in I} \mathrm{Re}(z_i) \geqslant \sum_{i \in I} \frac{1}{\sqrt{2}} |z_i| \geqslant \frac{1}{4\sqrt{2}} \sum_{i=1}^{n} |z_i| \geqslant \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{n} |z_i|.$$

□

Dowód Twierdzenia 1.22. Najpierw udowodnimy, że $|\mu|$ jest miarą nieujemną na $(X, \mathcal{F})$. Niech $A_1, A_2, \ldots$ będzie ciągiem parami rozłącznych zbiorów z $\mathcal{F}$ oraz $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Jeśli $B_1, B_2, \ldots$ jest rozbiciem A na parami rozłączne zbiory z $\mathcal{F}$, to dla każdego n, $A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} (B_k \cap A_n)$, więc

$$\begin{aligned}
\sum_k |\mu(B_k)| &= \sum_k \Big| \sum_n \mu(B_k \cap A_n) \Big| \leqslant \sum_k \sum_n |\mu(B_k \cap A_n)| \\
&= \sum_n \sum_k |\mu(B_k \cap A_n)| \leqslant \sum_n |\mu|(A_n),
\end{aligned}$$

więc biorąc supremum po wszystkich takich rozbiciach dostajemy

$$|\mu|(A) \leqslant \sum_n |\mu|(A_n).$$

Z drugiej strony, jeśli $a_n < |\mu|(A_n)$ i $(B_{n,k})_{k\geqslant 1}$ jest rozbiciem A_n na parami rozłączne zbiory z { takim, że $\sum_k |\mu(B_{n,k})| \geqslant a_n$, to $(B_{n,k})_{n,k}$ jest rozbiciem A, więc

$$|\mu|(A) \geqslant \sum_n \sum_k |\mu(B_{n,k})| \geqslant \sum_n a_n$$

i z dowolności wyboru $a_n < |\mu|(A_n)$ dostajemy

$$|\mu|(A) \geqslant \sum_n |\mu|(A_n).$$

Zatem $|\mu|(A) = \sum_n |\mu|(A_n)$, czyli $|\mu|$ jest miarą.

Pozostaje wykazać skończoność $|\mu|(X)$. Pokażemy wpierw, że jeśli $A \in \mathcal{F}$ spełnia $|\mu|(A) = \infty$, to istnieją zbiory rozłączne $B, C \in \mathcal{F}$, $B \cup C = A$ takie, że $|\mu(B)| \geqslant 1$ oraz $|\mu|(C) = \infty$. Istotnie, z definicji $|\mu|$ istnieją zbiory rozłączne $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ zawarte w A takie, że $\sum_{k=1}^n |\mu(A_n)| \geqslant 6(1 + |\mu(A)|)$. Z Lematu 1.23 istnieje zbiór $I \subset \{1, \ldots, n\}$ taki, że $|\sum_{k\in I} \mu(A_k)| \geqslant 1 + |\mu(A)|$. Niech $D = \bigcup_{k\in I} A_i$ wówczas $|\mu(D)| \geqslant 1 + |\mu(A)| \geqslant 1$ oraz $|\mu(A \setminus D)| = |\mu(A) - \mu(D)| \geqslant 1$. Zauważmy, że przynajmiej jeden ze zbiorów $D, A\setminus D$ ma nieskończoną miarę $|\mu|$, wybieramy go jako C a drugi ze zbiorów jako B.

Załóżmy teraz nie wprost, że $|\mu|(X) = \infty$, stosując powyższe spotrzeżenie, indukcyjnie konstruujemy zbiory $B_1, \ldots, B_n, C_n$ parami rozłączne takie, że $|\mu(B_i)| \geqslant 1$ oraz $|\mu|(C_n) = \infty$. Wówczas mamy rozłączne podzbiory $(B_k)_{k\geqslant 1}$ oraz szereg $\sum_k \mu(B_k)$ jest rozbieżny, co jest niemożliwe. □

Twierdzenie 1.24. *Przestrzeń wszystkich miar zespolonych (miar ze znakiem) na $(X, \mathcal{F})$ z normą $\|\mu\| := |\mu|(X)$ jest przestrzenią Banacha nad $\mathbb{C}$ (odp. nad $\mathbb{R}$).*

Dowód. To, że jest to przestrzeń unormowana jest oczywiste. By wykazać zupełność weźmy ciąg Cauchy'ego (μ_n) miar zespolonych i zauważmy, że dla $A \in \mathcal{F}$, $|\mu_n(A) - \mu_m(A)| \leqslant \|\mu_n - \mu_m\|$, więc $\mu_n(A)$ jest ciągiem Cauchy'ego w $\mathbb{F}$ i możemy określić $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$. Zauważmy, że dla dowolnych parami rozłącznych zbiorów $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ i $N < \infty$

$$\sum_{k=1}^N |\mu(A_k) - \mu_n(A_k)| = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^N |\mu_m(A_k) - \mu_n(A_k)| \leqslant \limsup_{m\to\infty} \|\mu_m - \mu_n\|,$$

stąd

$$\sum_{k=1}^\infty |\mu(A_k) - \mu_n(A_k)| \leqslant \sup_{m\geqslant n} \|\mu_m - \mu_n\| \to 0 \text{ przy } n \to \infty. \tag{5}$$

Niech teraz $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, będzie rozbiciem A na parami rozłączne zbiory z $\mathcal{F}$. Wówczas dla dowolnego n,

$$\Big|\mu(A)-\sum_k \mu(A_k)\Big| \leqslant \Big|\mu_n(A)-\sum_k \mu_n(A_k)\Big|+|\mu(A)-\mu_n(A)|+\sum_k |\mu(A_k)-\mu_n(A_k)|$$

i pierwszy z powyższych składników jest równy zero, a dwa kolejne dążą do zera przy $n \to \infty$. Zatem μ jest miarą zespoloną, a (5) pokazuje, że $\|\mu - \mu_n\| \to 0$.

□

Przykład. Gdy $X = \mathbb{N}$ i $\mathcal{F} = 2^X$, to każda miarę μ można utożsamiać z ciągiem $x_n = \mu(\{n\})$, i nietrudno zauważyć, że $|\mu|(A) = \sum_{n\in A} |x_n|$. Stąd $\|\mu\| = \|x\|_1$ i przestrzeń miar na $\mathbb{N}$ można utożsamiać z ℓ_1.

Przystąpimy teraz do określenia całki względem miary zespolonej. Zacznijmy od miar ze znakiem, niech μ będzie taką miarą na $(X, \mathcal{F})$ i określmy miary μ^+ i μ^- wzorami

$$\mu^+(A) = \frac{1}{2}(\mu(A) + |\mu|(A)), \quad \mu^-(A) = \frac{1}{2}(|\mu|(A) - |\mu|(A)).$$

Wówczas μ^+ i μ^- są skończonymi miarami nieujemnymi na $(X, \mathcal{F})$ oraz $\mu = \mu^+ - \mu^-$. Zauważmy, że $\mu^+ + \mu^- = |\mu|$, więc $L_1(\mu^+) \cap L_1(\mu^-) = L_1(|\mu|)$. Możemy zatem określić

$$\int_X f \mathrm{d}\mu := \int_X f \mathrm{d}\mu^+ - \int_X f \mathrm{d}\mu^- \quad f \in L^1(|\mu|).$$

W przypadku miary zespolonej μ mamy $\mu = \mathrm{Re}(\mu) + i\mathrm{Im}(\mu)$ oraz $\mathrm{Re}(\mu)$ i $\mathrm{Im}(\mu)$ są miarami ze znakiem. Definiujemy wtedy

$$\int_X f \mathrm{d}\mu := \int_X f \mathrm{d}\mathrm{Re}(\mu) + i \int_X f \mathrm{d}\mathrm{Im}(\mu) \quad f \in L^1(|\mu|).$$

Można sprawdzić, że tak określona całka $\int f \mathrm{d}\mu$ jest liniowa względem f i μ oraz $\int \mathbb{1}_A \mathrm{d}\mu = \mu(A)$ dla $A \in \mathcal{F}$.

1.5 Przestrzeń operatorów liniowych

Zacznijmy od prostego, ale ważnego faktu.

Fakt 1.25. *Załóżmy, że $T\colon X \to Y$ jest operatorem liniowym między dwoma przestrzeniami unormowanymi. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

i) T jest operatorem ciągłym,
ii) T jest ciągły w pewnym punkcie $x_0 \in X$,
iii) T jest ciągły w 0,
iv) T jest operatorem ograniczonym, tzn. $\|T\| < \infty$, gdzie

$$\|T\| = \|T\|_{X \to Y} := \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} \|Tx\|_Y. \tag{6}$$

Dowód. Implikacja *i)* $\Rightarrow$ *ii)* jest oczywista, *ii)* $\Rightarrow$ *iii)* wynika stąd, że $Tx = T(x + x_0) - Tx_0$, a *iv)* $\Rightarrow$ *i)* z nierówności $\|Tx - Ty\|_Y = \|T(x - y)\|_Y \leqslant \|T\|\|x - y\|_X$. By wykazać *iii)* $\Rightarrow$ *iv)* załóżmy nie wprost, że T nie jest ograniczony, wówczas istnieją $x_n \in X$ takie, że $\|x_n\| \leqslant 1$ oraz $\|Tx_n\| \geqslant n$. Wtedy ciąg x_n/n dąży do zera w X, a ciąg $T(x_n/n)$ nie dąży do $T0 = 0$ w Y, więc T nie jest ciągły w 0. $\square$

Definicja 1.26. Wielkość $\|T\|$ zdefiniowaną w (6) nazywamy normą operatora T. Przez $B(X, Y)$ będziemy oznaczać przestrzeń ciągłych operatorów z X do Y. W przypadku gdy $X = Y$ będziemy pisać $B(X)$ zamiast $B(X, X)$.

Uwaga 1.27. Zauważmy, że

$$\|T\|_{X \to Y} = \sup_{\|x\|_X = 1} \|Tx\|_Y.$$

Twierdzenie 1.28. *Dla dowolnych przestrzeni umormowanych X i Y przestrzeń $B(X, Y)$ z normą $\| \ \|_{X \to Y}$ jest przestrzenią unormowaną. Jeśli Y jest przestrzenią Banacha, to $B(X, Y)$ też jest przestrzenią Banacha.*

Dowód. Pierwsza część twierdzenia jest łatwym ćwiczeniem. Załóżmy zatem, że Y jest Banacha, wykażemy zupełność $B(X, Y)$. Niech (T_n) będzie ciągiem Cauchy'ego w $B(X, Y)$. Zauważmy, że dla dowolnego $x \in X$, ciąg $(T_n x)$ jest Cauchy'ego w Y (bo $\|(T_n - T_m)x\| \leqslant \|T_n - T_m\|\|x\|$). Zatem można określić operator graniczny T wzorem $Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x$. Oczywiście T jest operatorem liniowym z X do Y. Zauważmy też, że

$$\|(T - T_n)x\| = \lim_{m\to\infty} \|(T_m - T_n)x\| \leqslant \limsup_{m\to\infty} \|T_m - T_n\|\|x\| \leqslant \sup_{m \geqslant n} \|T_m - T_n\|\|x\|,$$

stąd

$$\|T - T_n\| \leqslant \sup_{m \geqslant n} \|T_m - T_n\| \to 0.$$

W szczególności $\|T - T_n\| < \infty$, czyli $T - T_n \in B(X, Y)$, zatem również $T = (T - T_n) + T_n \in B(X, Y)$ oraz $T_n \to T$ w normie operatorowej. $\square$

Definicja 1.29. *Przestrzenią dualną (sprzężoną)* do przestrzeni unormowanej X nazywamy przestrzeń $X^* = B(X, \mathbb{F})$. Elementy X^* nazywamy funkcjonałami na X.

Przykłady.
i) $X = c$ przestrzeń ciągów zbieżnych (z normą supremum), $\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} x_n$, wówczas $\varphi \in c^*$ i $\|\varphi\| = 1$.
ii) $X = c_0$, $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} x_n$. Wówczas $|\varphi(x)| \leqslant \|x\| \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = \|x\|$, czyli $\varphi \in c_0^*$ oraz $\|\varphi\| \leqslant 1$. Biorąc $x^n = e_1 + e_2 + \ldots + e_n$ widzimy, że $\|x^n\| = 1$ oraz $\varphi(x^n) \to 1$, więc $\|\varphi\| = 1$. Zauważmy, że nie istnieje $x \in c_0$ taki, że $\|x\| = 1$ i $\varphi(x) = \|\varphi\|$.
iii) $X = L_1[0,1]$, $Y = C[0,1]$, $Tf(t) = \int_0^t f(s)\mathrm{d}s$ (operator Volterry). Wówczas, jak łatwo sprawdzić, $\|T\| = 1$.

1.6 Podprzestrzenie i przestrzenie ilorazowe

Fakt 1.30. *Niech $(X, \|\ \|_X)$ będzie przestrzenią Banacha, a Y podprzestrzenią X. Wówczas $(Y, \|\ \|_X)$ jest przestrzenią Banacha wtedy i tylko wtedy, gdy Y jest domknięte.*

Dowód. „$\Rightarrow$”. Jeśli $x \in \overline{Y}$, to istnieje ciąg $x_n \in Y$ zbieżny do x, jest to ciąg Cauchyego w normie $\|\ \|_X$, więc jest zbieżny do pewnego elementu $y \in Y$. Ale $y \in X$ i ciąg może mieć tylko jedną granicę, więc $y = x$, czyli $\overline{Y} = Y$.
„$\Leftarrow$”. Wystarczy zauważyć, że każdy ciąg Cauchy'ego w Y jest ciągiem Cauchy'ego w X, a jego granica należy do $\overline{Y} = Y$.

□

Przykłady.
i) Przestrzeń c_0 ciągów zbieżnych do zera jest jak łatwo sprawdzić domkniętą podprzestrzenią l_∞ zatem c_0 jest przestrzenią Banacha (w normie supremum).
ii) Przestrzeń $C_0(\mathbb{R})$ funkcji ciągłych zbieżnych do zera w nieskończoności jest domkniętą podprzestrzenią $C_{\mathrm{ogr}}(\mathbb{R})$, czyli jest to przestrzeń Banacha (w normie supremum).

Definicja 1.31. Załóżmy, że Y jest domkniętą podprzestrzenią przestrzeni Banacha X. Wprowadzamy wówczas relacje równoważności $x \sim y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x - y \in Y$. *Przestrzeń ilorazową* X/Y definiujemy jako zbiór $([x])_{x\in X} = (x + Y)_{x\in X}$ klas równoważności tej relacji. Określmy też

$$\|[x]\| := \inf\{\|y\|_X : y \in [x]\}. \tag{7}$$

Twierdzenie 1.32. *Dla dowolnej podprzestrzeni domkniętej Y przestrzeni Banacha X przestrzeń X/Y z normą zdefiniowaną wzorem* (7) *jest przestrzenią Banacha.*

Dowód. Wykażemy zupełność X/Y. Weźmy ciąg Cauchy'ego $([x_n])_n$ w X/Y, po ewentualnym przejściu do podciągu możemy zakładać, że $\|[x_n - x_m]\| \leqslant 2^{-n}$ dla $m \geqslant n$. Zatem istnieją wektory $y_n \in Y$ takie, że $\|x_n - x_{n+1} + y_n\| \leqslant 2^{1-n}$. Niech $\tilde{x}_n = x_n + \sum_{k=1}^{n-1} y_k$, wówczas $\tilde{x}_n \in [x_n]$ oraz $\tilde{x}_n - \tilde{x}_{n+1} = x_n - x_{n+1} + y_n$. Zatem $(\tilde{x}_n)$ jest ciągiem Cauchy'ego w X, z zupełności zbiega w $\| \ \|_X$ do pewnego elementu $x \in X$. Mamy $\|[x_n] - [x]\| = \|[\tilde{x}_n] - [x]\| \leqslant \|\tilde{x}_n - x\| \to 0$. $\square$

Przykład. Przestrzeń c/c_0 jest izometryczna z $\mathbb{F}$.

2 Przestrzenie Hilberta

2.1 Definicje, podstawowe własności i kilka przykładów

Zacznijmy od przypomnienia definicji prestrzeni euklidesowej (unitarnej).

Definicja 2.1. *Przestrzenią unitarną (euklidesową)* nazywamy przestrzeń liniową H nad ciałem $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$ z *iloczynem skalarnym* $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon H \times H \to \mathbb{F}$, tzn. funkcją spełniającą następujące warunki:
i) $\langle x, x \rangle > 0$ dla $x \in H$, $x \neq 0$,
ii) przekształcenie $x \to \langle x, y \rangle$ jest liniowe dla wszystkich $y \in H$,
iii) $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$ dla $x, y \in H$.

Uwaga 2.2. Zauważmy, że z definicji wynika, że przekształcenie $y \to \langle x, y \rangle$ jest antyliniowe, tzn. $\langle x, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \rangle = \overline{\lambda_1} \langle x, y_1 \rangle + \overline{\lambda_2} \langle x, y_2 \rangle$.

Przykłady.
i) $\mathbb{F}^n$ z iloczynem skalarnym $\langle x, y \rangle := \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}$,
ii) $C[0,1]$ z iloczynem skalarnym $\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} \mathrm{d}x$,
iii) l_2 z iloczynem skalarnym $\langle x, y \rangle := \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}$ (zbieżność szeregu wynika z nierówności Höldera),
iv) $L_2(X, \mu)$ z iloczynem skalarnym $\langle f, g \rangle := \int_X f \overline{g} \mathrm{d}\mu$,
v) $C^\infty_{\mathrm{zw}}(\mathbb{R}^k)$ z iloczynem skalarnym

$$\langle f, g \rangle := \sum_{|\alpha| \leqslant N} \int_{\mathbb{R}} D^\alpha f \ \overline{D^\alpha g} \mathrm{d}x,$$

np. dla $N = 1$,

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f \overline{g} dx + \int_{\mathbb{R}} \langle \nabla f, \nabla g \rangle \mathrm{d}x.$$

vi) $A^2(\Omega) := \{f\colon \Omega \mapsto \mathbb{C}\colon\ f \in L^2(\Omega),\ f \text{ holomorficzne }\}$, gdzie Ω jest obszarem w $\mathbb{C}$ z iloczynem skalarnym

$$\langle f, g\rangle := \int_\Omega f(x,y)\overline{g(x,y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Definicja 2.3. Dla wektora x z przestrzeni unitarnej H definiujemy $|x| := \langle x, x\rangle^{1/2}$.

By pokazać, że $|\cdot|$ jest normą na H będziemy potrzebowali następującego faktu.

Fakt 2.4 (Nierówność Schwarza)**.** *Dla dowolnych x, y z przestrzeni unitarnej H zachodzi*

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leqslant \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$$

lub równoważnie $|\langle x, y\rangle| \leqslant |x||y|$.

Dowód. Wybierzmy $\lambda \in \mathbb{F}$ takie, że $|\lambda| = 1$ oraz $|\langle x, y\rangle| = \lambda\langle x, y\rangle$. Zauważmy, że dla $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}0 &\leqslant \langle t\lambda x + y, t\lambda x + y\rangle = t^2|\lambda|^2|x|^2 + |y|^2 + 2t\mathrm{Re}\langle\lambda x, y\rangle\\ &= t^2|x|^2 + |y|^2 + 2t|\langle x, y\rangle|.\end{aligned}$$

Zatem funkcja kwadratowa $f(t) = t^2|x|^2 + |y|^2 + 2t|\langle x, y\rangle|$ jest stale dodatnia, co implikuje, że jej wyróżnik $\Delta = 4|\langle x, y\rangle|^2 - 4|x|^2|y|^2$ jest niedodatni. □

Wniosek 2.5. *Funkcja $|\ |$ jest normą na przestrzeni unitarnej.*

Dowód. Oczywiście $|x| \geqslant 0$ i $|x| = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 0$. Dla $\lambda \in \mathbb{F}$ mamy

$$|\lambda x| = \langle\lambda x, \lambda x\rangle^{1/2} = (\lambda\overline{\lambda}\langle x, x\rangle)^{1/2} = |\lambda||x|.$$

Wreszcie na mocy nierówności Schwarza,

$$\begin{aligned}|x + y|^2 &= \langle x + y, x + y\rangle = |x|^2 + |y|^2 + 2\mathrm{Re}(\langle x, y\rangle) \leqslant |x|^2 + |y|^2 + 2|\langle x, y\rangle|\\ &\leqslant |x|^2 + |y|^2 + 2|x||y| = (|x| + |y|)^2.\end{aligned}$$

□

Fakt 2.6 (Tożsamość równoległoboku)**.** *Dla dowolnych wektorów x, y w przestrzeni unitarnej H,*

$$|x + y|^2 + |x - y|^2 = 2(|x|^2 + |y|^2).$$

Dowód. Mamy

$$|x+y|^2 = |x|^2 + |y|^2 + 2\mathrm{Re}(\langle x,y\rangle), \quad |x-y|^2 = |x|^2 + |y|^2 - 2\mathrm{Re}(\langle x,y\rangle).$$

□

Okazuje się, że tożsamość równoległoboku charakteryzuje normy pochodzące od iloczynu skalarnego.

Twierdzenie 2.7. *Załóżmy, że $(X, \| \ \|)$ jest przestrzenią unormowaną. Wówczas na X da się wprowadzić iloczyn skalarny taki, że $\|x\| = \langle x,x\rangle^{1/2}$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełniona jest tożsamość równoległoboku $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$, $x, y \in X$.*

Dowód pozostawiamy jako (nieco trudniejsze) ćwiczenie.

Definicja 2.8. Przestrzeń unitarną, która jest zupełna (w normie $| \ |$) nazywamy *przestrzenią Hilberta.*

Wiemy już, że przestrzenie z przykładów i), iii), iv) są Hilberta. Nietrudno pokazać, że przestrzenie z przykładów ii), v) nie są zupełne. Pokażemy, że przestrzeń z przykładu vi) jest zupełna.

Fakt 2.9. *Dla dowolnego obszaru $\Omega \subset \mathbb{C}$ przestrzeń $A^2(\Omega)$ jest zupełna.*

Dowód. Niech K będzie zwartym podzbiorem Ω, wówczas istnieje $\varepsilon > 0$ takie, że dla każdego $z \in K$, $B(z,\varepsilon) \subset \Omega$. Niech $f \in A^2(G)$. Niech $z \in K$, funkcje holomorficzne są harmoniczne, więc $f(z) = (\pi\varepsilon^2)^{-1} \int_{B(z,\varepsilon)} f \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, stąd z nierówności Schwarza,

$$\begin{aligned}|f(z)| &\leqslant \frac{1}{\pi\varepsilon^2}\int_{B(z,\varepsilon)} |f| \mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \frac{1}{\pi\varepsilon^2}(\int_{B(z,\varepsilon)} |f|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y)^{1/2}\Big(\int_{B(z,\varepsilon)} 1 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big)^{1/2} \\ &\leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}\varepsilon}\Big(\int_G |f|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big)^{1/2}.\end{aligned}$$

Pokazaliśmy zatem, że dla dowolnego zbioru zwartego $K \subset \Omega$, istnieje stała A zależna tylko od K taka, że $\|f\|_{C(K)} \leqslant A|f|_{A^2(\Omega)}$.

Niech (f_n) będzie ciągiem Cauchy'ego w $A^2(G)$, z otrzymanego powyżej szacowania wynika, że f_n jest ciągiem Cauchy'ego w $C(K)$ dla dowolnego zwartego $K \subset \Omega$, skąd łatwo otrzymujemy, że po pierwsze f_n jest zbieżny punktowo do pewnej funkcji f, a po drugie zbieżność ta jest niemal jednostajna (tzn. jednostajna na zbiorach zwartych). Zatem f jest holomorficzna jako niemal jednostajna granica funkcji holomorficznych. Z drugiej strony (f_n) jest ciągiem Cauchy'ego w $L_2(\Omega)$, więc zbiega w $L_2(G)$ do pewnej funkcji g, ponadto pewien podciąg (f_{n_k}) zbiega do g p.w., czyli $f = g$ p.w.. Stąd f jest całkowalna z kwadratem na Ω, czyli $f \in A^2(\Omega)$. Ponadto f_2 zbiega do $f = g$ p.w. w normie $L_2(\Omega)$, czyli w normie $A^2(\Omega)$. □

2.2 Twierdzenia o rzucie ortogonalnym i o postaci funkcjonału

Lemat 2.10. *Załóżmy, że A jest wypukłym domkniętym podzbiorem przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. Wówczas w A istnieje dokładnie jeden element o najmniejszej normie, tzn. takie $x_0 \in A$, że $|x_0| = \inf\{|x|\colon\ x \in A\}$.*

Dowód. Niech $d := \inf\{|x|\colon\ x \in A\}$

Najpierw wykażemy istnienie $x_0 \in A$ z $|x_0| = d$. Niech $x_n \in A$ będzie ciągiem takim, że $|x_n|$ dązy do d. Tożsamość równoległoboku implikuje, że

$$\Big|\frac{x_n - x_m}{2}\Big|^2 + \Big|\frac{x_n + x_m}{2}\Big|^2 = \frac{1}{2}(|x_n|^2 + |x_m|^2).$$

Zauważmy, że $(x_n + x_m)/2 \in A$ (z wypukłości), zatem $\|(x_n + x_m)/2\| \geqslant d$. Stąd

$$|x_n - x_m|^2 = 2(|x_n|^2 + |x_m|^2) - 4\Big|\frac{x_n + x_m}{2}\Big|^2 \leqslant 2(|x_n|^2 + |x_m|^2) - 4d^2 \to 0$$

przy $n, m \to \infty$, czyli (x_n) jest ciągiem Cauchy'ego i z zupełności x_n jest zbieżny do pewnego x_0. Z domkniętości A wynika, że $x_0 \in A$, a z ciągłości normy, że $|x_0| = d$.

By wykazać jednoznacznosc załóżmy, że $x_0, x_1 \in A$, $|x_0| = |x_1| = d$ oraz $x_1 \neq x_0$. Wówczas $(x_0 + x_1)/2 \in A$ oraz

$$\Big|\frac{x_0 + x_1}{2}\Big|^2 = \frac{1}{2}(|x_0|^2 + |x_1|^2) - \Big|\frac{x_0 - x_1}{2}\Big|^2 < d^2,$$

co przeczy definicji d. □

Wniosek 2.11. *Załóżmy, że M jest domkniętą podprzestrzenią przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ oraz $x \in \mathcal{H}$. Wówczas istnieje dokładnie jeden element $y \in M$ taki, że*

$$|x - y| = \operatorname{dist}(x, M) := \inf_{z \in M} |x - z|.$$

Dowód. Stosujemy poprzedni lemat do wypukłego domkniętego zbioru $x - M = \{x - y\colon\ y \in M\}$. □

Definicja 2.12. Mówimy, że dwa wektory x, y z przestrzeni unitarnej H są *prostopadłe (ortogonalne)*, jeśli $\langle x, y\rangle = 0$.

Dla $A \subset H$ definiujemy *uzupełnienie ortogonalne* A wzorem

$$A^\perp := \{x \in H\colon\ \langle x, y\rangle = 0 \text{ dla wszystkich } y \in A\}.$$

Uwaga 2.13. Dla dowolnego $A \subset H$ zbiór $A^{\perp}$ jest domkniętą podprzestrzenią H.

Twierdzenie 2.14. *Załóżmy, że M jest domkniętą podprzestrzenią przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. Wówczas dla dowolnego $x \in \mathcal{H}$ istnieją wektory $y \in M$, $z \in M^{\perp}$ takie, że $x = y + z$. Co więcej taki rozkład jest jednoznaczny.*

Dowód. By wykazać istnienie rozkładu zdefiniujmy $y \in M$ jako $|x - y| = \operatorname{dist}(x, M)$, zaś $z = x - y$. Weźmy dowolne $w \in M$, musimy wykazać, że z i w są ortogonalne. Zauważmy, że dla dowolnego $t \in \mathbb{F}$, $y + tw \in M$, więc

$$\operatorname{dist}(x, M)^2 \leqslant |x - (y + tw)|^2 = |x - y|^2 + |t|^2|w|^2 - 2\mathrm{Re}(\langle z, tw\rangle).$$

Zatem dla dowolnego $t \in \mathbb{F}$ mamy $2\mathrm{Re}(\langle z, tw\rangle) \leqslant t^2|w|^2$, skąd łatwo otrzymujemy, że $\langle t, w\rangle = 0$.

Załóżmy, że istnieją dwa rozkłady $x = y_1 + z_1 = y_2 - z_2$, wówczas $y_1 - y_2 \in M$, $z_1 - z_2 \in M^{\perp}$, ale $y_1 - y_2 = z_2 - z_1$, więc $|y_1 - y_2|^2 = \langle y_1 - y_2, z_2 - z_1\rangle = 0$, czyli $y_1 = y_2$, $z_1 = z_2$ i rozkład jest jednoznaczny. □

Uwaga 2.15. Symbolicznie zapisujemy powyższe twierdzenie w postaci $\mathcal{H} = M \oplus M^{\perp}$. Zauważmy też, że $|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2$ dla $x \in M, y \in M^{\perp}$.

Definicja 2.16. Jeśli $x = y + z$, $y \in M, z \in M^{\perp}$, to y nazywamy *rzutem ortogonalnym x na M* i oznaczamy $y = P_M x$.

Wniosek 2.17. *Dla dowolnej domkniętej podprzestrzeni M przestrzeni Hilberta zachodzi $(M^{\perp})^{\perp} = M$.*

Dowód. Oczywiście $M \subset (M^{\perp})^{\perp}$. By wykazać przeciwne zawieranie załóżmy, że $x \in (M^{\perp})^{\perp}$, wówczas $x = y + z$, $y \in M, z \in M^{\perp}$ oraz $0 = \langle z, x\rangle = \langle z, y\rangle + \langle z, z\rangle = |z|^2$, czyli $z \in M$. □

Fakt 2.18. *Dla dowolnej domkniętej podprzestrzeni M przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$, P_M jest rzutem ortogonalnym, tzn. $P_M \colon \mathcal{H} \to M$ jest takim ciągłym przekształceniem liniowym, że $P_M^2 = P_M$ oraz $\langle P_M x, y\rangle = \langle x, P_M y\rangle$ dla $x, y \in \mathcal{H}$.*

Dowód. Liniowość wynika stąd, że jeśli $x_1 = y_1 + z_1$, $x_2 = y_2 + z_2$ z $y_k \in M$, $z_k \in M^{\perp}$, to $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = (\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) + (\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2)$ oraz $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \in M$, $\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 \in M^{\perp}$.

Jeśli $P_M x = y$, to $y \in M$, zatem $P_M y = y$, czyli $P_M^2 x = y = P_M x$. Wreszcie, biorąc $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$, $x_1, x_2 \in M$, $y_1, y_2 \in M^{\perp}$ mamy

$$\langle P_M x, y\rangle = \langle x_1, y_1 + y_2\rangle = \langle x_1, y_1\rangle = \langle x_1 + x_2, y_1\rangle = \langle x, P_M y\rangle.$$

□

Przykład.
Niech $\mathcal{H} = L_2[0,1]$ oraz $M = \{f \in L_2[0,1] \colon f\mathbb{1}_{[0,1/2]} = 0 \text{ p.w.}\}$. Wówczas $M^\perp = \{f \in L_2[0,1] \colon f\mathbb{1}_{[1/2,1]} = 0 \text{ p.w.}\}$ oraz $P_M f = f\mathbb{1}_{[1/2,1]}$.

Twierdzenie 2.19 (Riesz)**.** *Załóżmy, że φ jest ciągłym liniowym funkcjonałem na przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. Wówczas istnieje dokładnie jeden wektor $y \in \mathcal{H}$ taki, że $\varphi(x) = \langle x, y\rangle$, ponadto $\|\varphi\| = |y|$.*

Dowód. Jeśli $\varphi = 0$, to możemy oczywiście położyć $y = 0$. W przeciwnym przypadku $M = \mathrm{Ker}(\varphi)$ jest domkniętą podprzestrzenią $\mathcal{H}$ oraz $M \neq \mathcal{H}$, zatem $M^\perp$ zawiera pewien niezerowy wektor z. Zauważmy, że

$$\varphi(x\varphi(z) - z\varphi(x)) = \varphi(x)\varphi(z) - \varphi(x)\varphi(z) = 0,$$

czyli $x\varphi(z) - z\varphi(x) \in M$. Stąd

$$0 = \langle x\varphi(z) - z\varphi(x), z\rangle = \langle x, z\rangle\varphi(z) - \varphi(x)|z|^2$$

i kładąc $y := z\overline{\varphi}(z)/|z|^2$ otrzymujemy $\varphi(x) = \langle x, y\rangle$.

By udowodnić jednoznaczność załóżmy, że $\varphi(x) = \langle x, y'\rangle$ dla $x \in \mathcal{H}$. Wtedy $\langle x, y - y'\rangle = 0$ dla wszystkich $x \in \mathcal{H}$, więc $|y - y'|^2 = 0$, czyli $y = y'$.

By zakończyć dowód zauważmy, że na podstawie nierówności Schwarza,

$$\|\varphi\| = \sup_{|x|\leqslant 1} |\varphi(x)| = \sup_{|x|\leqslant 1} |\langle x, y\rangle| \leqslant \sup_{|x|\leqslant 1} |x||y| = |y|,$$

ponadto biorąc $x = y/|y|$ widzimy, że $\|\varphi\| \geqslant |y|$.

$\square$

2.3 Twierdzenie Radona-Nikodyma

Definicja 2.20. Rozważmy dwie miary μ, ν na $(X, \mathcal{F})$. Mówimy, że
i) ν jest *absolutnie ciągła względem* μ (ozn. $\nu \ll \mu$), jeśli dla każdego $A \in \mathcal{F}$ $\mu(A) = 0$ implikuje $\nu(A) = 0$,
ii) funkcja mierzalna f na X jest *gęstością* ν *względem* μ (ozn. $f = \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$), jeśli dla wszystkich $A \in \mathcal{F}$, $\nu(A) = \int_A f\mathrm{d}\mu$,
iii) μ i ν są *wzajemnie osobliwe* (ozn. $\mu \perp \nu$), jeśli istnieje $A \in \mathcal{F}$ taki, że $\mu(A) = 0$ oraz $\nu(X \setminus A) = 0$.

Uwaga 2.21. Jeśli istnieje gęstość $f = \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$, to oczywiście $\nu \ll \mu$. Ponadto wówczas dla dowolnej nieujemnej funkcji mierzalnej g na X, $\int g\mathrm{d}\nu = \int fg\mathrm{d}\mu$.

Przykład. Niech μ będzie miarą Lebesgue'a na $\mathbb{R}$, zaś ν miarą liczącą skupioną na liczbach naturalnych, tzn $\nu = \sum_{n\geqslant 0}\delta_n$. Wówczas biorąc za E liczby naturalne widzimy, że miary μ i ν są wzajemnie osobliwe.

Okazuje się, że (przy minimalnych technicznych założeniach) każdą miarę można rozłożyć na część absolutnie ciągłą i osobliwą. Ponadto absolutna ciągłość implikuje istnienie gęstości. By dokładnie sformułować wynik (zwany Twierdzeniem Lebesgue'a-Radona-Nikodyma) potrzebujemy jeszcze jednej definicji.

Definicja 2.22. Miarę μ na $(X, \mathcal{F})$ nazywamy *σ-skończoną*, jeśli istnieje ciąg zbiorów $A_n \in \mathcal{F}$ taki, że $\bigcup_{n\geqslant 1} A_n = X$ i $\mu(A_n) < \infty$ dla wszystkich n.

Twierdzenie 2.23 (Lebesgue-Radon-Nikodym)**.** *Załóżmy, że μ i ν są dwiema σ-skończonymi miarami na $(X, \mathcal{F})$. Wówczas $\nu = \nu_a + \nu_o$, gdzie $\nu_a \ll \mu$ oraz $\nu_0 \perp \mu$, co więcej rozkład tej postaci jest jednoznaczny. Ponadto miara ν_a ma gęstość względem μ.*

Dowód. Zacznijmy od przypadku miar skończonych μ, ν. Niech $\rho := \mu + \nu$, na przestrzeni Hilberta (nad ciałem liczb rzeczywistych) $L_2(X, \rho)$ zdefiniujmy funkcjonał φ wzorem $\varphi(f) = \int_X f\mathrm{d}\nu$. Wówczas

$$|\varphi(f)| \leqslant \int_X |f|\mathrm{d}\nu \leqslant \Big(\int_X 1^2\mathrm{d}\nu\Big)^{1/2}\Big(\int_X |f|^2\mathrm{d}\nu\Big)^{1/2} \leqslant \nu(X)^{1/2}|f|_{L_2(\rho)},$$

zatem φ jest dobrze określony i ciągły na $L_2(\rho)$. Na mocy twierdzenia Riesza istnieje $g \in L_2(\rho)$ takie, że

$$\int_X f\mathrm{d}\nu = \varphi(f) = \langle f, g\rangle = \int_X fg\mathrm{d}\rho \qquad \text{dla } f \in L_2(\rho). \tag{8}$$

Wykażemy najpierw, że $0 \leqslant g \leqslant 1$ ρ-p.w.. Podstawiając w (8) $f = \mathbb{1}_A$ dla $A = \{x\colon\ g(x) > 1\}$ dostajemy

$$\nu(A) = \int_X \mathbb{1}_A\mathrm{d}\nu = \int_X \mathbb{1}_A g\mathrm{d}\rho \geqslant \int_X \mathbb{1}_A\mathrm{d}\rho = \rho(A) \geqslant \nu(A),$$

zatem wszędzie muszą zachodzić równości, skąd $\rho(A) = 0$. Podobnie, dla $A = \{x\colon\ g(x) < 0\}$ otrzymujemy

$$\nu(A) = \int_X \mathbb{1}_A\mathrm{d}\nu = \int_X \mathbb{1}_A g\mathrm{d}\rho \leqslant 0,$$

więc $\rho(A) = 0$, gdyż w przeciwnym razie ostatnia nierówność byłaby ostra.

Zauważmy, że $\int_X fg\mathrm{d}\rho = \int_X fg\mathrm{d}\mu + \int_X fg\mathrm{d}\nu$, więc (8) możemy równoważnie zapisać jako

$$\int_X f(1-g)\mathrm{d}\nu = \int_X fg\mathrm{d}\mu \qquad \text{dla } f \in L_2(\rho). \tag{9}$$

Niech $E := \{x\colon\ g(x) = 1\}$ i ν_0 będzie miarą ν obciętą do zbioru E, tzn. $\nu_0(A) := \nu(A \cap E)$. Wówczas $\nu_0(X \setminus E) = 0$ oraz na mocy (9)

$$\mu(E) = \int_X \mathbb{1}_E g\mathrm{d}\mu = \int_X \mathbb{1}_E(1-g)\mathrm{d}\nu = 0,$$

czyli $\nu_0 \perp \mu$. Niech $\nu_a := \nu - \nu_0$, wtedy dla dowolnego $A \in \mathcal{F}$,

$$\nu_a(A) = \nu(A \cap (X \setminus E)) = \int_X \mathbb{1}_{A\cap(X\setminus E)}\mathrm{d}\nu = \int_X \frac{1}{1-g}\mathbb{1}_{A\cap(X\setminus E)}(1-g)\mathrm{d}\nu.$$

Funkcja nieujemna $\frac{1}{1-g}\mathbb{1}_{A\cap(X\setminus E)}$ nie musi należeć do $L_2(\rho)$, ale da się monotonicznie aproksymować przez funkcje nieujemne ograniczone, więc na mocy (9) i twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej otrzymujemy

$$\nu_a(A) = \int_X \frac{1}{1-g}\mathbb{1}_{A\cap(X\setminus E)} g\mathrm{d}\mu = \int_A \frac{g}{1-g}\mathbb{1}_{X\setminus E}\mathrm{d}\mu,$$

co pokazuje, że $\nu_a \ll \mu$ oraz $\frac{\mathrm{d}\nu_a}{\mathrm{d}\mu} = \frac{g}{1-g}\mathbb{1}_{\{g\neq 1\}}$.

Jeśli μ i ν są σ-skończone, to istnieją takie zbiory rozłączne $A_n \in \mathcal{F}$, że $\mu(A_n), \nu(A_n) < \infty$ oraz $X = \bigcup_{n\geqslant 1} A_n$. Rozpatrując μ_n i ν_n obcięcia miar μ i ν do A_n dostajemy rozkłady $\nu_n = \nu_{n,a} + \nu_{n,o}$ i wystarczy położyć $\nu_a = \sum_n \nu_{n,a}$, $\nu_o = \sum_n \nu_{n,o}$ oraz zauważyć, że $\frac{\mathrm{d}\nu_a}{\mathrm{d}\mu} = \sum_n \frac{\mathrm{d}\nu_{a,n}}{\mathrm{d}\mu_n}\mathbb{1}_{A_n}$.

Pozostaje wykazać jednoznaczność rozkładu. Załóżmy w tym celu, że istnieją dwa rozkłady $\nu = \tilde{\nu}_a + \tilde{\nu}_o = \nu_a + \nu_o$, $\nu_o(X \setminus E) = \nu_o(X \setminus \tilde{E}) = 0$, $\mu(E) = \mu(\tilde{E}) = 0$. Połóżmy $F = E \cup \tilde{E}$, wtedy dla dowolnego $A \in \mathcal{F}$,

$$\nu_a(A) - \tilde{\nu}_a(A) = \tilde{\nu}_o(A) - \nu_o(A) = \tilde{\nu}_o(A\cap F) - \nu_o(A\cap F) = \nu_a(A\cap F) - \tilde{\nu}_a(A\cap F) = 0,$$

gdzie ostatnia równość wynika z warunku $\mu(F) = 0$ oraz absolutnej ciągłości miar ν_a i $\tilde{\nu}_a$. $\square$

Przykład. Założenie σ-skończoności jest istotne. Rozważmy mianowicie $X = [0,1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0,1])$, ν miarę Lebesgue'a oraz μ miarę liczącą. Wówczas łatwo sprawdzić, że $\nu \ll \mu$, ale nie istnieje gęstość $\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$.

Absolutna ciągłość ma też sens, gdy miara dominowana jest miarą miarą zespoloną.

Definicja 2.24. Założmy, że ν jest miarą zespoloną (miarą ze znakiem), a μ miarą na $(X, \mathcal{F})$. Mówimy, że ν jest *absolutnie ciągła względem* μ (ozn. $\nu \ll \mu$), jeśli dla każdego $A \in \mathcal{F}$ takiego, że $\mu(A) = 0$ zachodzi $\nu(A) = 0$.

Uwaga 2.25. Łatwo sprawdzić, że $\nu \ll \mu$ wtedy i tylko wtedy, gdy $|\nu| \ll \mu$.

Twierdzenie 2.26 (Radon-Nikodym)**.** *Załóżmy, że ν jest miarą zespoloną, a μ miarą σ-skończoną na $(X, \mathcal{F})$. Wówczas ν jest absolutnie ciągła względem μ wtedy i tylko wtedy, gdy miara ν ma gęstość względem μ, tzn. istnieje funkcja $f \in L_1(\mu)$ taka, że $\nu(A) = \int_A f \mathrm{d}\mu$ dla $A \in \mathcal{F}$.*

Dowód. Oczywiście istnienie gęstości implikuje absolutną ciągłość, więc pozostaje udowodnić przeciwną implikację. Zauważmy, że miary $\mathrm{Re}(\nu), \mathrm{Im}(\nu) \ll \mu$, zatem wystarczy rozpatrzeć przypadek miar ze znakiem. Ale wtedy $\nu = \nu_+ - \nu_-$, gdzie $\nu_\pm = \frac{1}{2}(|\nu| \pm \nu) \ll \mu$. Do miar $\nu_\pm$ i μ możemy zastosować Twierdzenie 2.23 i otrzymać gęstośći $f_\pm = \frac{\mathrm{d}\nu_\pm}{\mathrm{d}\mu}$ i wystarczy położyć $f = f_+ - f_-$. Zauważmy, że $\int_X |f| \mathrm{d}\mu \leqslant \int_X f_+ \mathrm{d}\mu + \int_X f_- \mathrm{d}\mu = \nu_+(X) + \nu_-(X) = |\nu|(X) < \infty$, zatem $f \in L_1(\mu)$. $\square$

Wniosek 2.27. *Dla miary zespolonej ν na $(X, \mathcal{F})$ istnieje funkcja mierzalna f na X taka, że $|f| = 1$ $|\nu|$-p.w. oraz $\nu(A) = \int_A f d|\nu|$ dla $A \in \mathcal{F}$.*

Dowód pozostawiamy jako proste ćwiczenie.

2.4 Układy i bazy ortonormalne

Zacznijmy od definicji. Przypomnijmy, że $\delta_{x,y} = \mathbb{1}_{\{x \neq y\}}$.

Definicja 2.28. Rodzinę wektorów $(u_\alpha)_{\alpha \in A}$ nazywamy
i) *układem ortogonalnym*, jeśli $\langle u_\alpha, u_\beta \rangle = 0$ dla $\alpha, \beta \in A$, $\alpha \neq \beta$;
ii) *układem ortonormalnym*, jeśli $\langle u_\alpha, u_\beta \rangle = \delta_{\alpha,\beta}$ dla $\alpha, \beta \in A$.

Fakt 2.29. *Załóżmy, że $u_1, \ldots, u_n$ jest układem ortonormalnym w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ oraz $M = \mathrm{Lin}(u_1, \ldots, u_n)$. Wówczas M jest domkniętą podprzestrzenią $\mathcal{H}$, dla każdego $x \in M$ mamy $|x|^2 = \sum_{k=1}^n |\langle x, u_k \rangle|^2$, ponadto rzut ortogonalny na M ma postać $P_M x = \sum_{k=1}^n \langle x, u_k \rangle u_k$.*

Dowód. Weźmy $x \in M$, wówczas $x = \sum_{k=1}^n a_k u_k$ dla pewnych $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{F}$. Zauważmy, że $\langle x, u_j \rangle = \sum_{k=1}^n a_k \langle u_k, u_j \rangle = a_j$ oraz

$$|x|^2 = \sum_{k,l=1}^n a_k \overline{a_l} \langle u_k, u_l \rangle = \sum_{k=1}^n |a_k|^2 = \sum_{k=1}^n |\langle x, u_k \rangle|^2.$$

Zatem przekształcenie $x \to (\langle x, u_k \rangle)_{k \leqslant n}$ zadaje izometrię z M w $\mathbb{F}^n$ z normą euklidesową, czyli M jest zupełne, a więc domknięte. Wreszcie jeśli $x \in \mathcal{H}$ oraz $P_M x = \sum_{k=1}^{n} a_k u_k$, to $\langle P_M x, u_j \rangle = a_j$, więc $P_M x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, u_k \rangle u_k$. $\square$

Wniosek 2.30 (Nierówność Bessela)**.** *Dla dowolnego układu ortonormalnego $(u_\alpha)_{\alpha \in A}$ i wektora x zachodzi*

$$\sum_{\alpha \in A} |\langle x, u_\alpha \rangle|^2 \leqslant |x|^2.$$

Uwaga 2.31. Pisząc $\sum_{\alpha \in A} c_\alpha < \infty$, gdzie $(c_\alpha)_{\alpha \in A}$ jest pewną rodziną liczb nieujemnych mamy na myśli to, że jedynie przeliczalnie wiele spośród liczb c_α jest niezerowych oraz suma (teraz już co najwyżej przeliczalna) tych liczb jest skończona - dla szeregów liczb dodatnich kolejność sumowania nie gra roli. Jeśli $(a_\alpha)_{\alpha \in A}$ jest rodziną liczb zespolonych taką, że $\sum_\alpha |a_\alpha| < \infty$, to dobrze określona jest suma $\sum_{\alpha \in A} a_\alpha$ (gdyż można się ograniczyć do przeliczalnej podrodziny liczb niezerowych, a suma szeregu bezwględnie zbieżnego nie zależy od kolejności sumowania).

Dowód nierówności Bessela. Niech $B \subset A$ będzie skończonym podzbiorem A oraz M będzie podprzestrzenią rozpiętą przez $(u_k)_{k \in B}$. Wówczas, na mocy Faktu 2.29, $\sum_{k \in B} |\langle x, u_\alpha \rangle|^2 = |P_M x|^2 \leqslant |x|^2$. Stąd wynika, że co najwyżej $|x|^2/\varepsilon$ z pośród liczb $(|\langle x, u_\alpha \rangle|^2)_{\alpha \in A}$ jest większych od $\varepsilon > 0$, a więc tylko przeliczalnie wiele spośród tych liczb jest niezerowych. Stąd

$$\sum_{\alpha \in A} |\langle x, u_\alpha \rangle|^2 = \sup \Big\{ \sum_{\alpha \in B} |\langle x, u_\alpha \rangle|^2 \colon\ B \subset A, B \text{ skończone} \Big\} \leqslant |x|^2.$$

$\square$

Definicja 2.32. Mówimy, że rodzina wektorów $(u_\alpha)_{\alpha \in A}$ jest *liniowo gęsta* w przestrzeni unormowanej X, jeśli przestrzeń liniowa generowana przez te wektory jest gęsta w X.

Twierdzenie 2.33. *Załóżmy, że $(u_\alpha)_{\alpha \in A}$ jest układem ortonormalnym w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. Wówczas następujące warunki są równoważne*
i) $(u_\alpha)_{\alpha \in A}$ jest zupełny *(maksymalny), tzn. nie istnieje niezerowy wektor v ortogonalny do wszystkich wektorów u_α;*
ii) $(u_\alpha)_{\alpha \in A}$ jest liniowo gęsty w $\mathcal{H}$;
iii) dla każdego $x \in \mathcal{H}$ zachodzi $|x|^2 = \sum_{\alpha \in A} |\langle x, u_\alpha \rangle|^2$.

Dowód. i)$\Rightarrow$ ii). Niech $M = \overline{\mathrm{Lin}(u_\alpha \colon\ \alpha \in A)}$. Wówczas M jest domkniętą podprzestrzenią $\mathcal{H}$ oraz $M^\perp = \{0\}$ zatem $M = \mathcal{H}$.

ii)$\Rightarrow$ iii). Wiemy już, że $\sum_{\alpha\in A}|\langle x,u_\alpha\rangle|^2\leqslant|x|^2$. Wystarczy wykazać przeciwne oszacowanie. Ustalmy $\varepsilon>0$, z liniowej gęstości rodziny $(u_\alpha)_\alpha$, istnieje $B\subset A$ skończony oraz wektor $v\in M:=\mathrm{Lin}(u_\alpha\colon\ \alpha\in B)$ taki, że $|x-v|\leqslant\varepsilon$. Stąd

$$\begin{aligned}|x|^2&=|P_Mx|^2+|x-P_Mx|^2\leqslant|P_Mx|^2+|x-v|^2\leqslant|P_Mx|^2+\varepsilon^2\\&=\sum_{\alpha\in B}|\langle x,u_\alpha\rangle|^2+\varepsilon^2\leqslant\sum_{\alpha\in A}|\langle x,u_\alpha\rangle|^2+\varepsilon^2,\end{aligned}$$

z dowolności $\varepsilon>0$ wynika nierówność $\sum_{\alpha\in A}|\langle x,u_\alpha\rangle|^2\geqslant|x|^2$.

iii)$\Rightarrow$ i) Jeśli v jest prostopadły do wszystkich u_α, to $|v|^2=\sum_{\alpha\in A}|\langle v,u_\alpha\rangle|^2=0$, zatem $v=0$. □

Definicja 2.34. Rodzinę wektorów $(u_\alpha)_{\alpha\in A}$ spełniającą warunki poprzedniego twierdzenia nazywamy *bazą ortonormalną* $\mathcal{H}$.

Twierdzenie 2.35. *Każdy układ ortonormalny w przestrzeni Hilberta moższa rozszerzyć do bazy ortonormalnej. W szczególności każda przestrzeń Hilberta ma bazę ortonormalną.*

Dowód. Z lematu Kuratowskiego-Zorna łatwo wynika, że wyjściowy układ wektorów da się rozszerzyć do maksymalnego układu ortonormalnego w $\mathcal{H}$. Na mocy Twierdzenia 2.33 taki układ jest bazą ortonormalną. □

Twierdzenie 2.36. *Załóżmy, że $(u_\alpha)_{\alpha\in A}$ jest bazą ortonormalną przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. Wówczas*
i) przekształcenie T dane wzorem $Tx=(\langle x,u_\alpha\rangle)_{\alpha\in A}$ jest liniową izometrią $\mathcal{H}$ na $\ell_2(A)$;
ii) dla dowolnych $x,y\in\mathcal{H}$ zachodzi następująca tożsamość Parsevala

$$\langle x,y\rangle=\sum_{\alpha\in A}\langle x,u_\alpha\rangle\overline{\langle y,u_\alpha\rangle}.$$

Dowód. i) Na mocy Twierdzenia 2.33, T jest izometrią w $\ell_2(A)$, oczywiście jest liniowe, trzeba pokazać, że jest „na". Ustalmy wektor $a=(a_\alpha)\in\ell_2(A)$, określmy

$$A_n:=\{\alpha\in A\colon\ |a_\alpha|\geqslant 1/n\},\quad x_n:=\sum_{\alpha\in A_n}a_\alpha u_\alpha.$$

Zauważmy, że $\frac{1}{n^2}\#A_n\leqslant\sum_{\alpha\in A}|a_\alpha|^2<\infty$, więc x_n jest dobrze określony. Ponadto dla $m>n$,

$$|x_m-x_n|^2=\sum_{\alpha\in A_m\setminus A_n}|a_\alpha|^2\leqslant\sum_{\alpha\in A}|a_\alpha|^2\mathbb{1}_{\{|a_\alpha|<1/n\}}\to 0 \text{ przy } n\to\infty,$$

(na mocy np. twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej), zatem (x_n) jest ciągiem Cauchy'ego i z zupełności $\mathcal{H}$, x_n zbiega do pewnego x. Mamy wtedy dla $\alpha \in A$,

$$\langle x, u_\alpha \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x_n, u_\alpha \rangle = a_\alpha,$$

czyli $Tx = a$.

ii) Zauważmy, że

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}(\langle x, y \rangle) &= \frac{1}{4}(|x+y|^2 - |x-y|^2) = \frac{1}{4}\Big(\sum_{\alpha\in A} |\langle x+y, u_\alpha\rangle|^2 - \sum_{\alpha\in A} |\langle x-y, u_\alpha\rangle|^2\Big) \\
&= \sum_{\alpha\in A} \frac{1}{4}(|\langle x, u_\alpha\rangle + \langle y, u_\alpha\rangle|^2 - |\langle x, u_\alpha\rangle - \langle y, u_\alpha\rangle|^2) \\
&= \sum_{\alpha\in A} \mathrm{Re}(\langle x, u_\alpha\rangle \overline{\langle y, u_\alpha\rangle}) = \mathrm{Re}\Big(\sum_{\alpha\in A} \langle x, u_\alpha\rangle \overline{\langle y, u_\alpha\rangle}\Big)
\end{aligned}$$

oraz

$$\mathrm{Im}(\langle x, y\rangle) = -\mathrm{Re}(\langle ix, y\rangle) = -\mathrm{Re}\Big(\sum_{\alpha\in A} \langle ix, u_\alpha\rangle \overline{\langle y, u_\alpha\rangle}\Big) = \mathrm{Im}\Big(\sum_{\alpha\in A} \langle x, u_\alpha\rangle \overline{\langle y, u_\alpha\rangle}\Big).$$

□

Uwaga 2.37. Dla układu ortonormalnego $(u_\alpha)_{\alpha\in A}$ oraz liczb (a_α) takich, że $\sum_\alpha |a_\alpha|^2 < \infty$ można określić $v = \sum_\alpha a_\alpha u_\alpha$, tzn. taki wektor $v \in M = \overline{\mathrm{Lin}(u_\alpha \colon \alpha \in A)}$, że $\langle v, u_\alpha\rangle = a_\alpha$ dla $\alpha \in A$. Istotnie $(u_\alpha)_{\alpha\in A}$ jest bazą M i możemy skorzystać z części i) Twierdzenia 2.36.

Zanim sformułujemy kolejny wniosek, ustalmy konwencje, że zbiory skończone uważamy za przeliczalne.

Wniosek 2.38. *Przestrzeń Hilberta jest ośrodkowa wtedy i tylko wtedy, gdy ma przeliczalną bazę ortonormalną.*

Dowód. Niech $(u_\alpha)_{\alpha\in A}$ będzie bazą o.n. $\mathcal{H}$. Zauważmy, że $|u_\alpha - u_\beta| = \sqrt{2}\delta_{\alpha,\beta}$, co dowodzi nieośrodkowości $\mathcal{H}$ dla A nieprzeliczalnych.

Na mocy Twierdzenia 2.36, przestrzeń $\mathcal{H}$ jest izometryczna z $\ell_2(A)$, czyli w przypadku przeliczalnym z ℓ_2^n lub ℓ_2. Te przestrzenie zaś są ośrodkowe (za ośrodek można wybrać np. ciągi o wyrazach wymiernych, o skończonym nośniku). □

2.5 Przykłady baz ortonormalnych

By wykazywać liniową gęstość układów ortonormalnych, a co za tym idzie ich zupełność, wygodnie jest wiedzieć, że funkcje ciągłe są gęste w L_2. Sformułujemy nieco ogólniejszy fakt.

Twierdzenie 2.39. *Załóżmy, że* Ω *jest otwartym podzbiorem* $\mathbb{R}^n$*, zaś* μ *miarą borelowską na* Ω *taką, że* $\mu(K) < \infty$*, gdy* K *jest zwartym podzbiorem* Ω*. Wówczas funkcje ciągłe na* Ω *o nośniku zwartym są gęste* $L_p(\Omega, \mu)$ *dla dowolnego* $1 \leqslant p < \infty$*.*

Dowód Twierdzenia 2.39. Funkcje proste postaci $\sum_{k=1}^{n} a_k \mathbb{1}_{A_k}$ są gęste w $L_p(\mu)$, więc wystarczy, że udowodnimy, że każdą funkcję $\mathbb{1}_A$, $A \in \mathcal{B}(\Omega)$, $\mu(A) < \infty$ da się aproksymować w L_p przez funkcje ciągłe o nośniku zwartym. Ustalmy takie A i $\varepsilon > 0$, wówczas możemy znaleźć zbiór zwarty K i otwarty G takie, że $K \subset A \subset G$ oraz $\mu(G \setminus K) < \varepsilon$. Istnieje funkcja ciągła o nośniku zwartym f i wartościach w $[0, 1]$ taka, że $f = 1$ na K oraz $f = 0$ poza zbiorem G. Mamy $|f - \mathbb{1}_A| \leqslant |\mathbb{1}_G - \mathbb{1}_K|$, zatem $\|f - \mathbb{1}_A\|_p \leqslant \|\mathbb{1}_G - \mathbb{1}_K\|_p \leqslant \varepsilon^{1/p}$, z dowolności $\varepsilon > 0$ wynika gęstość funkcji ciągłych o nośniku zwartym. $\square$

Uwaga 2.40. Twierdzenie jest prawdziwe dla szerszej klasy miar na przestrzeniach topologicznych - zob. np. Twierdzenie 3.14 w [3].

Wniosek 2.41. *Jeśli* Ω *i* μ *są jak w Twierdzeniu 2.39, to funkcje* C^{∞}_{zw} *są gęste w* $L_p(\mu)$*.*

Dowód pozostawiamy jako proste ćwiczenie.

2.5.1 Układ trygonometryczny

Fakt 2.42. *Rodzina funkcji* $(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int})_{n=-\infty}^{\infty}$ *tworzy bazę ortonormalną przestrzeni* $L_2[0, 2\pi]$*.*

Dowód. Ortonormalność wynika stąd, że

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{imt} \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)t} \mathrm{d}t = \delta_{n,m}.$$

By wykazać zupełność zauważmy najpierw, że $L_2[0, 2\pi]$ możemy utożsamiać z $L_2(0, 2\pi)$, a w tej przestrzeni funkcje ciągłe o nośniku zwartym zawartym w $(0, 2\pi)$ są, na mocy Twierdzenia 2.39, gęste. Każdą taką funkcję możemy przedłużyć do funkcji ciągłej 2π-okresowej i z twierdzenia Weierstrassa znaleźć ciąg wielomianów trygonometrycznych (czyli kombinacji liniowych funkcji e^{int}, $n \in \mathbb{Z}$) zbieżny do niej jednostajnie. Zbieżność jednostajna na $[0, 2\pi]$ implikuje zaś zbieżność w $L_2[0, 2\pi]$. $\square$

Uwaga 2.43. i) Przeskalowanie pokazuje, że funkcje $(\frac{1}{\sqrt{b-a}} e^{2\pi int/(b-a)})_{n\in\mathbb{Z}}$ tworzą bazę ortonormalną $L_2[a, b]$ dla $a < b$.
ii) Podobnie jak w Fakcie 2.42 wykazujemy, że rodzina funkcji $(\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{i\langle n,t\rangle})_{n\in\mathbb{Z}^n}$ jest bazą o.n. $L_2([0, 2\pi]^n)$.
iii) Układ (f_n) jak wyżej nazywamy układem trygonometrycznym, a liczby $(\langle g, f_n\rangle)$ współczynnikami Fouriera funkcji g.

Wniosek 2.44. *Mamy* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Dowód. Rozpatrzmy funkcję $f(t) = t$ w przestrzeni $\mathcal{H} = L_2[-\pi, \pi]$. Funkcje $e_n(t) = (2\pi)^{-1/2} e^{int}$, $n \in \mathbb{Z}$ tworzą bazę ortogonalną $\mathcal{H}$, mamy $\langle f, e_0\rangle = 0$ oraz całkując przez części dostajemy dla $n \neq 0$,

$$\sqrt{2\pi}\langle f, e_n\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} te^{-int}\mathrm{d}t = -\frac{t}{in} e^{-int}\Big|_{t=-\pi}^{\pi} + \frac{1}{in}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int}\mathrm{d}t = (-1)^n 2\pi \frac{i}{n}.$$

Zatem

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\langle f, e_n\rangle|^2 = \frac{1}{4\pi}|f|^2 = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{6}.$$

$\square$

2.5.2 Układ Haara

Definicja 2.45. Określmy $H(x) = \mathbb{1}_{[0,1/2)} - \mathbb{1}_{[1/2,1)}$ oraz dla $n, k \in \mathbb{Z}$,

$$h_{n,k} = 2^{n/2}h(2^n t - k) = 2^{n/2}\Big(\mathbb{1}_{[k2^{-n},(2k+1)2^{-n-1})} - \mathbb{1}_{[(2k+1)2^{-n-1},(k+1)2^{-n})}\Big).$$

Rodzinę $(h_{n,k})_{n,k\in\mathbb{Z}}$ nazywamy *układem Haara*.

Zauważmy, że

$$\int_{\mathbb{R}} h_{n,k}\mathrm{d}x = 0, \quad \int_{\mathbb{R}} h_{n,k}h_{m,l}\mathrm{d}x = \delta_{(n,k),(m,l)}. \tag{10}$$

Pierwsza równość jest oczywista. By udowodnić drugą, wystarczy zauważyć, że jeśli $n = m$ i $k \neq l$, to funkcje $h_{n,k}$ i $h_{m,l}$ mają rozłączne nośniki, a jeśli $n < m$ to funkcja $h_{n,k}$ jest stała na nośniku $h_{m,l}$.

Zanim przejdziemy do przypadku prostej rzeczywistej, zdefiniujmy układ Haara na $[0, 1]$.

Definicja 2.46. Niech $h_0(t) = \mathbb{1}_{[0,1]}$, wówczas rodzinę złożoną z h_0 oraz funkcji $(h_{n,k})_{n\geqslant 0, 0\leqslant k\leqslant 2^n-1}$ nazywamy *układem Haara na* $[0,1]$.

Uwaga 2.47. Czasem wygodnie jest przenumerować układ Haara na $[0,1]$ kładąc $h_m = h_{n,k}$ dla $m = 2^n + k$, $0 \leqslant k \leqslant 2^n - 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Fakt 2.48. *Układ Haara na* $[0,1]$ *jest bazą ortonormalną* $L_2[0,1]$.

Dowód. Ortonormalność wynika z (10). By wykazać liniową gęstość określmy dla $n = 1, 2, \ldots$ następujące podprzestrzenie $L_2[0,1]$:

$$X_n := \mathrm{Lin}\Big(h_0, h_{m,k}\colon\ m \leqslant n-1, 0 \leqslant k \leqslant 2^m - 1\Big),$$
$$Y_n := \mathrm{Lin}\Big(\mathbb{1}_{[k2^{-n},(k+1)2^{-n})}\colon\ 0 \leqslant k \leqslant 2^n - 1\Big).$$

Wówczas $X_n \subset Y_n$ oraz $\dim(X_n) = 2^n = \dim(Y_n)$, zatem $X_n = Y_n$. Ponieważ każdą funkcję ciągłą na $[0,1]$ można aproksymować w normie $L_2[0,1]$ przez funkcje diadyczne (tzn. należące do pewnego Y_n) oraz funkcje ciągłe są gęste w L_2, więc układ Haara jest liniowo gęsty. □

Fakt 2.49. *Układ Haara w* $\mathbb{R}$, $(h_{n,k})_{n,k\in\mathbb{Z}}$ *jest bazą ortonormalną* $L_2(\mathbb{R})$.

Dowód. Ortonormalność wynika z (10). By wykazać liniową gęstość musimy pokazać, że $\overline{X} = L_2(\mathbb{R})$, gdzie $X = \mathrm{Lin}(h_{n,k}\colon\ n,k \in \mathbb{Z})$.

Zauważmy najpierw, że z udowodnionej poprzednio zupełności układu Haara na $[0,1]$ wynika, że jeśli f jest całkowalna z kwadratem i ma nośnik zawarty w $[0,1]$, to $f = \int_0^1 f\mathrm{d}t\mathbb{1}_{[0,1]} + \sum_{n\geqslant 0}\sum_{0\leqslant k\leqslant 2^n-1}\langle f, h_{n,k}\rangle h_{n,k}$ (zbieżność szeregu w normie L_2). Przeskalowując tą równość pokazujemy, że jeśli $f \in L_2(\mathbb{R})$ ma nośnik zawarty w $[0, 2^m]$, to

$$f = 2^{-m}\int_0^{2^m} f\mathrm{d}t\mathbb{1}_{[0,2^m]} + \sum_{n\geqslant -m}\ \sum_{0\leqslant k\leqslant 2^{m+n}-1}\langle f, h_{n,k}\rangle h_{n,k}.$$

Załóżmy teraz, że $f \in L_2$ ma nośnik zawarty w $[0, M]$, wówczas dla $2^m > M$ dostajemy

$$f - 2^{-m}\int_0^{2^m} f\mathrm{d}t\mathbb{1}_{[0,2^m]} \in \overline{\mathrm{Lin}(h_{n,k}\colon n \geqslant -m, 0 \leqslant k \leqslant 2^{m+n} - 1)} \subset \overline{X}.$$

Zauważmy jednak, że $\|2^{-m}\int_0^{2^m} f\mathrm{d}t\mathbb{1}_{[0,2^m]}\|_2 = 2^{-m/2}|\int_0^M f\mathrm{d}t| \to 0$ przy $m \to \infty$, zatem $f \in \overline{X}$.

Ponieważ $f = f\mathbb{1}_{[0,\infty)} - f\mathbb{1}_{(-\infty,0)}$, więc $\overline{X}$ zawiera wszystkie funkcje z $L_2(\mathbb{R})$ o nośniku zwartym, a że takie funkcje są gęste w L_2, to układ Haara jest liniowo gęsty w $L_2(\mathbb{R})$. □

Uwaga 2.50. Układ Haara na $\mathbb{R}$ to przykład rodziny *falek*. Jeśli ψ jest funkcją na $\mathbb{R}$ taką, że układ $\psi_{n,k} := 2^{n/2}\psi(2^n t - k)$, $n, k \in \mathbb{Z}$ jest bazą ortonormalną $L_2[0,1]$, to ψ nazywamy falkową funkcją macierzystą, a $(\psi_{n,k})$ układem falek. Można udowodnić, że istnieje falkowa funkcja macierzysta, która jest ciągła i ma nośnik zwarty. Falki mają wiele ciekawych własności i są bardzo użyteczne w zastosowaniach zob. np. [4].

2.5.3 Układ Walsha

Definicja 2.51. Dla $n = 1, 2, \ldots$ definiujemy *funkcje Rademachera* wzorem $r_n(t) = \sin(2^n \pi t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Niech $\mathcal{S}$ oznacza rodzinę skończonych podzbiorów $\{1, 2, \ldots\}$. *Układ Walsha* $(w_A)_{A\in\mathcal{S}}$ określamy wzorem

$$w_\emptyset \equiv 1, \quad w_A = \prod_{n\in A} r_n \text{ dla } A \in \mathcal{S}, A \neq \emptyset.$$

Uwaga 2.52. Funkcje Rademachera traktowane jako zmienne losowe na $[0,1]$ z miarą Lebesgue'a są niezależne, ponadto z prawdopodobieństwem $1/2$ są równe 1 i -1.

Fakt 2.53. *Układ Walsha jest bazą ortonormalną* $L_2[0,1]$.

Dowód. Ponieważ $r_n^2 = 1$ p.w., więc $w_A w_B = w_{A\triangle B}$ p.w., gdzie $A\triangle B$ oznacza różnicę symetryczną zbiorów A i B. Zauważmy, że wszystkie r_m dla $m < n$ są stałe na odcinkach diadycznych postaci $(k2^{1-n}, (k+1)2^{1-n})$, natomiast całka z r_n po każdym z takich odcinków jest równa zero. Stąd

$$\langle w_A, w_B\rangle = \int_0^1 w_{A\triangle B}(t)\mathrm{d}t = \mathbb{1}_{\{A\triangle B=\emptyset\}} = \delta_{A,B},$$

czyli w_A jest układem ortonormalnym. By wykazać jego liniową gęstość zauważmy, że przestrzeń $X_n = \mathrm{Lin}(w_A\colon\ A \subset \{1, 2, \ldots, n\})$ zawiera się w przestrzeni Y_n funkcji stałych na odcinkach diadycznych $(k2^{-n}, (k+1)2^{-n})$, $0 \leqslant k \leqslant 2^n - 1$. Z niezależności liniowej funckji w_A obie te przestrzenie mają wymiar 2^n, zatem się pokrywają. Każdą funkcję ciągłą na $[0,1]$ można aproksymować w L_2 przez funkcje z pewnego Y_n, skąd wynika linowa gęstość układu Walsha w $L_2[0,1]$. $\square$

2.5.4 Ortogonalizacja Grama-Schmidta. Wielomiany ortogonalne

Zacznijmy od przypomnienia procedury zwanej ortogonalizacją Grama-Schmidta. Załóżmy, że $(w_n)_{n=1}^N$, $N \leqslant \infty$ jest liniowo niezależnym ciągiem wektorów z przestrzeni unitarnej H. Definiujemy indukcyjnie wektory $(u_n)_{n=1}^N$ oraz ich znormalizowane wersje $(v_n)_{n=1}^N$ w następujący sposób:

$$u_1 := w_1, \quad v_1 = \frac{u_1}{|u_1|} = \frac{w_1}{|w_1|},$$
$$u_n := w_n - \sum_{k=1}^{n-1} \langle v_k, w_n \rangle v_k = w_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{|u_k|^2} \langle u_k, w_n \rangle u_k, \quad v_n = \frac{u_n}{|u_n|}, \quad n \geqslant 2.$$

Nietrudno indukcyjnie wykazać, że $(u_n)_{n=1}^N$ jest układem ortogonalnym, a $(v_n)_{n=1}^N$ układem ortonormalnym oraz $\mathrm{Lin}(v_1, \ldots, v_n) == \mathrm{Lin}(u_1, \ldots, u_n) = \mathrm{Lin}(w_1, \ldots, w_n)$ dla $n \leqslant N$. W szczególności, jeśli $(w_n)_{n=1}^N$ jest liniowo gęsty, to $(v_n)_{n=1}^N$ też jest liniowo gęsty.

Jeśli weźmiemy przestrzeń $\mathcal{H} = L_2(X, \mu)$, gdzie μ jest miarą borelowską na $X \subset \mathbb{R}$ taką, że $\int_X t^{2n} \mathrm{d}\mu(t) < \infty$ dla wszystkich n oraz μ nie jest skupiona na zbiorze skończonym, to ortogonalizując ciąg $(1, t, t^2, \ldots)$ otrzymamy układ ortogonalny wielomianów $(w_n)_{n \geqslant 0}$, gdzie w_n jest wielomianem stopnia n. W ten sposób (po odpowiednim znormalizowaniu) otrzymujemy klasyczne rodziny wielomianów ortogonalnych.

3 Twierdzenie Hahna-Banacha

3.1 Lemat Banacha

Definicja 3.1. Niech X będzie przestrzenią liniową nad ciałem liczb rzeczywistych. Funkcję $p\colon X \to \mathbb{R}$ nazywamy *funkcjonałem Banacha*, jeśli spełnia następujące dwa warunki:
i) $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$ dla $x, y \in X$;
ii) $p(tx) = tp(x)$ dla $x \in X$, $t > 0$.

Lemat 3.2 (Lemat Banacha). *Załóżmy, że X_0 jest podprzestrzenią liniową przestrzeni liniowej X, p funkcjonałem Banacha na X, zaś $f\colon X_0 \mapsto \mathbb{R}$ przekształceniem liniowym takim, że $f(x) \leqslant p(x)$ dla $x \in X_0$. Wówczas istnieje funkcjonał liniowy $F\colon X \mapsto \mathbb{R}$ będący przedłużeniem f taki, że $F(x) \leqslant p(x)$ dla $x \in X$.*

Dowód. Niech Φ oznacza zbiór wszystkich przedłużeń funkcjonału f dominowanych przez p, tzn. para $(\varphi, X_\varphi) \in \Phi$, jeśli X_φ jest podprzestrzenią liniową X zawierającą X_0, $\varphi\colon X_\varphi \mapsto \mathbb{R}$ jest funkcjonałem liniowym, który na X_0 pokrywa się z f oraz $\varphi(x) \leqslant p(x)$ dla $x \in X_\varphi$. Oczywiście $(f, X_0) \in \Phi$.

Na Φ możemy zdefiniować porządek częściowy kładąc

$$(\varphi_1, X_{\varphi_1}) \prec (\varphi_2, X_{\varphi_2}), \quad \text{jeśli } X_{\varphi_1} \subset X_{\varphi_2} \text{ oraz } \varphi_2(x) = \varphi_1(x) \text{ dla } x \in X_{\varphi_1}.$$

Każdy łańcuch $(\varphi_i, X_{\varphi_i})_{i\in I}$ w Φ ma ograniczenie górne – wystarczy położyć $X_\varphi = \bigcup_{i\in I} X_{\varphi_i}$ oraz $\varphi(x) = \varphi_i(x)$ dla $x \in X_{\varphi_i}$. Zatem, na mocy lematu Kuratowskiego-Zorna, istnieje w Φ element maksymalny $(\varphi_m, X_{\varphi_m})$. Wystarczy pokazać, że $X_{\varphi_m} = X$.

Założmy przeciwnie, że istnieje $x_0 \in X \setminus X_{\varphi_m}$. Połóżmy

$$X_1 = \mathrm{Lin}(X_{\varphi_m}, x_0) = \{z + \lambda x_0 \colon\ z \in X_{\varphi_m}, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

oraz określmy $\varphi_1 \colon X_1 \mapsto \mathbb{R}$ wzorem

$$\varphi_1(z + \lambda x_0) = \varphi_m(z) + \lambda u, \quad z \in X_{\varphi_m}, \lambda \in \mathbb{R},$$

gdzie $u \in [a, b]$ oraz

$$b := \inf\{p(z+x_0)-\varphi_m(z)\colon\ z \in X_{\varphi_m}\}, \quad a := \sup\{-p(z-x_0)+\varphi_m(z)\colon\ z \in X_{\varphi_m}\}.$$

Zauważmy, że takie u można znaleźć, tzn. $b \geqslant a$, gdyż dla $z_1, z_2 \in X_{\varphi_m}$,

$$\begin{aligned}&(p(z_1 + x_0) - \varphi_m(z_1)) - (-p(z_2 - x_0) + \varphi_m(z_2))\\ &\quad = p(z_1 + x_0) + p(z_2 - x_0) - \varphi_m(z_1 + z_2) \geqslant p(z_1 + z_2) - \varphi_m(z_1 + z_2) \geqslant 0.\end{aligned}$$

Oczywiście φ_1 jest liniowym przedłużeniem φ_m do X_1. Pokażemy, że jest dominowany przez p, co będzie oznaczało, że $(\varphi_1, X_{\varphi_1}) \in \Phi$ i przeczyło maksymalności $(\varphi_m, X_{\varphi_m})$.

Weźmy $x = z+\lambda x_0 \in X_1$, gdzie $z \in X_{\varphi_m}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Mamy trzy możliwości:
i) $\lambda = 0$, wówczas $\varphi_1(x) = \varphi_1(z) \leqslant p(z) = p(x)$,
ii) $\lambda > 0$ wtedy na podstawie definicji b, tego, że $u \leqslant b$ i jednorodności p,

$$\varphi_1(x) = \lambda\varphi_m\Big(\frac{z}{\lambda}\Big) + \lambda u \leqslant \lambda\Big(p\Big(\frac{z}{\lambda} + x_0\Big) - b\Big) + \lambda u \leqslant p(z + \lambda x_0) = p(x).$$

iii) $\lambda < 0$, tym razem wykorzystujemy definicję a,

$$\varphi_1(x) = -\lambda\varphi_m\Big(-\frac{z}{\lambda}\Big)+\lambda u \leqslant -\lambda\Big(p\Big(-\frac{z}{\lambda}-x_0\Big)+a\Big)+\lambda u \leqslant p(z+\lambda x_0) = p(x).$$

$\square$

Uwaga 3.3. i) Lemat Banacha nie zakłada żadnej struktury topologicznej przestrzeni X.
ii) Każda przestrzeń liniowa nad ciałem liczb zespolonych jest też przestrzenią liniową nad $\mathbb{R}$.

Wniosek 3.4. *Istnieje funkcjonał* $\varphi\colon \ell_\infty \mapsto \mathbb{R}$ *spełniający następujące warunki:*
i) $\liminf_{n\to\infty} x_n \leqslant \varphi(x) \leqslant \limsup_{n\to\infty} x_n$, *w szczególności* $\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} x_n$ *dla ciągów zbieżnych oraz* $\|\varphi\| = 1$;
ii) $\varphi(\tau_k(x)) = \varphi(x)$ *dla* $x \in \ell_\infty$, $k = 0, 1, \ldots$, *gdzie* $\tau_k((x_n)) = (x_{n+k})$.

Funkcjonał o tych własnościach nazywamy *średnią Banacha na* $\mathbb{N}$.

Dowód. Zastosujmy lemat Banacha do $X_0 = c$ – przestrzeni ciągów ograniczonych, $X = \ell_\infty$, $p(x) := \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j$ oraz $f(x) = \lim_{n\to\infty} x_n$. Otrzymamy funkcjonał φ na X rozszerzający f i dominowany przez p. Warunek i) wynika stąd, że $p(x) \leqslant \limsup x_n$ oraz $\varphi(x) = -\varphi(-x) \geqslant -\limsup(-x_n) = \liminf x_n$.

Warunek ii) jest konsekwencją łatwego do sprawdzenia faktu, że $p(\tau_k(x) - x) = p(x - \tau_k(x)) = 0$. □

Twierdzenie 3.5 (Twierdzenie Hahna-Banacha)**.** *Załóżmy, że* X_0 *jest podprzestrzenią przestrzeni unormowanej* X *oraz* $\varphi_0\colon X_0 \mapsto \mathbb{F}$ *jest ciągłym funkcjonałem liniowym. Wówczas* φ_0 *można przedłużyć do ciągłego funkcjonału linowego* $\varphi\colon X \mapsto \mathbb{F}$ *takiego, że* $\|\varphi\| = \|\varphi_0\|$.

Dowód. i) Przypadek rzeczywisty, tzn. $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Określamy wówczas $p(x) = \|x\|\|\varphi_0\|$, p jest funkcjonałem Banacha na X, ponadato $\varphi_0 \leqslant p$ na X_0. Na mocy lematu Banacha istnieje funkcjonał liniowy φ na X rozszerzający φ_0 i dominowany przez p, ale wtedy $\|\varphi\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \varphi(x) \leqslant \sup_{\|x\|\leqslant 1} p(x) = \|\varphi_0\|$ oraz oczywiście $\|\varphi\| \geqslant \|\varphi_0\|$.

ii) Przypadek $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ jest nieco bardziej skomplikowany. Najpierw spójrzmy na przestrzenie liniowe X i X_0 jako przestrzenie nad ciałem liczb rzeczywistych i zastosujmy lemat Banacha do funkcjonału $f = \mathrm{Re}(\varphi_0)$ i $p(x) = \|x\|\|\varphi_0\|$. Otrzymamy przekształcenie liniowe $F\colon X \to \mathbb{R}$ rozszerzające f i dominowane przez p. Zdefiniujmy $\varphi(x) := F(x) + iF(-ix)$. Zauważmy, że $F = \mathrm{Re}(\varphi)$ stąd dla $x \in X_0$

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \mathrm{Re}(\varphi_0(x)) + i\mathrm{Re}(\varphi_0(-ix)) = \mathrm{Re}(\varphi_0(x)) + i\mathrm{Re}(-i\varphi_0(x)) \\ &= \mathrm{Re}(\varphi_0(x)) + i\mathrm{Im}(\varphi_0(x)) = \varphi_0(x).\end{aligned}$$

Funkcjonał φ jest liniowy nad $\mathbb{R}$, by wykazać jego liniowość nad $\mathbb{C}$ wystarczy zauważyć, że

$$\varphi(ix) = F(ix) + iF(x) = i(iF(-ix) + F(x)) = i\varphi(x).$$

Aby obliczyć normę φ ustalmy $x \in X$ i dobierzmy $\lambda \in \mathbb{C}$ takie, że $|\lambda| = 1$ oraz $\lambda\varphi(x) = |\varphi(x)|$. Wtedy

$$|\varphi(x)| = \varphi(\lambda x) = \operatorname{Re}(\varphi(\lambda x)) = F(\lambda x) \leqslant p(\lambda x) = \|x\|\|\varphi_0\|,$$

stąd $\|\varphi\| \leqslant \|\varphi_0\|$, a nierówność przeciwna jest oczywista. □

Wniosek 3.6. *Jeśli X jest przestrzenią unormowaną oraz $x \in X$, $x \neq 0$, to istnieje funkcjonał $\varphi \in X^*$ taki, że $\|\varphi\| = 1$ oraz $\varphi(x) = \|x\|$. W szczególności funkcjonały liniowe ciągłe rozdzielają punkty z X.*

Dowód. Przyjmijmy $X_0 := \operatorname{Lin}(x)$ oraz $\varphi_0(\lambda x) = \lambda\|x\|$ dla $\lambda \in \mathbb{F}$. Wówczas $\varphi_0 \in X_0^*$ i $\|\varphi_0\| = 1$, więc pierwsza część wniosku wynika z twierdzenia Hahna-Banacha. Druga część wynika z pierwszej zastosowanej do wektora $x - y$ dla $x \neq y$. □

3.2 Twierdzenie Mazura

Twierdzenie 3.7 (Twierdzenie Mazura o oddzielaniu)**.** *Załóżmy, że A i B są rozłącznymi zbiorami wypukłymi w przestrzeni umormowanej X, zaś A jest zbiorem otwartym. Wówczas istnieje funkcjonał $\varphi \in X^*$ taki, że*

$$\operatorname{Re}(\varphi(a)) < \inf_{b\in B} \operatorname{Re}(\varphi(b)) \quad \textit{dla } a \in A.$$

Dowód. Przeprowadzimy dowód dla $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, przypadek zespolony wnioskujemy z rzeczywistego tak jak w dowodzie twierdzenia Hahna-Banacha.

Niech

$$C := A - B + x_0 = \{a - b + x_0\colon\ a \in A, b \in B\},$$

gdzie x_0 jest pewnym ustalonym punktem z $B - A$. Zauważmy, że $0 \notin B - A$, bo $A \cap B = \emptyset$, zatem $x_0 \notin C$. Ponadto C jest otwarty, wypukły i zawiera 0. Określmy funkcjonał Minkowskiego

$$p_C(x) := \inf\{t > 0\colon x/t \in C\},$$

ponadto niech $X_0 := \operatorname{Lin}(x_0)$ i $f(tx_0) := t$. Wowczas p_C jest funkcjonałem Banacha i $f \leqslant p_C$ na X_0 (bo dla $t > 0$, $f(tx_0) = t \leqslant tp_C(x_0) = p_C(tx_0)$, gdyż $x_0 \notin C$, a dla $t \leqslant 0$, $f(tx_0) = t \leqslant 0 \leqslant p_C(tx_0)$). Zatem istnieje przekształcenie liniowe $\varphi\colon X \mapsto \mathbb{R}$ rozszerzające f i dominowane przez p_C. Zbiór C jest otwarty i $0 \in C$ zatem C zawiera pewną kulkę o promieniu $r > 0$ i środku w zerze. Stąd, jeśli $\|x\| \leqslant 1$, to $\varphi(rx) \leqslant p_C(rx) \leqslant 1$, zatem $\|\varphi\| \leqslant 1/r$, czyli $\varphi \in X^*$. Zauważmy, że jeśli $a \in A$ i $b \in B$, to $a-b+x_0 \in C$, a zatem z otwartości C, $\varphi(a-b+x_0) \leqslant p_C(a-b+x_0) < 1$, czyli $\varphi(a) < \varphi(b) + 1 - \varphi(x_0) = \varphi(b)$. Z otwartości i wypukłości A wynika łatwo, że $\varphi(A)$ jest zbiorem jednopunktowym (co jest niemożliwe) lub odcinkiem otwartym, a stąd dla $a \in A$, $\varphi(a) < \sup_{a' \in A} \varphi(a') \leqslant \inf_{b \in B} \varphi(b)$. □

4 Przestrzenie dualne

Podczas tego wykładu zbadamy jak wyglądają przestrzenie dualne do podstawowych przestrzeni Banacha.

4.1 Przestrzeń L_p^*

Wiemy już, że każdy funkcjonał na przestrzeni Hilberta jest postaci $\langle \cdot, x \rangle$ dla $x \in \mathcal{H}$, czyli $L_2(\mu)^*$ można utożsamiać z $L_2(\mu)$. Kolejne twierdzenie uogólnia ten wynik.

Twierdzenie 4.1. *Załóżmy, że μ jest σ-skończoną miarą na $(X, \mathcal{F})$. Wówczas dla $1 \leqslant p < \infty$, $L_p(X,\mu)^* = L_q(X,\mu)$, gdzie $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ dla $1 < p < \infty$ oraz $q = \infty$ dla $p = 1$. Dokładniej, $\varphi \in L_p(X,\mu)^*$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $f \in L_q(X,\mu)$ takie, że $\varphi(g) = \int_X fg\mathrm{d}\mu$ dla $g \in L_p(X,\mu)$, ponadto $\|\varphi\| = \|f\|_q$.*

Dowód. Zauważmy, że jeśli $\varphi(g) = \int_X fg\mathrm{d}\mu$ dla pewnego $f \in L_q$, to z nierówności Höldera wynika, że $\varphi \in L_p^*$ oraz $\|\varphi\| \leqslant \|f\|_q$. Musimy zatem pokazać implikację przeciwną, tzn. dla $\varphi \in L_p^*$ istnieje $f \in L_q(\mu)$ takie, że $\varphi(g) = \int_X fg\mathrm{d}\mu$ dla $g \in L_p(\mu)$ oraz $\|f\|_q \leqslant \|\varphi\|$.

Najpierw rozpatrzymy przypadek, gdy μ jest miarą skończoną. Ustalmy $\varphi \in L_p(X,\mu)^*$ i określmy $\nu(A) := \varphi(\mathbb{1}_A)$ dla $A \in \mathcal{F}$. Pokażemy, że ν jest miarą zespoloną (miarą ze znakiem w przypadku rzeczywistym). Istotnie, niech $A = \bigcup_{n=1}^{\infty}$, $A_n \in \mathcal{F}$, $A_n \cap A_m = \emptyset$ dla $n \neq m$, wówczas

$$\Big\|\mathbb{1}_A - \sum_{n=1}^{N} \mathbb{1}_{A_n}\Big\|_p = \Big\|\mathbb{1}_{A \setminus \bigcup_{n \leqslant N} A_n}\Big\|_p = \mu\Big(\bigcup_{n \leqslant N} A_n\Big)^{1/p} \to 0 \text{ przy } N \to \infty,$$

stąd

$$\nu(A) = \lim_{N\to\infty} \varphi\Big(\sum_{n=1}^{N} \mathbb{1}_{A_n}\Big) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \varphi(\mathbb{1}_{A_n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n).$$

Ponadto, jeśli $\mu(A) = 0$, to $\mathbb{1}_A = 0$ w $L^p(\mu)$, czyli $\nu(A) = \varphi(0) = 0$, zatem miara ν jest absolutnie ciągła względem μ i z twierdzenia Radona-Nikodyma wynika, że istnieje gęstość $f = \frac{d\nu}{d\mu} \in L_1(\mu)$.

Dla funkcji prostych $g = \sum_{k=1}^n a_k \mathbb{1}_{A_k}$, zachodzi

$$\begin{aligned}\varphi(g) &= \sum_{k=1}^n a_k \varphi(\mathbb{1}_{A_k}) = \sum_{k=1}^n a_k \nu(A_k) = \sum_{k=1}^n a_k \int_{A_k} f \mathrm{d}\mu \\ &= \sum_{k=1}^n a_k \int_X \mathbb{1}_{A_k} f d\mu = \int_X fg \mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

Weźmy teraz $g \in L_\infty(\mu) \subset L_p(\mu)$, wówczas istnieje ciąg funkcji prostych g_n taki, że $\|g_n - g\|_\infty \to 0$, stąd $\|g_n - g\|_p \leqslant \mu(X)^{1/p}\|g_n - g\|_\infty \to 0$ oraz

$$\Big|\int_X fg\mathrm{d}\mu - \int_X fg_n\mathrm{d}\mu\Big| \leqslant \int_X |f||g_n - g|\mathrm{d}\mu \leqslant \|g_n - g\|_\infty \int_X |f|\mathrm{d}\mu \to 0.$$

Zatem z ciągłośći φ,

$$\varphi(g) = \lim_{n\to\infty} \varphi(g_n) = \lim_{n\to\infty} \int_X fg_n\mathrm{d}\mu = \int_X fg\mathrm{d}\mu \quad \text{dla } g \in L_\infty(X, \mu).$$

Pokażemy teraz, że $f \in L_q$ oraz $\|f\|_q \leqslant \|\varphi\|$. W tym celu załóżmy najpierw, że $1 < p < \infty$ i określmy $g_n := \min(|f|, n)^{q/p} \frac{\overline{f}}{|f|} \mathbb{1}_{\{f\neq 0\}}$. Wówczas $\|g_n\|_p = (\int_X \min(|f|, n)^q \mathrm{d}\mu)^{1/p} < \infty$ oraz

$$\varphi(g_n) = \int_X fg_n\mathrm{d}\mu = \int_X |f| \min(|f|, n)^{q/p}\mathrm{d}\mu \geqslant \int_X \min(|f|, n)^q\mathrm{d}\mu.$$

Stąd $\|\varphi\| \geqslant |\varphi(g_n)|/\|g_n\|_p \geqslant (\int_X \min(|f|, n)^q \mathrm{d}\mu)^{1/q}$ i, biorąc $n \to \infty$, dostajemy $\|f\|_q \leqslant \|\varphi\| < \infty$. W przypadku $p = 1$ (czyli $q = \infty$) połóżmy dla $A > 0$, $g_A := \frac{\overline{f}}{|f|}\mathbb{1}_{\{|f|\geqslant A\}}$. Wówczas $\|g_A\|_1 = \mu(|f| \geqslant A)$ i

$$\|\varphi\|\|g_A\|_1 \geqslant \varphi(g_A) \geqslant \int_X fg_A\mathrm{d}\mu = \int_X |f|\mathbb{1}_{\{|f|\geqslant A\}}\mathrm{d}\mu \geqslant A\mu(|f| \geqslant A) = A\|g_A\|_1,$$

zatem dla $A > \|\varphi\|$, $\mu(|f| \geqslant A) = \|g_A\|_1 = 0$ i z dowolności A dostajemy $\|f\|_\infty \leqslant \|\varphi\|$.

By zakończyć dowód w przypadku $\mu(X) < \infty$ należy tylko pokazać, że $\varphi(g) = \int_X fg\mathrm{d}\mu$ dla dowolnego $g \in L_p$. Biorąc $g_n := g\mathbb{1}_{\{|g|\leqslant n\}}$ mamy $g_n \to g$ w L_p, a z nierówności Höldera wynika, że

$$\Big|\int_X fg\mathrm{d}\mu - \int_X fg_n\mathrm{d}\mu\Big| \leqslant \int_X |f||g_n - g|\mathrm{d}\mu \leqslant \|g_n - g\|_p\|f\|_q \to 0,$$

więc istotnie

$$\varphi(g) = \lim_{n\to\infty} \varphi(g_n) = \lim_{n\to\infty} \int_X f g_n \mathrm{d}\mu = \int_X f g \mathrm{d}\mu.$$

W przypadku, gdy $\mu(X) = \infty$, znajdujemy rozbicie $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ na parami rozłączne zbiory $X_n \in \mathcal{F}$ takie, że $\mu(X_n) < \infty$. Ustalmy $\varphi \in L_p(\mu)^*$ i połóżmy

$$\varphi_n(g) = \varphi(g\mathbb{1}_{X_n}) \quad \text{dla } g \in L_p(X_n, \mu).$$

Wówczas

$$|\varphi_n(g)| \leqslant \|\varphi\| \|g\mathbb{1}_{X_n}\|_{L_p(X,\mu)} = \|\varphi\| \|g\|_{L_p(X_n,\mu)},$$

czyli $\varphi_n \in L_p(X_n, \mu)^*$ i z rozważonego poprzedniej przypadku miar skończonych istnieje $f_n \in L_q(X_n, \mu)$ takie, że $\varphi_n(g) = \int_{X_n} f_n g \mathrm{d}\mu$. Niech $f := \sum_{n=1}^{\infty} f_n \mathbb{1}_{X_n}$. Zauważmy, że dla $g \in L_p(X, \mu)$ i $N < \infty$,

$$\int_X g \sum_{n=1}^{N} f_n \mathbb{1}_{X_n} \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{N} \varphi_n(g) = \varphi\Big(g \sum_{n=1}^{N} \mathbb{1}_{X_n}\Big) \leqslant \|\varphi\| \Big\| g \sum_{n=1}^{N} \mathbb{1}_{X_n} \Big\|_p \leqslant \|\varphi\| \|g\|_p.$$

Znowu korzystając z udowodnionych oszacowań dla przypadku miar skończonych dostajemy

$$\begin{aligned} \Big(\int_X |f|^q \mathbb{1}_{\bigcup_{n=1}^{N} X_n} \mathrm{d}\mu\Big)^{1/q} &= \Big\| \sum_{n=1}^{N} f_k \mathbb{1}_{X_k} \Big\|_{L_q(X)} \\ &= \Big\| \sum_{n=1}^{N} f_k \mathbb{1}_{X_k} \Big\|_{L_q(\bigcup_{n=1}^{N} X_n)} \leqslant \|\varphi\|, \end{aligned}$$

biorąc $N \to \infty$ i korzystając z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej dostajemy $\|f\|_q \leqslant \|\varphi\| < \infty$.

Zauważmy, że dla $g \in L_p$, $g\mathbb{1}_{\bigcup_{n\leqslant N} X_n} \to g$ w $L_p(\mu)$, zatem

$$\varphi(g) = \lim_{N\to\infty} \varphi\Big(g\mathbb{1}_{\bigcup_{n\leqslant N} X_n}\Big) = \lim_{N\to\infty} \int_X g \sum_{n=1}^{N} f_n \mathbb{1}_{X_n} \mathrm{d}\mu = \int f g \mathrm{d}\mu,$$

gdzie ostatnia równość wynika z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej ($|fg|$ jest całkowalne z nierówności Höldera). $\square$

Wniosek 4.2. *Dla* $1 \leqslant p < \infty$, $\ell_p^* = \ell_q$, *gdzie* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *dla* $p > 1$ *oraz* $q = \infty$ *dla* $p = 1$.

Uwaga 4.3. Nie jest prawdą, że $L_\infty^* = L_1$, ale zawsze $L_1(X,\mu) \subset L_\infty(X,\mu)^*$, tzn. jeśli $f \in L_1(X,\mu)$, to wzór $\varphi(g) = \int_X fgd\mu$ określa ciągły funkcjonał na $L_\infty(X,\mu)$ oraz $\|\varphi\| = \|f\|_1$. Średnia Banacha, skonstruowana we Wniosku 3.4, jest przykładem funkcjonału na ℓ_∞, który nie jest zadany przez ciąg z ℓ_1. Oczywiście jednak (np. porównując wymiary) $\ell_\infty^n = (\ell_1^n)^*$.

Okazuje się, że ℓ_1 jest podprzestrzenią dualną do pewnej podprzestrzeni ℓ_∞ – mianowicie c_0, czyli przestrzeni ciągów zbieżnych do zera.

Fakt 4.4. *Mamy $c_0^* = \ell_1$, dokładniej $\varphi \in c_0^*$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg $x = (x_n) \in \ell_1$ taki, że $\varphi(y) = \sum_{n=1}^\infty x_n y_n$ dla $y \in c_0$, ponadto $\|x\|_1 = \|\varphi\|$.*

Dowód. Zauważmy najpierw, że jeśli $x \in \ell_1$ i $\varphi(y) = \sum_{n=1}^\infty x_n y_n$, to $|\varphi(y)| \leqslant \|x\|_1\|y\|_\infty$, czyli $\varphi \in c_0^*$ oraz $\|\varphi\| \leqslant \|x\|_1$.

By udowodnić przeciwną implikację weźmy $\varphi \in c_0^*$ i określmy $x_n := \varphi(e_n)$ (gdzie $e_n = (\delta_{n,m})_{m\geqslant 1} \in c_0$). Wtedy $\varphi(\sum_{n=1}^N y_n e_n) = \sum_{n=1}^N y_n\varphi(e_n) = \sum_{n=1}^N x_n y_n$, zatem

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^N |x_n| &= \sup\Big\{\sum_{n=1}^N x_n y_n\colon \max_{1\leqslant n\leqslant N} |y_n| \leqslant 1\Big\}\\ &= \sup\Big\{\varphi\Big(\sum_{n=1}^N y_n e_n\Big)\colon \Big\|\sum_{n=1}^N y_n e_n\Big\|_{c_0} \leqslant 1\Big\} \leqslant \|\varphi\|\end{aligned}$$

i, biorąc $N \to \infty$, dostajemy $x \in \ell_1$ oraz $\|x\|_1 \leqslant \|\varphi\|$. Wreszcie, jeśli $y \in c_0$, to $\|y - \sum_{n=1}^N y_n e_n\| = \max_{n>N} |y_n| \to 0$ przy $N \to \infty$, zatem

$$\varphi(x) = \lim_{N\to\infty} \varphi\Big(\sum_{n=1}^N y_n e_n\Big) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^N x_n y_n = \sum_{n=1}^\infty x_n y_n.$$

□

4.2 Miary regularne i przestrzeń $C(K)^*$

Definicja 4.5. Załóżmy, że X jest przestrzenią topologiczną Hausdorffa, a $\mathcal{B}(X)$ – rodziną borelowskich podzbiorów X.

Miarę (nieujemną) μ na $(X, \mathcal{B}(X))$ nazywamy *regularną*, jeśli dla dowolnego $A \in \mathcal{B}(X)$,

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K)\colon\ K \subset A, K \text{ zwarte}\} = \inf\{\mu(G)\colon\ A \subset G, G \text{ otwarte}\}.$$

Miarę zespoloną (miarę ze znakiem) μ na $(X, \mathcal{B}(X))$ nazywamy *regularną*, jeśli miara $|\mu|$ jest regularna.

Przez $M(X)$ będziemy oznaczać przestrzeń wszystkich regularnych miar zespolonych (miar ze znakiem dla $\mathbb{F} = \mathbb{R}$) na $(X, \mathcal{B}(X))$ z normą $\|\mu\| = |\mu|(X)$.

Przykłady. Każda miara skończona na przestrzeni polskiej (tzn. metrycznej, ośrodkowej, zupełnej) jest regularna, zatem również wszystkie miary zespolone na takich przestrzeniach są regularne.
Rozpatrzmy $X = \mathbb{R}^I$ oraz μ produktową miarę gaussowską $\gamma_1^{\otimes I}$, gdzie γ_1 jest kanonicznym rozkładem gaussowskim na $\mathbb{R}$. Wówczas, jeśli I jest nieprzeliczalny, to μ nie jest regularna. Istotnie każdy zbiór zwarty, K w X jest podzbiorem produktu odcinków $[a_i, b_i]$, $a_i < b_i$, a że $\gamma_1[a_i, b_i] < 1$, to dla nieskończenie wielu i, $\gamma_1[a_i, b_i] < 1 - \varepsilon$, stąd $\mu(K) = 0$.

Fakt 4.6. *Przestrzeń $M(X)$ jest przestrzenią Banacha.*

Dowód. Na mocy Twierdzenia 1.24 wystarczy pokazać, że $M(X)$ jest domkniętą podprzestrzenią wszystkich miar zespolonych (miar ze znakiem) na $(X, \mathcal{B}(X))$, czyli, że granica miar regularnych jest miarą regularną, co jest łatwym ćwiczeniem. $\square$

Fakt 4.7. *Załóżmy, że K jest zwartą przestrzenią topologiczną oraz μ jest miarą zespoloną na $(K, \mathcal{B}(K))$. Wówczas wzór $\varphi(f) = \int_K f \mathrm{d}\mu$ określa ciągły funkcjonał na $C(K)$ taki, że $\|\varphi\| \leqslant \|\mu\|$. Ponadto, jeśli μ jest regularna, to $\|\varphi\| = \|\mu\|$.*

Dowód. Wiemy, że $\mathrm{d}\mu = h\mathrm{d}|\mu|$, gdzie $h \colon K \to \mathbb{F}$ jest funkcją borelowską oraz $|h| = 1$, μ-p.w.. Stąd dla $f \in C(K)$

$$|\varphi(f)| = \Big| \int_K fh\mathrm{d}|\mu| \Big| \leqslant \int_K |fh|\mathrm{d}|\mu| \leqslant \int_K |f|\mathrm{d}|\mu| \leqslant \|f\| |\mu|(K) = \|f\| \|\mu\|,$$

czyli φ jest ciągły i $\|\varphi\| \leqslant \|\mu\|$. Zauważmy też, że

$$\|\mu\| = \int_K \frac{1}{h}\mathrm{d}\mu = \sup\Big\{ \int_K g\mathrm{d}\mu \colon \ g \colon K \to \mathbb{F} \text{ prosta }, |g| \leqslant 1 \Big\}.$$

Załóżmy teraz, że miara μ jest regularna, ustalmy $\varepsilon > 0$ i funkcję prostą g na K taką, że $|g| \leqslant 1$ i $\int g\mathrm{d}\mu \geqslant \|\mu\| - \varepsilon$. Wówczas g ma postać $g = \sum_{l=1}^n a_l \mathbb{1}_{A_l}$, gdzie $|a_l| \leqslant 1$ oraz A_l są parami rozłącznymi podzbiorami borelowskimi K. Na mocy regularności μ istnieją zbiory zwarte $K_l \subset A_l$ i otwarte $G_l \supset A_l$ takie, że $|\mu|(G_l \setminus K_l) \leqslant \varepsilon/n$. Możemy znaleźć funkcje ciągłe $f_l \colon K \to [0,1]$ takie, że $f_l = 1$ na K_l oraz $f_l = 0$ poza G_l. Połóżmy $f(x) = \sum_{l=1}^k a_l f_l(x)/h(x)$, gdzie $h(x) = \max\{1, \sum_{l=1}^n |f_l(x)|\}$. Funkcja f

jest ciągła, $\|f\|_\infty \leqslant 1$, $f = g$, jeśli $x \notin \bigcup_{l=1}^n (G_l \setminus K_l)$ (wykorzystujemy tu rozłączność zbiorów A_l i K_l). Stąd

$$\Big|\varphi(f) - \int_K g \mathrm{d}\mu\Big| = \Big|\int_K (f-g)h\mathrm{d}|\mu|\Big| \leqslant \int_K |f-g|\mathrm{d}|\mu| \leqslant 2\mu\Big(\bigcup_{l=1}^n (G_l \setminus K_l)\Big) \leqslant 2\varepsilon,$$

zatem $\|\varphi\| \geqslant |\varphi(f)| \geqslant \|\mu\| - 3\varepsilon$ i z dowolności ε dostajemy $\|\varphi\| \geqslant \|\mu\|$. □

Twierdzenie 4.8 (Riesza o reprezentacji)**.** *Dla dowolnej zwartej przestrzeni topologicznej K, $C(K)^* = M(K)$. Dokładniej, φ jest ciągłym funkcjonałem na $C(K)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $\mu \in M(K)$ takie, że $\varphi(f) = \int_K f \mathrm{d}\mu$ dla $f \in C(K)$, ponadto $\|\varphi\| = \|\mu\|$.*

Wobec Faktu 4.7 wystarczy udowodnić, że każdy funkcjonał ciągły na $C(K)$ jest zadany przez pewną regularną miarę zespoloną μ. Konstrukcja takiego μ jest dość żmudna, można ją znaleźć np. w książce Rudina [3].

4.3 Przestrzeń X^{**}, refleksywność

Widzieliśmy wcześniej, że dla $1 < p < \infty$, $L_p^* = L_q$ i $L_q^* = L_p$, gdzie $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dla $p = 1$, $L_1^* = L_\infty$ oraz L_1 jest podprzestrzenią L_∞^*. Ponadto $c_0^* = \ell_1$ i $\ell_1^* = \ell_\infty \supset c_0$. Okazuje się, że to, iż X jest podprzestrzenią przestrzeni dualnej do X^* jest zawsze prawdziwe. By sprecyzować tę obserwację potrzebujemy następującej definicji.

Definicja 4.9. Przez X^{**} będziemy oznaczać $(X^*)^*$, czyli przestrzeń dualną do X^*. Dla $x \in X$ możemy określić element $i(x) \in X^{**}$ wzorem $i(x)(\varphi) = \varphi(x)$ dla $\varphi \in X^*$.

Fakt 4.10. *Zdefiniowane powyżej przekształcenie $i\colon X \to X^{**}$ jest liniową izometrią dla dowolnej przestrzeni unormowanej X.*

Dowód. Liniowość jest oczywista. Zauważmy, że

$$\|i(x)\|_{X^{**}} = \sup_{\|\varphi\|_{X^*} \leqslant 1} |i(x)(\varphi)| = \sup_{\|\varphi\|_{X^*} \leqslant 1} |\varphi(x)| \leqslant \|x\|.$$

Ponadto z Wniosku 3.6 wynika, że w ostatniej nierówności zachodzi równość. □

Definicja 4.11. Przestrzeń Banacha taką, że $i(X) = X^{**}$ nazywamy przestrzenią refleksywną.

Przykłady. Przestrzenie skończonego wymiaru, przestrzenie Hilberta, przestrzenie L_p, $1 < p < \infty$ są refleksywne. Przestrzeń dualna do przestrzeni refleksywnej jest refleksywna.
Przestrzenie $c_0, \ell_1, \ell_\infty, L_1[0,1], L_\infty[0,1], C[0,1]$ nie są refleksywne.

5 Twierdzenie Banacha Steinhausa. Słabe topologie

Zacznijmy od przypomnienia twierdzenia Baire'a.

Twierdzenie 5.1. *Załóżmy, że (X,d) jest zupełną przestrzenią metryczną. Jeśli $A_n \subset X$, $n = 1,2,\ldots$ są nigdzie gęste (tzn.* $\mathrm{int}(\overline{A}) = \emptyset$*), to zbiór $A = \bigcup_{n\geqslant 1} A_n$ ma puste wnętrze.*

Uwaga 5.2. Podzbiory przestrzeni zupełnej będące przeliczalną sumą zbiorów nigdzie gęstych nazywa się zbiorami *pierwszej kategorii* lub zbiorami *mizernymi.*

Twierdzenie 5.3 (Banach-Steinhaus)**.** *Załóżmy, że X jest przestrzenią Banacha, a Y przestrzenią unormowaną oraz $(T_\alpha)_{\alpha\in I}$ jest rodziną ciągłych operatorów liniowych z X w Y. Wówczas, jeśli rodzina (T_α) jest punktowo ograniczona (tzn.* $\sup_\alpha \|T_\alpha x\| < \infty$ *dla $x \in X$), to jest ona ograniczona w normie, tzn.* $\sup_\alpha \|T_\alpha\| < \infty$.

Dowód. Określmy

$$A_n := \Big\{x \in X\colon \sup_{\alpha\in I} \|T_\alpha x\| \leqslant n\Big\}.$$

Zbiory A_n są domkniete (z ciągłości operatorów T_i) oraz $\bigcup_{n\geqslant 1} A_n = X$, zatem na mocy twierdzenia Baire'a któryś ze zbiorów A_n ma niepuste wnętrze. Załóżmy, że $B(x_0,\varepsilon) \subset A_n$ dla pewnego $n \geqslant 1$, $x_0 \in X$ oraz $\varepsilon > 0$. Weźmy $x \in X$ takie, że $\|x\| \leqslant 1$, wówczas $x_0, x_0 + \frac{\varepsilon}{2}x \in B(x_0,\varepsilon) \subset A_n$, stąd dla dowolnego α,

$$\|T_\alpha x\| = \frac{2}{\varepsilon}\Big\|T_\alpha\Big(x_0 + \frac{\varepsilon}{2}x - x_0\Big)\Big\| \leqslant \frac{2}{\varepsilon}\Big\|T_\alpha\Big(x_0 + \frac{\varepsilon}{2}x\Big)\Big\| + \frac{2}{\varepsilon}\|T_\alpha x_0\| \leqslant \frac{4}{\varepsilon}n.$$

Z dowolności x wynika, że $\|T_\alpha\| \leqslant \frac{4}{\varepsilon}n$ dla wszystkich α. □

Uwaga 5.4. Analiza dowodu pokazuje, że do ograniczoności rozdziny (T_α) w normie wystarcza, by zbiór A_n miał niepuste wnętrze dla pewnego n. Zatem można sformułować nieco mocniejszą wersję twierdzenia Banacha-Steinhausa – jeśli rodzina ciągłych operatorów liniowych (T_α) między przestrzenią Banacha X a przestrzenią unormowaną Y nie jest ograniczona w normie, to zbiór $\{x \in X\colon \sup_\alpha \|T_\alpha x\| < \infty\}$ jest pierwszej kategorii w X.

Wniosek 5.5. *Załóżmy, że T_n, $n = 1,2,\ldots$ są ciągłymi operatorami liniowymi między przestrzenią Banacha X oraz przestrzenią unormowaną Y takimi, że dla każdego $x \in X$ istnieje granica $Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x$. Wówczas operator T jest ciągły.*

Dowód. Punktowa zbieżność implikuje punktową ograniczoność, stąd, na mocy twierdzenia Banacha-Steinhausa, $\|T\| \leqslant \sup_n \|T_n\| < \infty$. □

5.1 Przykład zastosowania – funkcja ciągła o rozbieżnym szeregu Fouriera

Niech $\mathbb{T} = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ będzie jednowymiarowym okręgiem, zaś λ unormowaną długością łuku. Funkcje ciągłe na $\mathbb{T}$ możemy utożsamiać z funkcjami 2π-okresowymi na $\mathbb{R}$, samo $\mathbb{T}$ z odcinkiem $[0, 2\pi)$, zaś λ z unormowaną miarą Lebesgue'a na $[0, 2\pi)$. Wiemy, że układ trygonometryczny $e_n(t) = e^{int}$, $n \in \mathbb{Z}$ jest bazą ortogonalną przestrzeni $L_2(\mathbb{T}) = L_2(\mathbb{T}, \lambda)$, tzn. każda funkcja $f \in L_2(\mathbb{T})$ ma postać

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle f, e_n\rangle e_n(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{int}, \tag{11}$$

gdzie

$$a_n := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(s)e^{-ins}\mathrm{d}s$$

nazywamy n-tym współczynnikiem Fouriera f. Szereg nieskończony w (11) jest zbieżny w przestrzeni Hilberta $L_2(\mathbb{T})$, tzn. $\|f - S_N\|_2 \to 0$, gdzie

$$S_N(t) = S_N(f;t) = \sum_{n=-N}^{N} \langle f, e_n\rangle e_n(t) = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{int}.$$

Naturalnie jest zapytać czy dla funkcji ciągłych f na $\mathbb{T}$ szereg Fouriera jest zbieżny punktowo. Okazuje się, że takie założenie nie jest wystarczające.

Twierdzenie 5.6. *Dla dowolnego $t \in \mathbb{T}$ istnieje funkcja ciągła f na $\mathbb{T}$ taka, że* $\sup |S_N(f;t)| = \infty$, *w szczególności $S_N(f;t)$ nie zbiega do $f(t)$. Ponadto zbiór takich funkcji jest gęsty w $C(\mathbb{T})$.*

Dowód. Ustalmy $t \in \mathbb{T}$ i określmy

$$\varphi_N(f) = S_N(f;t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(s)D_N(t-s)\mathrm{d}s,$$

gdzie

$$D_N(t) := \sum_{n=-N}^{N} e^{int} = \frac{\sin((N+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})} \quad \text{dla } t \in (0, 2\pi).$$

Zauważmy, że φ_N jest ciągłym funkcjonałem na $C(\mathbb{T})$, a jego norma to norma miary na $\mathbb{T}$ z gęstością $\frac{1}{2\pi}D_N(t-s)$, czyli $\|D_N\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |D_n(t)|\mathrm{d}t \leqslant$

$\frac{1}{2\pi}(2N+1) < \infty$. By oszacować D_N zauważmy, że $|D_N(2\pi - t)| = |D_N(t)|$ oraz $|\sin(t/2)| \leqslant t/2$ dla $t > 0$, więc

$$\begin{aligned}
\|D_N\|_1 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\Big|\frac{\sin((N+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})}\Big|\mathrm{d}t \geqslant \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{|\sin((N+\frac{1}{2})t)|}{t}\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{(N+1/2)\pi}\frac{|\sin(t)|}{t}\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{2N+1}\int_{(k-1)\pi/2}^{k\pi/2}\frac{|\sin(t)|}{t}\mathrm{d}t \\
&\geqslant \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{2N+1}\int_{(k-1)\pi/2}^{k\pi/2}\frac{2|\sin(t)|}{k\pi}\mathrm{d}t = \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{2N+1}\frac{1}{k}.
\end{aligned}$$

Stąd $\|D_N\|_1$ jest rzędu $\log(N+1)$, czyli $\sup_N \|\varphi_N\| = \sup_N \|D_N\|_1 = \infty$ i teza wynika z twierdzenia Banacha-Steinhausa. $\square$

Z uwagi po twierdzeniu Banacha-Steinhausa wynika, że zbiór

$$\{f \in C(\mathbb{T})\colon\ \sup_N |S_N(f;t)| < \infty\}$$

jest pierwszej kategorii w $C(\mathbb{T})$. Przeliczalna suma zbiorów pierwszej kategorii jest zbiorem piewrszej kategorii, więc natychmiast dostajemy następujące mocniejsze twierdzenie.

Twierdzenie 5.7. *Dla dowolnego przeliczalnego zbioru $T_0 \subset \mathbb{T}$ istnieje funkcja ciągła $f \in C(\mathbb{T})$ taka, że $\sup_N |S_N(f;t)| = \infty$ dla wszystkich $t \in T_0$, w szczególności szereg Fouriera f nie zbiega punktowo w żadnym punkcie T_0.*

Uwaga 5.8. i) Jeśli f jest Lipschitzowska na $\mathbb{T}$ (a nawet Hölderowska z wykładnikiem dodatnim), to szereg Fouriera f jest zbieżny do f jednostajnie.
ii) Carleson udowodnił, że szereg Fouriera każdej funkcji z $L_2(\mathbb{T})$ (w szczególności funkcji ciągłej) jest zbieżny do niej prawie wszędzie.
iii) Kołmogorow skonstruował funkcję $f \in L_1(\mathbb{T})$, której szereg Fouriera jest rozbieżny w każdym punkcie.

5.2 Słaba topologia na X

Definicja 5.9. Załóżmy, że X jest przestrzenią unormowaną. *Słabą topologią* na X nazywamy najsłabszą topologię dla której wszystkie funkcjonały z X^* (czyli ciągłe w topologii normy) są ciągłe.

Uwaga 5.10. Łatwo widać, że bazą słabej topologii są zbiory postaci

$$U_{\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n;\varepsilon}(x) = \{y \in X\colon\ |\varphi_k(y) - \varphi_k(x)| < \varepsilon,\ 1 \leqslant k \leqslant n\},$$

gdzie $x \in X$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in X^*$ oraz $\varepsilon > 0$.

Uwaga 5.11. Załóżmy, że Y jest przestrzenią topologiczną, X jest pewnym zbiorem, a $\mathcal{F}$ rodziną funkcji z X w Y. Wówczas można zdefiniować $\sigma(X, \mathcal{F})$-topologię jako najsłabszą topologię na X dla której funkcje z $\mathcal{F}$ są ciągłe. W tej notacji słaba topologia na X, to $\sigma(X, X^*)$-topologia. Używa się też sformułowania w-topologia.

Fakt 5.12. *Słaba topologia jest słabsza od topologii normowej (tzn. zbiory otwarte w słabej topologii są otwarte w normie). Ponadto te topologie się pokrywają wtedy i tylko wtedy, gdy* $\dim(X) < \infty$.

Dowód. Pierwsza część wynika wprost z definicji. Jeśli $X = \mathbb{F}^n$, to wszystkie normy na X są równoważne, zatem topologia normowa to zwykła topologia euklidesowa, a ponieważ zbiory postaci $\{x\colon \max_{k\leqslant n} |x_k - y_k| < \varepsilon\}$ są $\sigma(X, X^*)$-otwarte dla $\varepsilon > 0$, to każdy zbiór otwarty w topologii euklidesowej jest otwarty w słabej topologii. Jeśli $\dim(X) = \infty$, to wszystkie słabo otwarte otoczenia zera zawierają podprzestrzeń skończonego kowymiaru, więc np. zbiór $\{x\colon \ \|x\| < 1\}$ nie jest słabo-otwarty. □

Uwaga 5.13. Powyższy dowód pokazuje, że jeśli $\dim(X) = \infty$, to norma nie jest funkcją słabo ciągłą (tzn. ciągłą na X względem słabej topologii).

Fakt 5.14. *Słaba topologia na X spełnia warunek Hausdorffa T_2, tzn. każde dwa różne punkty z X mają rozłączne otoczenia otwarte.*

Dowód. Jeśli $x, y \in X$ i $x \neq y$ to znajdziemy funkcjonał $\varphi \in X^*$ oraz $a \in \mathbb{R}$ taki, że $\mathrm{Re}(\varphi(x)) < a < \mathrm{Re}(\varphi(y))$ i wystarczy przyjąć $U_x := \{z \in X\colon \ \mathrm{Re}(\varphi(z)) < a\}$ oraz $U_y := \{z \in X\colon \ \mathrm{Re}(\varphi(z)) > a\}$. □

Definicja 5.15. Mówimy, że ciąg (x_n) w przestrzeni unormowanej X *zbiega słabo* do x lub jest *słabo zbieżny* do x, jeśli zbiega do x w słabej topologii. Równoważnie, dla dowolnego $\varphi \in X^*$, $\lim_n \varphi(x_n) = \varphi(x)$.

Uwaga 5.16. Oczywiście zbieżność w normie implikuje słabą zbieżność. W drugą stronę implikacja nie zachodzi (np. wektory e_n są zbieżne słabo do zera w ℓ_p, $1 < p < infty$, ale nie są zbieżne w normie).

Fakt 5.17. *Każdy ciąg słabo zbieżny (x_n) w X jest ograniczony w normie, tzn.* $\sup_n \|x_n\| < \infty$.

Dowód. Przestrzeń X^* jest Banacha, a każdy element $x \in X$ wyznacza funkcjonał $i(x)$ na X^* dany wzorem $i(x)(\varphi) = \varphi(x)$. Słaba zbieżność oznacza, że $i(x_n)$ zbiega punktowo do $i(x)$, zatem teza wynika z twierdzenia Banacha-Steinhausa. □

Przykład 1. Załóżmy, że $\mathcal{H}$ jest przestrzenią Hilberta z bazą ortonormalną $(u_\alpha)_{\alpha\in A}$. Wówczas ciąg (x_n) w $\mathcal{H}$ słabo zbiega do x wtedy i tylko wtedy, gdy $\sup_n \|x_n\| < \infty$ oraz $\lim_n \langle x_n, u_\alpha\rangle = \langle x, u_\alpha\rangle$ dla wszystkich α.

Implikacja „$\Rightarrow$" wobec Faktu 5.17, jest oczywista. By udowodnić „$\Leftarrow$" wystarczy zauważyć, że każdy funkcjonał na $\mathcal{H}$ jest postaci $\langle\cdot, y\rangle$ dla pewnego $y \in \mathcal{H}$ oraz y możemy aproksymować w normie przez skończone kombinacje liniowe u_α.

Przykład 2. W przestrzeni $C(K)$ ciąg funkcji f_n jest słabo zbieżny do f wtedy i tylko wtedy, gdy jest zbieżny punktowo oraz $\sup_n \|f_n\| < \infty$.

Implikacja , , $\Rightarrow$ " jest oczywista, implikacja , , $\Leftarrow$ " wynika stąd, że funkcjonały ciągłe na $C(K)$ to miary zespolone i wystarczy zastosować twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej.

5.3 Słaba* topologia na X^*

Definicja 5.18. Załóżmy, że X^* jest przestrzenią dualną do przestrzeni unormowanej X. *Słabą* topologią* na X^* nazywamy najsłabszą topologię dla której wszystkie przekształcenia postaci $\varphi \mapsto \varphi(x)$, $x \in X$, są ciągłe.

Uwaga 5.19. Bazą słabej* topologii są zbiory postaci

$$U_{x_1,x_2,\ldots,x_n;\varepsilon}(\varphi) = \{\psi \in X^*\colon\ |\psi(x_k) - \varphi(x_k)| < \varepsilon,\ 1 \leqslant k \leqslant n\},$$

gdzie $\varphi \in X^*$, $x_1, \ldots, x_n \in X$ oraz $\varepsilon > 0$.

Uwaga 5.20. Przy utożsamieniu X z $i(X) \subset X^{**}$, słaba*-topologia to $\sigma(X^*, X)$-topologia. Nazywa się ją też w^*-topologią na X^*.

Tak jak dla słabej topologii dowodzimy, że

Fakt 5.21. *i) Słaba* topologia ma własność Hausdorffa T_2.*
ii) Słaba topologia jest słabsza od topologii normowej na X^*. Ponadto te topologie się pokrywają wtedy i tylko wtedy, gdy $\dim(X) < \infty$.*

Uwaga 5.22. Na przestrzeni X^* mamy dwie topologie słabą (czyli $\sigma(X^*, X^{**})$) oraz słabą* (czyli $\sigma(X^*, X)$). Topologia słaba* jest słabsza od słabej (tzn. zbiory słabo-otwarte są słabo*-otwarte), dla przestrzeni refleksywnych oczywiście te topologie się pokrywają, a dla nierefleksywnych można udowodnić, że są istotnie różne.

Definicja 5.23. Mówimy, że ciąg funkcjonałów ciągłych (φ_n) na przestrzeni unormowanej X *zbiega słabo** do funcjonału φ lub jest *słabo* zbieżny* do φ, jeśli zbiega do φ w słabej* topologii. Równoważnie, dla dowolnego $x \in X$, $\lim_n \varphi_n(x) = \varphi(x)$.

Natychmiastowym wnioskiem z twierdzenia Banacha-Steinhausa jest następujący fakt.

Fakt 5.24. *Jeśli X jest przestrzenią Banacha, to każdy ciąg słabo* zbieżny (φ_n) w X^* jest ograniczony w normie, tzn.* $\sup_n \|\varphi_n\| < \infty$.

Przykład 1. Jak wiemy $c_0^* = \ell_1$ i $\ell_1^* = \ell_\infty$. Ciąg $e_n \in \ell_1$ jest słabo* zbieżny do zera, ale nie jest słabo zbieżny do zera.

Przykład 2 Każdą miarę probabilistyczną na $\mathbb{R}$ można traktować jako ciągły funkcjonał na $C_{\text{ogr}}(\mathbb{R})$. Wtedy słaba*-zbieżność miar probabilistycznych μ_n do miary probabilistycznej μ, to omawiana podczas wykładu RP2 słaba (sic!) zbieżność rozkładów. Jak wiemy, jest ona równoważna zbieżności punktowej dystrybuant μ_n w punktach ciągłości dystrybuanty μ. Zbieżność w topologii $\sigma(X^*, X^{**})$ jest dużo silniejsza, implikuje w szczególności, że $\mu_n(A) \to \mu(A)$ dla dowolnego zbioru borelowskiego A.

Jedną z kluczowych własności słabej* topologii jest to, że kula B_{X^*} jest zwarta.

Twierdzenie 5.25 (Banach-Alaoglu)**.** *Domknięta kula jednostkowa w przestrzeni X^*, tzn. zbiór $B_{X^*} = \{\varphi \in X^* \colon \ \|\varphi\| \leqslant 1\}$ jest słabo*-zwarta.*

Dowód. Niech $I := \prod_{x \in X} I_x$, gdzie $I_x = [-\|x\|, \|x\|]$ dla $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ oraz $I_x = \{z \in \mathbb{C} \colon \ |z| \leqslant \|x\|\}$ dla $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Wówczas I z topologią przestrzeni produktowej jest zwarta na mocy twierdzenia Tichonowa. Określmy przekształcenie $T \colon B_{X^*} \to I$ wzorem $T\varphi = (\varphi(x))_{x \in X}$, wówczas przekształcenie T jest homeomorfizmem B_{X^*} ze słabą* topologią na $C = T(B_{X^*})$ z topologią dziedziczoną z przestrzeni produktowej I. Wystarczy zatem pokazać, że zbiór C jest zwarty, czyli, że jest domknietym podzbiorem I. W tym celu weźmy $f = (f(x))_{x \in X}$ należące do domknięcia C, musimy pokazać, że $f \in C$, czyli, że f jest ciągłym liniowym przekształceniem na X. Oczywiście $|f(x)| \leqslant \|x\|$, więc wystarczy pokazać linowość. Ale wynika to stąd, że przekształcenia $I \ni g \mapsto g(x+y) - g(x) - g(y) \in \mathbb{F}$ oraz $I \ni g \mapsto g(\lambda x) - \lambda g(x) \in \mathbb{F}$ są, dla dowolnych $x, y \in X$ oraz $\lambda \in \mathbb{F}$, ciągłe i zerują się na C. □

Wniosek 5.26. *Każda przestrzeń Banacha wkłada się izometrycznie w pewną przestrzeń $C(K)$, K zwarte.*

Dowód. Wystarczy przyjąć $K = B_{X^*}$ ze słabą* topologią i $Tx(\varphi) = \varphi(x)$ dla $x \in X$, $\varphi \in B_{X^*}$. □

Wniosek 5.27. *Jeśli przestrzeń X jest ośrodkowa, to kula B_{X^*} ze słabą topologią jest metryzowalna, w szczególności każda ośrodkowa przestrzeń Banacha wkłada się izometrycznie w $C(K)$, gdzie K jest zwartym zbiorem metrycznym.*

Dowód. Jeśli $(x_n)_{n\geqslant 1}$ jest przeliczalnym, gęstym podzbiorem kuli jednostkowej $\{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$, to szukaną metryką na B_{X^*} jest np.

$$d(\varphi_1, \varphi_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |\varphi_1(x_n) - \varphi_2(x_n)|.$$

□

Uwaga 5.28. Twierdzenie Aleksandrowa-Hausdorffa mówi, że każda zwarta przestrzeń metryczna K jest ciągłym obrazem zbioru Cantora Δ. Wykorzystując to twierdzenie nietrudno pokazać, że $C(K)$ się wkłada izometrycznie w $C(\Delta)$, a tę ostatnią przestrzeń można łatwo włożyć izometrycznie w $C[0,1]$. W efekcie każda ośrodkowa przestrzeń Banacha wkłada się izometrycznie w $C[0,1]$.

Uwaga 5.29. Przestrzenie unormowane z topologią normową lub słabą topologią, przestrzeń X^* ze słabą* topologią to przykłady przestrzeni liniowo-topologicznych, tzn. takich przestrzeni liniowych, że przekształcenia $(x, y) \mapsto x+y$ z $X \times X$ w X oraz $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ z $\mathbb{F} \times X$ w X są ciągłe. Ponadto wszystkie te przestrzenie są lokalnie wypukłe (tzn. są takimi przestrzeniami, w których istnieje baza topologii złożona ze zbiorów wypukłych).

6 Twierdzenia Banacha o przekształceniu otwartym i wykresie domkniętym

Zanim sformułujemy główne twierdzenie tego wykładu, przypomnijmy definicję przekształcenia otwartego.

Definicja 6.1. Przekształcenie T między przestrzeniami topologicznymi X i Y jest *otwarte*, jeśli $T(U)$ jest zbiorem otwartym w Y dla dowolnego otwartego zbioru U w X.

Twierdzenie 6.2 (Banacha o przekształceniu otwartym)**.** *Załóżmy, że T jest ciągłym operatorem liniowym między przestrzeniami Banacha X i Y. Wówczas T jest „na” wtedy i tylko wtedy, gdy T jest otwarty.*

Dowód. W dowodzie poniżej B_X i B_Y będą oznaczać otwarte kule jednostkowe odpowiednio w X i Y.

„$\Leftarrow$". Oczywiście $0 \in T(B_X)$, zatem z otwartości T, $\delta B_Y \subset T(B_X)$ dla pewnego $\delta > 0$ i $n\delta B_Y \subset T(nB_X)$, czyli $T(X) \supset \bigcup_{n\geqslant 1} n\delta B_Y = Y$.

„$\Rightarrow$". Wiemy, że $T(X) = \bigcup_{n\geqslant 1} T(nB_X) = Y$, zatem na mocy twierdzenia Baire'a istnieje n takie, że domknięcie $\overline{T(nB_X)}$ ma niepuste wnętrze. Załóżmy, że $B(y_0, \varepsilon) = y_0 + \varepsilon B_Y \subset \overline{T(nB_X)}$. Wiemy, że $y_0 = Tx_0$ dla pewnego $x_0 \in X$, zatem

$$\varepsilon B_Y \subset \overline{T(nB_X)} - Tx_0 = \overline{T(nB_X - x_0)} \subset \overline{T((n + \|x_0\|)B_X)}.$$

Dzieląc stronami przez $n + \|x_0\|$ dostajemy, że $\varepsilon_1 B_Y \subset \overline{T(B_X)}$ dla pewnego $\varepsilon_1 > 0$.

Pokażemy teraz, że

$$\varepsilon_1 B_Y \subset \overline{T(B_X)} \subset T(2B_X). \tag{12}$$

Pierwsze zawieranie już wykazaliśmy, by udowodnić drugie ustalmy $y \in \overline{T(B_X)}$. Istnieje $x_1 \in B_X$ takie, że $\|y - Tx_1\| < \varepsilon_1/2$, czyli

$$y - Tx_1 \in \frac{1}{2}\varepsilon_1 B_Y \subset \frac{1}{2}\overline{T(B_X)} = \overline{T\Big(\frac{1}{2}B_X\Big)}.$$

Możemy zatem wybrać $x_2 \in \frac{1}{2}B_X$ takie, że

$$y - T(x_1 + x_2) \in \frac{1}{4}\varepsilon_1 B_Y \subset \overline{T\Big(\frac{1}{4}B_X\Big)}.$$

Kontynuując konstrukcję znajdziemy $x_1, x_2, \ldots \in X$ takie, że $x_k \in \frac{1}{2^{k-1}}B_X$ oraz $y - T(x_1 + \ldots + x_k) \in \frac{1}{2^k}\varepsilon_1 B_Y$. Ciąg $s_k = x_1 + \ldots + x_k$ spełnia warunek Cauchy'ego jest więc zbieżny do pewnego elementu $s \in X$ takiego, że $\|s\| = \lim_k \|s_k\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < 2$ oraz $y = \lim_k Ts_k = Ts \in T(2B_X)$. Wykazaliśmy zatem (12).

Weźmy teraz dowolny zbiór otwarty U w X i niech $y \in T(U)$, czyli $y = Tx$ dla pewnego $x \in U$. Z otwartości U istnieje $\delta > 0$ takie, że $x + \delta B_X \subset U$, wtedy

$$T(U) \supset T(x + \delta B_X) = y + \frac{\delta}{2}T(2B_X) \supset y + \frac{\delta}{2}\varepsilon_1 B_Y,$$

co pokazuje (wobec dowolności wyboru $y \in T(U)$), że $T(U)$ jest otwarty, czyli przekształcenie T jest otwarte. □

Wniosek 6.3. *Załóżmy, że T jest różnowartościowym ciągłym operatorem z przestrzeni Banacha X na przestrzeń Banacha Y. Wówczas operator T^{-1} jest ciągły.*

Dowód. Operator T^{-1} jest oczywiście dobrze określony, poza tym dla dowolnego zbioru otwartego U w X, zbiór $(T^{-1})^{-1}(U) = T(U)$ jest otwarty w Y na mocy Twierdzenia 6.2, co dowodzi ciągłości T^{-1}. $\square$

Wniosek 6.4. *Załóżmy, że $\| \ \|_1$ i $\| \ \|_2$ są dwiema normami na przestrzeni liniowej X oraz przestrzenie $(X, \| \ \|_1)$ i $(X, \| \ \|_2)$ są zupełne. Wtedy, jeśli istnieje $C_1 < \infty$ takie, że $\|x\|_1 \leqslant C_1 \|x\|_2$ dla wszystkich $x \in X$, to istnieje $C_2 < \infty$ takie, że $\|x\|_2 \leqslant C_2 \|x\|_1$ dla $x \in X$, czyli normy $\| \ \|_1$ i $\| \ \|_2$ są równoważne.*

Dowód. Operator $\mathrm{Id}\colon (X, \| \ \|_2) \to (X, \| \ \|_1)$ jest ciągły, różnowartościowy i na, zatem jego odwrotność czyli $\mathrm{Id}\colon (X, \| \ \|_1) \to (X, \| \ \|_2)$ też jest operatorem ciągłym. $\square$

Uwaga 6.5. W powyższym wniosku kluczowa jest zupełność obu przestrzeni. Np. na $L_2[0,1]$ zachodzi nierówność $\|f\|_{L_1} \leqslant \|f\|_{L_2}$, a nie zachodzi szacowanie $\|f\|_{L_2} \leqslant C\|f\|_{L_1}$ na tej przestrzeni.

Definicja 6.6. *Wykresem* przekształcenia T z przestrzeni topologicznej X w przestrzeń topologiczną Y nazywamy zbiór $\Gamma(T) = \{(x, Tx)\colon \ x \in X\} \subset X \times Y$.

Zauważmy, że każda funkcja ciągła ma domknięty wykres. Odwrotna implikacja na ogół nie jest prawdziwa – funkcja $f\colon \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana wzorem $f(x) = 1/x$ dla $x \neq 0$ i $f(0) = 0$ ma domknięty wykres, a nie jest ciągła w 0. Okazuje, że dla przekształceń liniowych między przestrzeniami Banacha domkniętość wykresu jest równoważna ciągłości przekształcenia.

Twierdzenie 6.7 (Banacha o wykresie domkniętym)**.** *Przekształcenie liniowe T między przestrzeniami Banacha X i Y jest ciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy ma domknięty wykres.*

Dowód. Oczywiście każde ciągłe przekształcenie ma domknięty wykres. Wystarczy więc udowodnić przeciwną implikację. Załóżmy zatem, że wykres T jest domknięty, wtedy $\Gamma(T)$ jest domkniętą podprzestrzenią przestrzeni Banacha $X \times Y$ z normą $\|(x,y)\| = \|x\|_X + \|y\|_Y$. Zatem $\Gamma(T)$ z tą normą jest przestrzenią Banacha. Zauważmy, że rzut z $\Gamma(T)$ na X, $\Gamma(T) \ni (x, Tx) \mapsto x \in X$ jest ciągły (bo ma normę nie większą niż jeden) oraz różnowartościowy. Zatem z Wniosku 6.3 przekształcenie odwrotne, czyli $X \ni x \mapsto (x, Tx) \in \Gamma(T)$ jest ciągłe, ale to przekształcenie po złożeniu z rzutem na Y, który też jest ciągły, daje T, czyli T jest ciągłe jako złożenie przekształceń ciągłych. $\square$

Uwaga 6.8. By udowodnić ciągłość odwzorowania T między przestrzeniami metrycznymi X i Y musimy wykazać, że

$$\text{jeśli } x_n \text{ zbiega do } x, \text{ to } Tx_n \text{ zbiega do } Tx.$$

Twierdzenie o wykresie domkniętym pokazuje, że jeśli T jest liniowe, a X i Y są przestrzeniami Banacha, to wystarczy pokazać słabszą implikację:

$$\text{jeśli } x_n \text{ zbiega do } x \text{ oraz } Tx_n \text{ zbiega do } y, \text{ to } Tx = y.$$

Przykład 1. Rozważmy przekształcenie liniowe T z przestrzeni Banacha X w przestrzeń ℓ_p. Wówczas $Tx = (T_n x)_{n\geqslant 1}$, gdzie $T_n \colon X \to \mathbb{F}$. Przekształcenie T jest ciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie T_n są ciągłe.

Implikacja „$\Rightarrow$" jest oczywista. By wykazać „$\Leftarrow$" skorzystamy z twierdzenia o wykresie domkniętym. W tym celu załóżmy, że $x_n \to x$ w X oraz $Tx_n = (T_m(x_n))_{m\geqslant 1} \to y = (y(m))_{m\geqslant 1}$ w ℓ_p. Zauważmy, że wynika stąd w szczególnośći, że $T_m x_n \to y(m)$ dla wszystkich m, czyli z ciągłości T_m, $y(m) = T_m x$, a zatem $y = Tx$, czyli T ma domknięty wykres, więc jest ciągły.

Przykład 2. Rozpatrzmy operator różniczkowania $Tf = f'$ z $C^1[0,1]$ z norma supremum w $C[0,1]$. Łatwo sprawdzić, że T ma wykres domknięty, a oczywiście T nie jest ciągły (np. $f_n(x) = \frac{1}{n}x^n$ spełnia $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n}$ oraz $\|Tf_n\|_\infty = 1$). Pokazuje to, że w twierdzeniu o wykresie domkniętym istotne jest założenie, że X jest przestrzenią Banacha. Przestrzeń $C^1[0,1]$ z normą supremum nie jest zupełna, jeśli rozważymy tę przestrzeń z normą zupełną, np. $\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$, to operator różniczkowania stanie się ciągły.

7 Operatory zwarte

Definicja 7.1. Załóżmy, że T jest operatorem liniowym między przestrzeniami Banacha X i Y. Mówimy, że T jest *zwarty*, jeśli $\overline{T(B_X)}$ jest zwartym podzbiorem Y. Przestrzeń opertorów zwartych między X i Y będziemy oznaczać przez $K(X,Y)$, będziemy też pisać $K(X)$ zamiast $K(X,X)$.

Fakt 7.2. *i) Każdy operator zwarty jest ciągły*
ii) Operator liniowy $T \colon X \to Y$ jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy z każdego ciągu ograniczonego w X można wybrać podciąg x_{n_k} taki, że Tx_{n_k} jest zbieżny.

Dowód. i) Każdy zbiór zwarty jest ograniczony, zatem $T(B_X) \subset MB_Y$ dla pewnego $M < \infty$, ale to oznacza, że $\|T\| \leqslant M < \infty$, czyli T jest ciągły.

ii) Jeśli ciąg x_n jest ograniczony, to $x_n \in MB_X$ dla pewnego $M < \infty$, stąd Tx_n jest ciągiem elementów zbioru zwartego $M\overline{T(B_X)}$, czyli ma podciąg zbieżny. Na odwrót, jeśli $y_n \in \overline{T(B_X)}$, to istnieje ciąg $x_n \in B_X$ taki, że $\|y_n - Tx_n\| \leqslant 1/n$. Wystarczy zauważyć, że zbieżność Tx_{n_k} implikuje zbieżność y_{n_k} i skorzystać z ciągowej definicji zwartej przestrzeni metrycznej. □

Fakt 7.3. *Jednostkowa kula domknięta w przestrzeni unormowanej X jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy X jest skończenie wymiarowe.*

Dowód pozostawiamy jako proste ćwiczenie. Z faktu natychmiast otrzymujemy:

Wniosek 7.4. *Operator identycznościowy na przestrzeni Banacha X jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy* $\dim X < \infty$.

Przykład 1. Każdy operator ciągły skończonego rzędu jest zwarty.
Istotnie, wtedy $\overline{T(B_X)}$ jest ograniczonym podzbiorem przestrzeni skończenie wymiarowej $T(X)$, zatem jest zwarty.

Przykład 2. Załóżmy, że $k = k(x,y)\colon [0,1]^2 \to \mathbb{F}$ jest funkcją ciągłą. Określmy

$$Kf(x) := \int_0^1 k(x,y)f(y)\mathrm{d}y \quad x \in [0,1],\ f \in C[0,1].$$

Wówczas K jest zwartym operatorem na $C[0,1]$.
Zauważmy najpierw, że

$$\begin{aligned} |Kf(x_1) - Kf(x_2)| &\leqslant \int_0^1 |k(x_1,y) - k(x_2,y)||f(y)|\mathrm{d}y \\ &\leqslant \|f\|_\infty \sup_{y\in[0,1]} |k(x_1,y) - k(x_2,y)|. \end{aligned}$$

Z jednostajnej ciągłości funkcji k wynika zatem, że Kf jest funkcją ciągłą, czyli K jest liniowym operatorem na $C[0,1]$. Ponadto

$$\|Kf\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \sup_{x,y} |k(x,y)|,$$

stąd $\|K\| \leqslant \sup_{x,y} |k(x,y)| < \infty$, czyli K jest ciągły. By pokazać zwartość K, czyli prezwartość zbioru $A = K(B_{C[0,1]})$ w $C[0,1]$ skorzystamy z twierdzenia Arzeli-Ascolego. Z powyższych rachunków wynika, że jeśli $g \in A$, to $\|g\|_\infty \leqslant \sup_{x,y} |k(x,y)|$ oraz jeśli $|x_1 - x_2| < \delta$, to

$$|g(x_1) - g(x_2)| \leqslant \sup_{y\in[0,1]} |k(x_1,y) - k(x_2,y)| \leqslant \varepsilon,$$

dla odpowiednio małego δ. Zatem A jest wspólnie ograniczoną rodziną funkcji równociągłych, zatem jest prezwarta w $C[0,1]$.

Przypomnijmy, że przez $B(X,Y)$ oznacamy przestrzeń ciągłych odwzorowań liniowych z X w Y z normą operatorową.

Twierdzenie 7.5. *Załóżmy, że X i Y są przestrzeniami Banacha.*
i) Przestrzeń $K(X,Y)$ jest domkniętą podprzestrzenią $B(X,Y)$.
ii) Jeśli operator $T\colon X \to Y$ jest zwarty, a operatory $S_1\colon X' \to X$ oraz $S_2\colon Y \to Y'$ są ciągłe, to operator $S_2TS_1\colon X' \to Y'$ jest zwarty

Dowód. i) To, że $K(X,Y)$ jest przestrzenią liniową jest łatwym ćwiczeniem. By wykazać jej domkniętość w $B(X,Y)$ załóżmy, że $T_n \in K(X,Y)$ zbiega do T w normie operatorowej. Niech x_m będzie ciągiem wektorów z kuli jednostkowej X, musimy pokazać, że ciąg Tx_m ma podciąg zbieżny. Ze zwartości operatorów T_n wynika, że dla dowolnego n, każdy podciąg $(T_nx_m)_m$ ma podciąg zbieżny. Metodą przekątniową możemy wybrać podciąg m_k taki, że dla każdego n ciąg $(T_nx_{m_k})$ jest zbieżny do pewnego $y_n \in Y$. Pokażemy, że ciąg y_n jest zbieżny. Dla ustalonych n_1 i n_2 oraz odpowiednio dużych m_k zachodzi

$$\begin{aligned}\|y_{n_1} - y_{n_2}\| &\leqslant \|y_{n_1} - T_{n_1}x_{m_k}\| + \|T_{n_1}x_{m_k} - T_{n_2}x_{m_k}\| + \|T_{n_2}x_{m_k} - y_{n_2}\| \\ &\leqslant \varepsilon + \|T_{n_1} - T_{n_2}\|\|x_{m_k}\| + \varepsilon \leqslant 2\varepsilon + \|T_{n_1} - T_{n_2}\|.\end{aligned}$$

Stąd, ponieważ T_n jest ciągiem Cauchy'ego w $B(X,Y)$, więc y_n jest Cauchy'ego w Y, czyli jest zbieżny do pewnego y. By zakończyć dowód pokażemy, że Tx_{m_k} zbiega do y, w tym celu szacujemy dla ustalonego n i odpowiednio dużego m_k

$$\begin{aligned}\|Tx_{m_k} - y\| &\leqslant \|Tx_{m_k} - T_nx_{m_k}\| + \|T_nx_{m_k} - y_n\| + \|y_n - y\| \\ &\leqslant \|T - T_n\| + \|y_n - y\| + \|T_nx_{m_k} - y_n\|.\end{aligned}$$

Pierwsze dwa składniki są małe dla dużego n, a ostatni zbiega do zera przy ustalonym n, gdy k dąży do nieskończoności.

ii) Wystarczy zauważyć, że operatory ciągłe przeprowadzają ciągi ograniczone na ograniczone, a zbieżne na zbieżne. □

Przykład 3. (Operatory Hilberta-Schmidta)
Załóżmy, że $L_2(X) = L_2(X,\mu)$ oraz $k = k(x,y) \in L_2(X \times X, \mu \otimes \mu)$. Określmy operator K na $L_2(X)$ wzorem

$$Kf(x) = \int_X k(x,y)f(y)\mathrm{d}\mu(y).$$

Zauważmy, że na podstawie nierówności Schwarza

$$|Kf(x)| \leqslant \|f\|_2 \Big(\int_X k^2(x,y) \mathrm{d}\mu(y) \Big)^{1/2},$$

stąd natychmiast dostajemy

$$\|Kf\|_2^2 \leqslant \|f\|_2^2 \int_X \int_X k^2(x,y) \mathrm{d}\mu(x) \mathrm{d}\mu(y),$$

czyli $K \colon L_2(X) \to L_2(X)$ i $\|K\| \leqslant \|k\|_2 < \infty$. Pokażemy, że K jest operatorem zwartym. Niech $(g_\alpha)_\alpha$ będziem bazą o.n. $L_2(X)$, wtedy $(g_\alpha(x) g_\beta(y))_{\alpha,\beta}$ jest bazą o.n. $L_2(X \times X)$, czyli

$$k(x,y) = \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} g_\alpha(x) g_\beta(y).$$

Ponieważ tylko przeliczalnie wiele współczynników w powyższej sumie jest niezerowych, więc po ich przenumerowaniu możemy zapisać

$$k(x,y) = \sum_{i,j=1}^{\infty} a_{i,j} g_i(x) g_j(y).$$

Określmy

$$k_n(x,y) := \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} g_i(x) g_j(y)$$

oraz

$$K_n f(x) := \int_X k_n(x,y) f(y) \mathrm{d}\mu(y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} g_i(x) \int_X f(y) g_j(y) \mathrm{d}\mu(y).$$

Wtedy K_n jest operatorem skończonego rzędu, więc jest zwarty, ponadto

$$\|K_n - K\| \leqslant \|k_n - k\|_2 = \Big(\sum_{\max(i,j) \geqslant n+1} |a_{i,j}|^2 \Big)^{1/2} \to 0,$$

czyli K jest zwarty jako granica w normie operatorów zwartych.

Fakt 7.6. *Niech $\mathcal{H}$ będzie nieskończenie wymiarową, ośrodkową przestrzenią Hilberta z bazą o.n. $(u_n)_{n \geqslant 1}$ oraz P_n oznacza rzut ortogonalny na $\mathrm{Lin}(u_1, \ldots, u_n)$. Wówczas operator liniowy $T \in B(X, \mathcal{H})$ jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{n \to \infty} \|P_n T - T\| = 0$.*

Dowód. „$\Leftarrow$". Operatory P_nT mają rząd co najwyżej n, zatem T jest zwarty jako granica (w normie operatorowej) operatorów skończenie wymiarowych.

„$\Rightarrow$". Załóżmy, że $\limsup_{n\to\infty} \|P_nT - T\| > 0$, wtedy istnieje ciąg (n_k) oraz wektory $x_{n_k} \in X$ o normie 1 takie, że $\|P_{n_k}Tx_{n_k} - Tx_{n_k}\| \geqslant \varepsilon$ dla wszystkich k. Przechodząc ewentualnie do podciągu możemy zakładać (na mocy zwartości T), że $Tx_{n_k} \to y$. Ale wtedy

$$\begin{aligned}\varepsilon &\leqslant \|P_{n_k}Tx_{n_k} - Tx_{n_k}\| \leqslant \|P_{n_k}(Tx_{n_k} - y)\| + \|P_{n_k}y - y\| + \|y - Tx_{n_k}\| \\ &\leqslant 2\|Tx_{n_k} - y\| + \|P_{n_k}y - y\| \to 0,\end{aligned}$$

gdyż $P_{n_k}y \to y$ i dochodzimy do sprzeczności. □

Uwaga 7.7. Powyższy dowód pokazuje coś więcej. Załóżmy, że Y jest przestrzenią Banacha na której istnieje ciąg operatorów skończenie wymiarowych S_n zbieżny silnie do Id_Y, tzn. $S_ny \to y$ dla wszystkich $y \in Y$. Wówczas operator $T \in B(X,Y)$ jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy $\|S_nT - T\| \to 0$. W szczególności każdy operator z X w Y zwarty na takiej przestrzeni jest granicą operatorów skończenie wymiarowych. Ta ostatnia własność nazywa się *własnością aproksymacji* dla przestrzeni Y. Per Enflo na początku lat 70tych jako pierwszy skonstruował przykład przestrzeni Banacha bez własności aproksymacji, odpowiadając na pytanie postawione w 1936 roku przez Stanisława Mazura.

8 Operator Sprzężony

8.1 Definicja, przykłady, podstawowe własności

Definicja 8.1. Niech X i Y będą przestrzeniami Banacha, a $T\colon X \to Y$ ciągłym operatorem liniowym. Definiujemy *operator sprzężony* $T^*\colon Y^* \to X^*$ wzorem $T^*\varphi := \varphi \circ T$ dla $\varphi \in Y^*$.

Przykład 1. Załóżmy, że $X = (\mathbb{F}^n, \|\ \|_X)$, $Y = (\mathbb{F}^m, \|\ \|_Y)$ oraz $T\colon X \to Y$ jest liniowy, wtedy $Tx = Ax$ dla $x \in \mathbb{F}^n$, gdzie A jest macierzą $m \times n$. Wszystkie funkcjonały liniowe na X i Y są ciągłe (bo topologie są równoważne euklidesowym), zatem X^* można utożsamić z $\mathbb{F}^n$ a Y^* z $\mathbb{F}^m$ w naturalny sposób, tzn. np. dla $\varphi, y \in \mathbb{F}^m$, $\varphi(y) = \sum_{k=1}^m \varphi_k y_k$. Wtedy dla $\varphi \in Y^* = \mathbb{F}^m$,

$$T^*\varphi(x) = \varphi(Tx) = \sum_{k=1}^m \varphi_k (Tx)_k = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n \varphi_k a_{kl} x_l = \sum_{l=1}^n x_l \sum_{k=1}^m \varphi_k a_{kl},$$

czyli $T^*\varphi = A^T\varphi$ (zauważmy, że w przypadku $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ macierz T^* to A^T nie A^*!).

Przykład 2. Rozpatrzmy operator „przesunięcia w lewo” na ℓ_p zadany wzorem $L(x_1, x_2, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots)$ dla $1 \leqslant p < \infty$. Wówczas L^* jest operatorem na ℓ_q, $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$, i zauważmy, że dla $y \in \ell_q$ i $x \in \ell_p$ mamy

$$L^*y(x) = y(Lx) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n x_{n+1} = 0x_1 + \sum_{n=2}^{\infty} y_{n-1}x_n = Ry(x),$$

gdzie $R(y_1, y_2, \ldots) = (0, y_1, y_2, \ldots)$. Zatem $L^* = R$, gdzie R jest operatorem „przesunięcia w prawo” na ℓ_q.

Przykład 3. Rozpatrzmy $T\colon \ell_1 \to c_0$ dany wzorem $Tx = (\sum_{k=n}^{\infty} x_k)_{n\geqslant 1}$. Wówczas przy utożsamieniu ℓ_1^* z ℓ_∞ i c_0^* z ℓ_1 mamy $T^*\colon \ell_1 \to \ell_\infty$ oraz dla $y \in \ell_1$ i $x \in c_0$,

$$T^*y(x) = y(Tx) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n (Tx)_n = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \sum_{k=n}^{\infty} x_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \sum_{n=1}^{k} y_n,$$

zatem $T^*y = (\sum_{n=1}^{k} y_n)_{k\geqslant 1}$.

Twierdzenie 8.2. *Jeśli $T \in B(X,Y)$, to $T^* \in B(Y^*, X^*)$ i $\|T^*\| = \|T\|$.*

Dowód. Złożenie przekształceń liniowych i ciągłych jest ciągłe, zatem $T^*\varphi \in X^*$ dla $\varphi \in Y^*$. Liniowość T^* jest oczywista, ponadto

$$\begin{aligned}\|T^*\| &= \sup_{\|\varphi\|\leqslant 1} \|T^*\varphi\| = \sup_{\|\varphi\|\leqslant 1} \sup_{\|x\|\leqslant 1} |\varphi(Tx)| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \sup_{\|\varphi\|\leqslant 1} |\varphi(Tx)| \\ &= \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|Tx\| = \|T\|,\end{aligned}$$

czyli w szczególności T^* jest ograniczony, a zatem ciągły. □

Oczywiście $(\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2)^* = \lambda_1 T_1^* + \lambda_2 T_2^*$ dla $T_1, T_2 \in B(X,Y)$ i $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}$. Kolejny fakt pokazuje jak wygląda sprzężenie złożenia operatorów liniowych.

Fakt 8.3. *Jeśli $T \in B(X,Y)$ i $S \in B(Y,Z)$, to $ST \in B(X,Z)$ i $(ST)^* = T^*S^* \in B(Z^*, X^*)$. W szczególności, jeśli T jest izomorfizmem, to T^* jest izomorfizmem i $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.*

Dowód. Mamy dla dowolnego $\varphi \in Z^*$,

$$(ST)^*\varphi = \varphi \circ S \circ T = T^*\varphi \circ S = T^*S^*\varphi,$$

czyli istotnie $(ST)^* = T^*S^*$. Jeśli T jest odwracalny to $T^{-1} \in B(Y,X)$ zatem $\mathrm{Id}_{X^*} = (\mathrm{Id}_X)^* = (T^{-1}T)^* = T^*(T^{-1})^*$ oraz $\mathrm{Id}_{Y^*} = (\mathrm{Id}_Y)^* = (TT^{-1})^* = (T^{-1})^*T^*$. □

Jeśli $T \in B(X,Y)$, to $T^* \in B(Y^*,X^*)$ oraz $T^{**} := (T^*)^* = B(X^{**},Y^{**})$. Przestrzeń X jak wiemy można traktować jako podprzestrzeń X^{**}. Następny fakt mówi, że operator T^{**} obcięty do X pokrywa się z T. W szczególności dla przestrzeni refleksywnych $T^{**} = T$.

Fakt 8.4. *Załóżmy, że i_X i i_Y są naturalnymi włożeniami X w X^{**} i Y w Y^{**}. Wtedy dla dowolnego $T \in B(X,Y)$, $T^{**}(i_X(x)) = i_Y(Tx)$.*

Dowód. Mamy dla $\varphi \in Y^*$ oraz $x \in X$,

$$T^{**}(i_X(x))(\varphi) = i_X(x) \circ T^*(\varphi) = T^*(\varphi)(x) = \varphi(Tx) = i_Y(Tx)(\varphi),$$

gdzie kolejno korzystamy z definicji $T^{**} = (T^*)^*$, i_X, T^* oraz i_Y. □

8.2 Twierdzenie Schaudera

Twierdzenie 8.5 (Schauder)**.** *Operator $T \in B(X,Y)$ jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy operator $T^* \in B(Y^*,X^*)$ jest zwarty.*

Dowód. „$\Rightarrow$" Załóżmy, że T jest zwarty, niech φ_n będzie ciągiem funkcjonałów z B_{Y^*}, chcemy pokazać, że $T^*\varphi_{n_k}$ jest zbieżny dla pewnego podciągu (n_k). Zbiór $K = \overline{T(B_X)} \subset Y$ jest zbiorem zwartym, metrycznym (w metryce indukowanej przez normę Y). Określmy

$$F_n := (\varphi_n)_{|K} \colon K \to \mathbb{F}.$$

Funkcje F_n są oczywiście ciągłe, ponadto jeśli $y_1, y_2 \in K$, $\|y_1 - y_2\| \leqslant \varepsilon$, to

$$|F_n(y_1) - F_n(y_2)| \leqslant \|\varphi_n\|\|y_1 - y_2\| \leqslant \|y_1 - y_2\| \leqslant \varepsilon,$$

czyli (F_n) jest równociągłym ciągiem funkcji z $C(K)$. Zauważmy też, że

$$\sup_n |F_n(y)| \leqslant \sup_n \|\varphi_n\|\|y\| \leqslant \|y\| \quad \text{dla } y \in K,$$

czyli ciąg (F_n) jest punktowo ograniczony. Zatem z twierdzenia Arzeli-Ascolego wynika, że ciąg F_n ma podciąg F_{n_k} jednostajnie zbieżny. Zauważmy jednak, że

$$\begin{aligned}\|F_{n_k} - F_{n_l}\|_\infty &= \sup_{y\in K} |\varphi_{n_k}(y) - \varphi_{n_l}(y)| \geqslant \sup_{x\in B_X} |\varphi_{n_k}(Tx) - \varphi_{n_l}(Tx)| \\ &= \sup_{x\in B_X} |T^*\varphi_{n_k}(x) - T^*\varphi_{n_l}(x)| = \|T^*\varphi_{n_k} - T^*\varphi_{n_l}\|.\end{aligned}$$

Stąd wynika, że $(T^*\varphi_{n_k})$ jest ciągiem Cauchy'ego w X^*, czyli jest zbieżny.

„$\Leftarrow$" Jeśli T^* jest zwarty, to z udowodnionej już implikacji wynika, że $T^{**} = (T^*)^*$ jest zwarty. Ale $T = i_Y^{-1} \circ T^{**} \circ i_X$ na podstawie Faktu 8.4, czyli jest zwarty jako złożenie operatora zwartego i dwóch izometrii. □

8.3 Izomorficzne włożenie, związki z surjektownością sprzężenia

Definicja 8.6. Mówimy, że ciągły operator liniowy T między przestrzeniami Banacha X i Y jest izomorficznym włożeniem, jeśli T jest izomorfizmem X na $T(X)$, tzn. istnieje stała $c > 0$ taka, że $\|Tx\| \geqslant c\|x\|$ dla $x \in X$.

Uwaga 8.7. $T \in B(X,Y)$ jest izomorficznym włożeniem wtedy i tylko wtedy, gdy T jest różnowartościowy i $T(X)$ jest domknięte.

Twierdzenie 8.8. *Załóżmy, że T jest ciągłym operatorem liniowym między przestrzeniami Banacha X i Y. Wówczas*
i) T jest izomorficznym włożeniem wtedy i tylko wtedy, gdy T^* jest na,
ii) T jest na wtedy i tylko wtedy, gdy T^* jest izomorficznym włożeniem.

Dowód. i) „$\Leftarrow$" Jeśli T^* jest na, to T^* jest przekształceniem otwartym, czyli $T^*(B_{Y^*}) \supset \delta B_{X^*}$ dla pewnego $\delta > 0$. Ale wtedy

$$\|Tx\| = \sup_{\varphi\in B_{Y^*}} \varphi(Tx) = \sup_{\varphi\in B_{Y^*}} T^*\varphi(x) \geqslant \sup_{\psi\in \delta B_{X^*}} \psi(x) = \delta\|x\|,$$

czyli T jest izomorficznym włożeniem.

„$\Rightarrow$". Jeśli T jest izomorficznym włożeniem, to $T = i \circ \tilde{T}$, gdzie $\tilde{T}$ jest izomorfizmem X na $Y_1 = T(X)$, a i włożeniem Y_1 w Y. Łatwo sprawdzić, z twierdzenia Hahna-Banacha, że i^* jest przekształceniem Y^* na Y_1^*, stąd ponieważ $\tilde{T}^*$ jest izomorfizmem Y_1^* i X^*, więc $T^* = \tilde{T}^* i^*$ jest na.

ii) „$\Rightarrow$" Załóżmy, że T^* jest izomorficznym włożeniem oraz $y_0 \notin \overline{T(B_X)}$. Z twierdzenia Mazura o oddzielaniu istnieje funkcjonał $\varphi \in Y^*$ oddzielający zbiór domknięty wypukły $\overline{T(B_X)}$ od wypukłego zwartego zbioru $\{y_0\}$. Ponieważ $0 \in T(B_X)$, więc (po ewentulanym podzieleniu przez $\varphi(y_0) \neq 0$) możemy założyć, że $\varphi(y_0) = 1 > \sup_{y \in T(B_X)} \mathrm{Re}(\varphi(y))$. Oczywiście $\lambda T(B_X) = T(\lambda B_X) = T(B_X)$ dla $|\lambda| = 1$, więc otrzymujemy

$$1 \geqslant \sup_{y \in T(B_X)} |\varphi(y)| = \sup_{x \in B_X} |\varphi(Tx)| = \sup_{x \in B_X} |T^*\varphi(x)| = \|T^*\varphi\| \geqslant \delta\|\varphi\|,$$

gdzie w ostatniej nierówności wykorzystaliśmy to, że T^* jest izomorficznym włożeniem. Stąd

$$1 = \varphi(y_0) \leqslant \|\varphi\|\|y_0\| \leqslant \delta^{-1}\|y_0\|.$$

W ten sposób wykazaliśmy, że $\delta B_Y \subset \overline{T(B_X)}$. Jak w dowodzie twierdzenia Banacha o przekształceniu otwartym wnioskujemy, że $\delta B_Y \subset T(2B_X)$, stąd łatwo wynika, że T jest na.

„$\Leftarrow$” Jeśli T jest na Y, to T jest przekształceniem otwartym, czyli $T(B_X) \supset \delta B_Y$ dla pewnego $\delta > 0$. Stąd dla $\varphi \in Y^*$,

$$\|T^*\varphi\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |T^*\varphi(x)| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |\varphi(Tx)| \geqslant \sup_{\|y\| \leqslant \delta} |\varphi(y)| = \delta\|y\|,$$

czyli T^* jest izomorficznym włożeniem Y^* w X^*. □

9 Widmo (spektrum) operatora

9.1 Grupa automorfizmów. Definicja widma operatora

Definicja 9.1. Załóżmy, że X jest przestrzenią Banacha. *Automorfizmem* przestrzeni X nazywamy przekształcenie $T \in B(X) = B(X, X)$ takie, że $T^{-1} \in B(X)$. Zbiór wszystkich automorfizmów X będziemy oznaczali przez $\mathrm{Aut}(X)$.

Z Twierdzenia Banacha o przekształceniu otwartym wynika (zob. Wniosek 6.3), że $T \in B(X)$ jest automorfizmem X wtedy i tylko wtedy, gdy T jest różnowartościowy i „na”.

Fakt 9.2. *Załóżmy, że X jest przestrzenią Banacha, $T \in B(X)$ oraz $\|T\| < 1$. Wówczas $\mathrm{Id} - T \in \mathrm{Aut}(X)$ oraz*

$$\|(\mathrm{Id} - T)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1 - \|T\|}, \quad \|(\mathrm{Id} - T)^{-1} - \mathrm{Id}\| \leqslant \frac{\|T\|}{1 - \|T\|}.$$

Dowód. Idea dowodu polega na uogólnieniu wzoru $(1-t)^{-1} = \sum_{k\geqslant 0} t^k$, $|t| < 1$ na przypadek gdy 1 zastąpimy operatorem identycznościowym, a liczbę t, operatorem T. W tym celu zdefiniujmy $T^0 = \mathrm{Id}$, $T^k = TT^{k-1}$ dla $k = 1, 2, \ldots$ oraz

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} T^k \in B(X).$$

Wówczas dla $m > n$,

$$\|S_m - S_n\| = \Big\| \sum_{k=n+1}^{m} T^k \Big\| \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} \|T^k\| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \|T\|^k = \frac{\|T\|^{n+1}}{1 - \|T\|},$$

stąd (S_n) jest ciągiem Cauchy'ego w $B(X)$, czyli zbiega (w normie operatorowej) do pewnego operatora $S \in B(X)$. Zauważmy, że

$$(\mathrm{Id} - T)S = \lim_{n\to\infty} (\mathrm{Id} - T)S_n = \lim_{n\to\infty} (\mathrm{Id} - T^{n+1}) = \mathrm{Id},$$
$$S(\mathrm{Id} - T) = \lim_{n\to\infty} S_n(\mathrm{Id} - T) = \lim_{n\to\infty} (\mathrm{Id} - T^{n+1}) = \mathrm{Id},$$

co pokazuje, że

$$(\mathrm{Id} - T)^{-1} = S = \sum_{k=0}^{\infty} T^k.$$

Stąd natychmiast

$$\|(\mathrm{Id} - T)^{-1}\| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \|T^k\| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \|T\|^k = \frac{1}{1 - \|T\|}$$

oraz

$$\|(\mathrm{Id} - T)^{-1} - \mathrm{Id}\| = \Big\| \sum_{k=1}^{\infty} T^k \Big\| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \|T\|^k = \frac{\|T\|}{1 - \|T\|}.$$

□

Wniosek 9.3. *Jeśli $T \in \mathrm{Aut}(X)$ oraz $S \in B(X)$ spełnia $\|T - S\| < \|T^{-1}\|^{-1}$, to $S \in \mathrm{Aut}(X)$ oraz*

$$\|S^{-1} - T^{-1}\| \leqslant \frac{\|T^{-1}\|^2 \|T - S\|}{1 - \|T^{-1}\| \|T - S\|}.$$

W szczególności $\mathrm{Aut}(X)$ *jest otwartym podzbiorem* $B(X)$.

Dowód. Mamy $S = T-(T-S) = T(\mathrm{Id}-T^{-1}(T-S))$ oraz $\|T^{-1}(T-S)\| < 1$, zatem z Faktu 9.2 wynika, że $S \in \mathrm{Aut}(X)$ jako iloczyn operatorów z $\mathrm{Aut}(X)$. Ponadto

$$\begin{aligned}\|S^{-1} - T^{-1}\| &= \|(\mathrm{Id} - T^{-1}(T-S))^{-1}T^{-1} - T^{-1}\| \\ &\leqslant \|(\mathrm{Id} - T^{-1}(T-S))^{-1} - \mathrm{Id}\|\|T^{-1}\| \leqslant \frac{\|T^{-1}\|^2\|T-S\|}{1 - \|T^{-1}\|\|T-S\|}.\end{aligned}$$

□

Definicja 9.4. Dla operatora liniowego $T \in B(X)$ *widmo (spektrum)* T określamy wzorem

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{F} \colon T - \lambda\mathrm{Id} \notin \mathrm{Aut}(X)\}.$$

Przykład 1. Jeśli X jest skończenie wymiarowe, to operator liniowy na X jest odwracalny wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$, zatem widmo operatora na X to zbiór jego wartości własnych.

Przykład 2. Niech $X = L_p[0,1]$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ oraz $Tf(x) = xf(x)$. Wówczas $(T - \lambda\mathrm{Id})(x) = (x-\lambda)f(x)$ czyli, jeśli $S = (T - \lambda\mathrm{Id})^{-1}$ istnieje, to $Sf(x) = (x-\lambda)^{-1}f(x)$. Łatwo sprawdzić, że $\|S\| = \|(x-\lambda)^{-1}\|_{L_\infty[0,1]} < \infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lambda \notin [0,1]$, czyli $\sigma(T) = [0,1]$. Ponadto T nie ma wartości własnych.

Fakt 9.5. *Widmo dowolnego operatora $T \in B(X)$ jest zbiorem zwartym w $\mathbb{F}$.*

Dowód. Jeśli $\lambda_0 \notin \sigma(T)$ oraz $|\lambda - \lambda_0| < \|(T - \lambda_0\mathrm{Id})^{-1}\|^{-1}$, to z Wniosku 9.3, $T - \lambda\mathrm{Id} = T - \lambda_0\mathrm{Id} + (\lambda - \lambda_0)\mathrm{Id} \in \mathrm{Aut}(X)$, zatem $\lambda \notin \sigma(T)$. Pokazuje to, że $\mathbb{F} \setminus \sigma(T)$ jest zbiorem otwartym, czyli $\sigma(T)$ jest domknięte. Ponadto dla $\lambda \neq 0$, $T - \lambda\mathrm{Id} = -\lambda(\mathrm{Id} - T/\lambda) \in \mathrm{Aut}(X)$, jeśli $\|T/\lambda\| < 1$, czyli $\lambda > \|T\|$. Pokazuje to, że $\sigma(T)$ jest ograniczony, zatem jest zwarty. □

9.2 Rezolwenta i jej podstawowe własności

Definicja 9.6. *Rezolwentą* operatora T w punkcie $\lambda \notin \sigma(T)$ nazywamy operator $R_\lambda := (T - \lambda\mathrm{Id})^{-1}$.

Fakt 9.7 (Równanie rezolwenty)**.** *Jeśli $\lambda, \mu \notin \sigma(T)$, to*

$$R_\lambda(T) - R_\mu(T) = (\lambda - \mu)R_\lambda(T)R_\mu(T),$$

w szczególności $R_\lambda(T)R_\mu(T) = R_\mu(T)R_\lambda(T)$.

Dowód. Mamy

$$\begin{aligned} R_\lambda(T) - R_\mu(T) &= (T - \lambda \mathrm{Id})^{-1} - (T - \mu \mathrm{Id})^{-1} \\ &= (T - \lambda \mathrm{Id})^{-1}((T - \mu \mathrm{Id}) - (T - \lambda \mathrm{Id}))(T - \mu \mathrm{Id})^{-1} \\ &= (\lambda - \mu) R_\lambda(T) R_\mu(T). \end{aligned}$$

□

Wniosek 9.8. *Przekształcenie $\lambda \mapsto R_\lambda(T)$ z $\mathbb{F} \setminus \sigma(T)$ w $B(X)$ jest ciągłe i różniczkowalne oraz*

$$R'_{\lambda_0}(T) := \lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{R_\lambda(T) - R_{\lambda_0}(T)}{\lambda - \lambda_0} = R_{\lambda_0}(T)^2 \qquad \textit{dla } \lambda_0 \in \mathbb{F} \setminus \sigma(T),$$

gdzie powyższa zbieżność zachodzi w normie operatorowej.

Dowód. By wykazać ciągłość w $\lambda_0 \notin \sigma(T)$ wystarczy zauważyć stosując Wniosek 9.3 (z $T = T - \lambda_0 \mathrm{Id}$ i $S = T - \lambda \mathrm{Id}$), że dla $|\lambda - \lambda_0| < \|R_{\lambda_0}(T)\|^{-1}$,

$$\|R_\lambda(T) - R_{\lambda_0}(T)\| \leqslant |\lambda - \lambda_0| \frac{\|R_{\lambda_0}(T)\|^2}{1 - |\lambda - \lambda_0| \|R_{\lambda_0}(T)\|}.$$

Równanie rezolwenty oraz udowodniona ciągłość implikują zatem, że

$$\frac{R_\lambda(T) - R_{\lambda_0}(T)}{\lambda - \lambda_0} = R_{\lambda_0}(T) R_\lambda(T) \to R_{\lambda_0}(T)^2$$

przy $\lambda \to 0$. □

Twierdzenie 9.9. *Jeśli $T \in B(X)$ i $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, to $\sigma(T) \neq \emptyset$.*

Dowód. Dla $|\lambda| > \|T\|$, na mocy oszacowania z Faktu 9.2,

$$\|R_\lambda(T)\| = \|(T - \lambda \mathrm{Id})^{-1}\| = \frac{1}{|\lambda|} \Big\| \Big(\mathrm{Id} - \frac{T}{\lambda}\Big)^{-1} \Big\| \leqslant \frac{1}{|\lambda| - \|T\|} \to 0$$

przy $|\lambda| \to \infty$. Załóżmy, że $\sigma(T) = \emptyset$, wówczas Wniosek 9.8 implikuje, że dla dowolnego $\varphi \in X^*$ oraz $x \in X$ funkcja $\lambda \mapsto \varphi(R_\lambda x)$ jest holomorficzna na $\mathbb{C}$. Wykazaliśmy, że jest zbieżna do zera przy $\lambda \to \infty$, czyli stale równa zero, skąd wynika, że $R_\lambda = 0$, co jest oczywiście niemożliwe. □

Przykład. Niech $X = \ell_2$ oraz

$$Tx = (x_2, -x_1, x_4, -x_3, \ldots),$$

wówczas łatwo sprawdzić, że dla $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$,

$$R_\lambda x = (T - \lambda)^{-1} x = \frac{1}{1+\lambda^2}(-\lambda x_1 - x_2, x_1 - \lambda x_2, -\lambda x_3 - x_4, x_3 - \lambda x_4, \ldots).$$

Stąd, jeśli ℓ_2 i operator T rozpatrujemy nad ciałem $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, to $\sigma(T) = \emptyset$, a jeśli $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, to $\sigma(T) = \{-i, i\}$.

Fakt 9.10. *Dla dowolnego operatora* $T \in B(X)$, $\sigma(T) = \sigma(T^*)$ *oraz* $R_\lambda(T^*) = R_\lambda(T)^*$ *dla* $\lambda \notin \sigma(T)$.

Dowód. Niech $S = T - \lambda \mathrm{Id}$ wtedy $S^* = T^* - \lambda \mathrm{Id}_{X^*}$. Jeśli S jest odwracalny, to S^* jest odwracalny i $(S^*)^{-1} = (S^{-1})^*$. Jeśli zaś S^* jest odwracalny, to S jest odwracalny na podstawie Twierdzenia 8.8. □

9.3 Widmo operatorów zwartych

Lemat 9.11. *Załóżmy, że* X_0 *jest domkniętą właściwą podprzestrzenią* X*, wówczas istnieje* $x \in X$ *taki, że* $\|x\| = 1$ *oraz* $\mathrm{dist}(x, X_0) \geqslant \frac{1}{2}$.

Dowód. Wybierzmy dowolny wektor $x_1 \in X \setminus X_0$ oraz $x_2 \in X_0$ taki, że $\|x_1 - x_2\| < 2\mathrm{dist}(x_1, X_0) = 2\mathrm{dist}(x_1 - x_2, X_0)$ i wystarczy przyjąć $x = (x_1 - x_2)/\|x_1 - x_2\|$. □

Lemat 9.12. *Załóżmy, że* T *jest operatorem zwartym na przestrzeni Banacha* X *wtedy, jeśli operator* $S = \mathrm{Id} + T$ *jest różnowartościowy, to jest „na" (czyli jest automorfizmem).*

Dowód. Najpierw pokażemy, że S jest izomorficznym włożeniem. Załóżmy przeciwnie, wtedy istnieje ciąg x_n taki, że $\|x_n\| = 1$ oraz $\|Sx_n\| \to 0$. Ze zwartości T, mamy $Tx_{n_k} \to y$, ale wtedy $x_{n_k} = Sx_{n_k} - Tx_{n_k} \to -y$, czyli $Sy = -\lim_k Sx_{n_k} = 0$, co przeczy różnowartościowości S, gdyż $\|y\| = \lim_k \|x_{n_k}\| = 1$.

Zatem w szczególności S przekształca zbiory domknięte na zbiory domknięte. Załóżmy, że $X_1 = SX \neq X$, wtedy możemy zdefiniować ściśle malejący ciąg domkniętych podprzestrzeni $X_k := S^k X$. Wybierzmy $x_k \in X_k$ takie, że $\|x_k\| = 1$ oraz $\mathrm{dist}(x_k, X_{k+1}) \geqslant \frac{1}{2}$. Wtedy dla $l > k$,

$$\|Tx_k - Tx_l\| = \| - x_k + (Sx_k + x_l - Sx_l)\| \geqslant \frac{1}{2},$$

bo $Sx_k, x_l, Sx_l \in X_{k+1}$. Zatem ciąg Tx_n nie ma podciągu zbieżnego, co przeczy zwartości T. □

Uwaga 9.13. Prawdziwa jest też odwrotna implikacja – jeśli S jest „na", to jest różnowartościowy.

Twierdzenie 9.14 (Riesz-Schauder)**.** *Załóżmy, że T jest operatorem zwartym na nieskończenie wymiarowej przestrzeni Banacha X. Wówczas*
i) $0 \in \sigma(T)$,
ii) jeśli $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$, to λ jest wartością własną skończonej krotności,
iii) dla $r > 0$ zbiór $\sigma(T) \cap \{\lambda\colon |\lambda| \geqslant r\}$ jest skończony, czyli tylko 0 może być punktem skupienia $\sigma(T)$.

Dowód. i) Gdyby $0 \notin \sigma(T)$, to T byłoby odwracalne i wtedy $T(B_X) \supset \varepsilon B_X$ dla $\varepsilon = 1/\|T^{-1}\| > 0$, co by znaczyło, że $\overline{T(B_X)}$ nie jest zwarte.

ii) Zauważmy, że $T - \lambda \mathrm{Id} = -\lambda(\mathrm{Id} - \frac{1}{\lambda}T)$ oraz operator $-\frac{1}{\lambda}T$ jest zwarty. Stąd, jeśli $\lambda \neq 0$ nie jest wartością własną T, to, na mocy Lematu 9.12, $T - \lambda\mathrm{Id}$ jest różnowartościowy i na, zatem jest odwracalny, czyli $\lambda \notin \sigma(T)$. Jeśli $Y = \mathrm{Ker}(T - \lambda\mathrm{Id})$, to $T(B_Y) = \lambda B_Y$, czyli Y musi być skończenie wymiarowe dla $\lambda \neq 0$.

iii) Załóżmy, że $r > 0$ i $\sigma(T) \cap \{\lambda\colon |\lambda| \geqslant r\}$ jest nieskończony. Wtedy ze zwartości $\sigma(T)$ wynika, że istnieją $\lambda_n \in \sigma(T)$ parami różne, $|\lambda_n| \geqslant r$ takie, że $\lambda_n \to \lambda_0 \in \sigma(T)$. Z punktu ii) wynika, że λ_n są wartościami własnymi, czyli istnieją $x_n \neq 0$ takie, że $Tx_n = \lambda_n x_n$.

Pokażemy najpierw, że $x_1, x_2, \dots$ są liniowo niezależne. Załóżmy przeciwnie i weźmy najmniejsze $m \geqslant 1$ takie, że $x_1, \dots, x_m$ są liniowo niezależne, a $x_1, \dots, x_{m+1}$ są liniowo zależne. Wtedy istnieją $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{F}$ takie, że $x_{m+1} = \sum_{k=1}^m \alpha_k x_k$, stąd

$$\lambda_{m+1} x_{m+1} = Tx_{m+1} = \sum_{k=1}^m \alpha_k T x_k = \sum_{k=1}^m \alpha_k \lambda_k x_k$$

czyli

$$0 = x_{m+1} - x_{m+1} = \sum_{k=1}^m \alpha_k \Big(\frac{\lambda_k}{\lambda_{m+1}} - 1\Big) x_k,$$

co wobec liniowej niezależności $x_1, \dots, x_m$ oznacza, że $\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = 0$, czyli $x_m = 0$. Zatem dostaliśmy sprzeczność i wykazaliśmy liniową niezależność $(x_n)_{n \geqslant 1}$.

Niech $X_n := \mathrm{Lin}(x_1, \dots, x_n)$, znajdźmy wektory $y_n \in X_n$ takie, że $\|y_n\| = 1$ oraz $\mathrm{dist}(y_n, X_{n-1}) \geqslant \frac{1}{2}$. Zauważmy, że $(T - \lambda_n)(X_n) \subset X_{n-1}$, stąd dla $n > m$,

$$\frac{1}{\lambda_n} T y_n - \frac{1}{\lambda_m} T y_m = y_n + (T - \lambda_n \mathrm{Id}) \frac{y_n}{\lambda_n} - \frac{1}{\lambda_m} T y_m =: y_n + z_n,$$

gdzie $z_n \in X_{n-1}$, zatem

$$\Big\| \frac{1}{\lambda_n} T y_n - \frac{1}{\lambda_m} T y_m \Big\| \geqslant \operatorname{dist}(y_n, X_{n-1}) \geqslant \frac{1}{2}.$$

Ale $\lambda_n \to \lambda_0$ oraz $\|Ty_n\| \leqslant \|T\|$, więc $(\frac{1}{\lambda_n} - \frac{1}{\lambda_0})Ty_n \to 0$, czyli dla $n > m \geqslant n_0$,

$$\Big\| \frac{1}{\lambda_0} T y_n - \frac{1}{\lambda_0} T y_m \Big\| \geqslant \frac{1}{4},$$

co pokazuje, że Ty_n nie może mieć podciągu zbieżnego i przeczy zwartości T. □

10 Operatory na przestrzeni Hilberta

10.1 Sprzężenie Hilbertowskie

Definicja 10.1. Załóżmy, że $\mathcal{H}$ jest przestrzenią Hilberta, a $T \colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ jest ciągłym operatorem linowym. Operator T^* określamy na $\mathcal{H}$ wzorem

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle \qquad \text{dla } x, y \in \mathcal{H}. \tag{13}$$

Fakt 10.2. *Definicja jest poprawna, tzn. dla $y \in \mathcal{H}$ istnieje dokładnie jeden wektor $T^*y \in \mathcal{H}$ spełniający* (13)*. Ponadto $T^* \in B(\mathcal{H})$ oraz $\|T^*\| = \|T\|$.*

Dowód. Dla ustalonego $y \in \mathcal{H}$ przekształcenie $x \mapsto \langle Tx, y \rangle$ jest liniowe i ciągłe na $\mathcal{H}$ (gdyż $|\langle Tx, y \rangle| \leqslant |Tx||y| \leqslant |x|\|T\||y|$), zatem z twierdzenia Riesza istnieje dokładnie jeden wektor T^*y taki, że $\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle$ dla wszystkich $x \in \mathcal{H}$. Liniowość T^* jest łatwą konsekwencją definicji, by wykazać ciągłość liczymy

$$\begin{aligned} \|T^*\| &= \sup_{|y| \leqslant 1} |T^* y| = \sup_{|x| \leqslant 1} \sup_{|y| \leqslant 1} |\langle x, T^* y \rangle| = \sup_{|y| \leqslant 1} \sup_{|x| \leqslant 1} |\langle Tx, y \rangle| \\ &= \sup_{|x| \leqslant 1} |Tx| = \|T\|. \end{aligned}$$

□

Uwaga 10.3. Warunek (13) można zastąpić równoważnym

$$\langle T^* x, y \rangle = \langle x, Ty \rangle \qquad \text{dla } x, y \in \mathcal{H}.$$

Uwaga 10.4. Przestrzeń Hilberta jest przestrzenią Banacha, dla operatora $T \in B(\mathcal{H})$ możemy zatem zdefiniować sprzężenie hilbertowskie i banachowskie, które będziemy przez chwilę oznaczać odpowiednio przez T^{*H} i T^{*B}. Załóżmy, że $\mathcal{H} = \ell_2(A)$ (jak wiemy każda przestrzeń Hilberta jest izometryczna z pewnym $\ell_2(A)$), wtedy przestrzeń $\mathcal{H}^*$ też możemy utożsamiać z $\ell_2(A)$ i mamy

$$\begin{aligned}\langle T^{*B}x, \overline{y}\rangle &= T^{*B}(x)(y) = x(Ty) = \sum_{k\in A} x_k(Ty)_k = \langle Ty, \overline{x}\rangle = \langle y, T^{*H}\overline{x}\rangle \\ &= \langle \overline{T^{*H}\overline{x}}, \overline{y}\rangle,\end{aligned}$$

gdzie dla $z = (z_k) \in l_2(A)$ definiujemy $\overline{z} := (\overline{z}_k)$. Mamy zatem $T^{*B}x = \overline{T^{*H}\overline{x}}$. W przypadku rzeczywistej przestrzeni Hilberta możemy zatem utożsamiać sprzężenia hilbertowskie i banachowskie. W przypadku zespolonym nie możemy tak robić, gdyż np. dla $T = i\mathrm{Id}$ mamy $T^{*H} = -i\mathrm{Id}$, zaś $T^{*B} = i\mathrm{Id}$. Wiąże się to z tym, że twierdzenie Riesza definiuje antyliniową izometrię $\mathcal{H}$ i $\mathcal{H}^*$. W dalszej części tego wykładu przez T^* będziemy oznaczać sprzężenie hilbertowskie.

Przykład 1. Gdy $\mathcal{H} = \mathbb{F}^n$ z naturalnym iloczynem skalarnym oraz $Tx = Ax$, to $T^*x = A^*x$.

Przykład 2. Gdy $\mathcal{H} = L_2(X, \mu)$ oraz $Tf = hf$ dla pewnego $h \in L_\infty(X, \mu)$, to $T^*f = \overline{h}f$.

Fakt 10.5. *Dla $T, S \in B(\mathcal{H})$, $\lambda \in \mathbb{F}$ mamy*
i) $(T^*)^* = T$,
ii) $(T + S)^* = T^* + S^*$, $(\lambda T)^* = \overline{\lambda}T^*$,
iii) $\mathrm{Id}^* = \mathrm{Id}$, $(TS)^* = S^*T^*$,
iv) T jest odwracalny wtedy i tylko wtedy, gdy T^* jest odwracalny, ponadto $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$,
v) $\sigma(T^*) = \overline{\sigma(T)}$ *i* $R_\lambda(T^*) = R_{\overline{\lambda}}(T)^*$,
vi) T jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy T^* jest zwarty.

Dowód. i)-iii) łatwo wynikają z definicji, iv) wynika z iii), a v) z iv). Własność vi) była udowodniona w ogólniejszym przypadku przestrzeni Banacha. □

10.2 Operatory unitarne i samosprzężone

Definicja 10.6. Operator $T \in B(\mathcal{H})$ nazywamy:
i) *samosprzężonym* (lub *hermitowskim*), jeśli $T^* = T$,
ii) *unitarnym*, jeśli $T^{-1} = T^*$ (czyli $T^*T = TT^* = \mathrm{Id}$),

iii) *normalnym*, jeśli $T^*T = TT^*$,
iv) *nieujemnym*, jeśli $\langle Tx, x\rangle \geqslant 0$ dla $x \in \mathcal{H}$.

Przykład. Operator $f \mapsto fh$ na $L_2(X, \mu)$ jest normalny dla dowolnego $h \in L_\infty$, samosprzężony, jeśli $h(x) \in \mathbb{R}$ dla μ-p.w. x oraz unitarny, jeśli $|h(x)| = 1$ dla μ-p.w. x.

Fakt 10.7. *Załóżmy, że T jest samosprzężonym operatorem na przestrzeni Hiberta $\mathcal{H}$. Wówczas*
i) $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ dla wszystkich $x \in \mathcal{H}$;
ii) $\|T\| = \sup_{|x|=1} |\langle Tx, x\rangle|$.

Dowód. By wykazać i) wystarczy zauważyć, że

$$\langle Tx, x\rangle = \langle x, T^*x\rangle = \langle x, Tx\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle}.$$

ii) Dla dowolnego $T \in B(\mathcal{H})$,

$$\sup_{|x|=1} |\langle Tx, x\rangle| \leqslant \sup_{|x|=1} |Tx||x| \leqslant \|T\|.$$

Dla operatora samosprzężonego

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle = \overline{\langle Ty, x\rangle},$$

zatem

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\langle Tx, y\rangle &= \frac{1}{2}(\langle Tx, y\rangle + \overline{\langle Tx, y\rangle}) = \frac{1}{2}(\langle Tx, y\rangle + \langle Ty, x\rangle) \\ &= \frac{1}{4}(\langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle)\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}|\mathrm{Re}\langle Tx, y\rangle| &\leqslant \frac{1}{4}(|\langle T(x+y), x+y\rangle| + |\langle T(x-y), x-y\rangle|) \\ &\leqslant \frac{1}{4}(|x+y|^2 + |x-y|^2) \sup_{|z|=1} |\langle Tz, z\rangle| \\ &= \frac{1}{2}(|x|^2 + |y|^2) \sup_{|z|=1} |\langle Tz, z\rangle|.\end{aligned}$$

Stąd

$$\|T\| = \sup_{|x|\leqslant 1} |Tx| = \sup_{|y|\leqslant 1} \sup_{|x|\leqslant 1} |\mathrm{Re}\langle Tx, y\rangle| \leqslant \sup_{|z|=1} |\langle Tz, z\rangle|.$$

□

Wniosek 10.8. *Dla dowolnego* $T \in B(\mathcal{H})$, $\|T^*T\| = \|TT^*\| = \|T\|^2$.

Dowód. Operator T^*T jest samosprzężony, więc

$$\|T^*T\| = \sup_{|x|=1} |\langle T^*Tx, x\rangle| = \sup_{|x|=1} |\langle Tx, Tx\rangle| = \|T\|^2.$$

Zamieniając T na T^* dostajemy $\|TT^*\| = \|(T^*)^*T^*\| = \|T^*\|^2 = \|T\|^2$. □

Fakt 10.9. *Jeśli T jest operatorem samosprzężonym, to* $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$.

Dowód. Mamy dla $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}|Tx - (\lambda + i\mu)x|^2 &= |Tx - \lambda x|^2 + \mu^2|x|^2 + 2\mu \mathrm{Im}\langle (T - \lambda \mathrm{Id})x, x\rangle \\ &= |Tx - \lambda x|^2 + \mu^2|x|^2 \geqslant \mu^2|x|^2.\end{aligned}$$

Załóżmy, że $\mu \neq 0$, wtedy $S = T - (\lambda + i\mu)\mathrm{Id}$ jest izomorficznym włożeniem, by pokazać, że jest odwracalny musimy pokazać, że jest „na". Wiemy, że $M = S(\mathcal{H})$ jest domkniętą podprzestrzenią $\mathcal{H}$, jeśli $y \in M^\perp$, to dla dowolnego $x \in \mathcal{H}$,

$$\langle x, Ty\rangle = \langle Tx, y\rangle = \langle Sx, y\rangle + (\lambda + i\mu)\langle x, y\rangle = \langle x, (\lambda - i\mu)y\rangle.$$

Zatem $Ty = (\lambda - i\mu)y$, czyli $y = 0$ (bo $\mu \neq 0$), stąd $M^\perp = \{0\}$, a więc $M = \mathcal{H}$. □

Twierdzenie 10.10. *Operator $T \in B(\mathcal{H})$ jest unitarny wtedy i tylko wtedy, gdy T jest izometrią i $T(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$.*

Dowód. „$\Rightarrow$". T jest odwracalny, więc $T(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$, ponadto

$$|Tx|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle = \langle x, x\rangle = |x|^2,$$

więc T jest izometrią.

„$\Leftarrow$". Dla $x \in \mathcal{H}$ zachodzi

$$\langle x, x\rangle = |x|^2 = |Tx|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle.$$

Stąd dla $x, y \in \mathcal{H}$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\langle x, y\rangle &= \frac{1}{4}(|x+y|^2 - |x-y|^2) \\ &= \frac{1}{4}(\langle T^*T(x+y), x+y\rangle - \langle T^*T(x-y), x-y\rangle) \\ &= \frac{1}{2}(\langle T^*Tx, y\rangle + \langle T^*Ty, x\rangle) = \frac{1}{2}(\langle T^*Tx, y\rangle + \langle y, T^*Tx\rangle) \\ &= \mathrm{Re}\langle T^*Tx, y\rangle.\end{aligned}$$

Ponadto

$$\mathrm{Im}\langle x, y\rangle = -\mathrm{Re}\langle ix, y\rangle = -\mathrm{Re}\langle T^*Tix, y\rangle = \mathrm{Im}\langle T^*Tx, y\rangle,$$

stąd dla dowolnych $x, y \in \mathcal{H}$,

$$\langle x, y\rangle = \langle T^*Tx, y\rangle$$

czyli $T^*T = \mathrm{Id}$. Ponieważ z założenia T jest „na", więc T jest odwracalny i $T^{-1} = T^*$. □

10.3 Rozkład spektralny operatorów zwartych

Fakt 10.11. *Jeśli T jest zwartym operatorem samosprzężonym, to $\|T\|$ lub $-\|T\|$ jest wartością własną T.*

Dowód. Oczywiście wystarczy rozpatrzeć przypadek $\|T\| > 0$. Wiemy (Fakt 10.7), że $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ oraz

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x\rangle|,$$

zatem istnieje ciąg wektorów x_n o normie 1 taki, że

$$\langle Tx_n, x_n\rangle \to \lambda \in \{-\|T\|, \|T\|\},$$

pokażemy, że λ jest wartością własną T. Mamy

$$|Tx_n - \lambda x_n|^2 = |Tx_n|^2 + \lambda^2|x_n|^2 - 2\lambda\mathrm{Re}\langle Tx_n, x_n\rangle \leqslant 2\lambda^2 - 2\lambda\mathrm{Re}\langle Tx_n, x_n\rangle,$$

zatem $|Tx_n - \lambda x_n| \to 0$. Ze zwartości T wynika istnienie ciągu n_k i $y \in \mathcal{H}$ takich, że $Tx_{n_k} \to y$. Zauważmy, że

$$\lambda x_{n_k} = -(Tx_{n_k} - \lambda x_{n_k}) + Tx_{n_k} \to y,$$

zatem $|y| = |\lambda| \neq 0$ oraz

$$Ty = \lim_{k\to\infty} T(\lambda x_{n_k}) = \lambda \lim_{k\to\infty} Tx_{n_k} = \lambda y.$$

□

Fakt 10.12. *Załóżmy, że T jest operatorem samosprzężonym na przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. Wówczas*
i) jeśli x i y są wektorami własnymi T odpowiadającymi różnym wartościom własnym, to $\langle x, y\rangle = 0$,
ii) jeśli M jest podprzestrzenią niezmienniczą T (tzn. $T(M) \subset M$), to $M^\perp$ też jest podprzestrzenią niezmienniczą T.

Dowód. i) Załóżmy, że $Tx = \lambda x$, $Ty = \mu y$, $\lambda \neq \mu$, wówczas

$$\lambda\langle x, y\rangle = \langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle = \mu\langle x, y\rangle,$$

stąd $\langle x, y\rangle = 0$.

ii) Załóżmy, że $x \in M^\perp$, wtedy dla dowolnego $y \in M$, $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle = 0$, zatem $Tx \in M^\perp$. □

Kolejne twierdzenie można traktować jako uogólnienie faktu z algebry liniowej mówiącego, że każda macierz samosprzężona jest diagonalizowalna w bazie ortonormalnej.

Twierdzenie 10.13 (Hilbert-Schmidt)**.** *Załóżmy, że T jest zwartym, samosprzężonym operatorem na przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. Wówczas istnieje układ o.n. $(u_n)_{n=1}^N$, $N \leqslant \dim\mathcal{H}$ w przestrzeni $\mathcal{H}$ oraz niezerowe liczby λ_n o nierosnących modułach takie, że $Tu_n = \lambda_n u_n$ i $Tx = 0$, jeśli $\langle x, u_n\rangle = 0$ dla wszystkich n. Ponadto, jeśli $N = \infty$, to $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$.*

Dowód. Z ogólnej teorii operatorów zwartych (Twierdzenie 9.14) wiemy, że niezerowe wartości własne T są skończonej krotności oraz istnieje tylko skończenie wiele wartości własnych o module większym od ustalonej liczby. Zatem możemy niezerowe wartości własne (wypisane z krotnościami) ustawić w ciąg (być może skończony) $(\lambda_n)_{n=1}^N$ taki, że $|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \ldots$ oraz, jeśli $N = \infty$, $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$. Z Faktu 10.12i) istnieje układ o.n. $(u_n)_{n=1}^N$ taki, że $Tu_n = \lambda_n u_n$, niech $M := \mathrm{Lin}(u_1, u_2, \ldots)$. Zauważmy, że $TM \subset M$, więc, na mocy Faktu 10.12ii), $T\colon M^\perp \to M^\perp$. Niech $\tilde{T} = T|_{M^\perp}$, wtedy $\tilde{T}$ jest samosprzężony i nie ma niezerowych wartości własnych, zatem z Faktu 10.11, $\tilde{T} = 0$. □

Uwaga 10.14. i) Jeśli T, wartości własne $(\lambda_n)_{n=1}^N$ i układ o.n. $(u_n)_{n=1}^N$ jest jak w twierdzeniu Hilberta-Schmidta, to

$$T = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \langle \cdot, u_n\rangle u_n.$$

Nietrudno wykazać (zob. dowód Twierdzenia 10.16), że dla $N = \infty$ podany szereg jest zbieżny w normie operatorowej.

ii) Oczywiście układ $(u_n)_{n=1}^N$ można rozszerzyć do bazy o.n. przestrzeni $\mathcal{H}$ złożonej z wektorów własnych (z wartościami własnymi zero dla dodanych wektorów).

Uwaga 10.15. Twierdzenie Hilberta-Schmidta pozwala zdefiniować *rachunek funkcyjny* na zwartych operatorach samosprzężonych. Niech $(u_n)_{n=1}^N$ będzie układem o.n. $\mathcal{H}$ oraz $(\lambda_n)_{n=1}^N$ wektorami własnymi T takimi jak w Twierdzeniu 10.13, wtedy możemy określić

$$f(T) := f(0)\mathrm{Id} + \sum_{n=1}^{N} (f(\lambda_n) - f(0))\langle \cdot, u_n\rangle u_n \qquad \text{dla } f \in \ell_\infty(\sigma(T)).$$

(Jeśli f jest nieciągła w zerze oraz $N = \infty$, to zbieżność szeregu operatorów należy rozumieć jako punktową na $\mathcal{H}$, dla f ciągłych w zerze mamy zbieżność w normie operatorowej.) Wówczas, jeśli $f = \sum_{k=0}^m a_k x^k$, to $f(T) = a_0\mathrm{Id} + \sum_{k=1}^m a_k T^k$, ponadto $(f+g)(T) = f(T)+g(T)$, $(fg)(T) = f(T)g(T)$ i $(\lambda f)(T) = \lambda f(T)$, czyli $f \mapsto f(T)$ określa homeomorfizm między algebrami $\ell_\infty(\sigma(T))$ i $B(\mathcal{H})$.
Okazuje się, że dla operatorów samosprzężonych można określić podobny homeomorfizm z $C(\sigma(T))$ w $B(\mathcal{H})$, ale wymaga to rozwinięcia nieco bardziej zaawansowanej teorii.

Następny rezultat uogólnia następujący fakt z algebry liniowej – każdą macierz $A \in M_{n\times n}$ można przedstawić jako $A = U|A|$, gdzie $|A| = \sqrt{A^*A}$ jest nieujemną macierzą samosprzężoną, a U jest macierzą unitarną (czyli U przekształca układ o.n. wektorów własnych $|A|$ na inny układ o.n.).

Twierdzenie 10.16. *Załóżmy, że T jest zwartym operatorem na przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. Wówczas istnieją układy ortonormalne $(u_n)_{n=1}^N$ i $(v_n)_{n=1}^N$, $N \leqslant \infty$ oraz liczby dodatnie $(\lambda_n)_{n=1}^N$ takie, że*

$$T = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \langle \cdot, u_n\rangle v_n,$$

przy czym powyższy szereg jest zbieżny (dla $N = \infty$) w normie operatorowej.

Dowód. Operator $S = T^*T$ jest zwarty, samosprzężony i nieujemny. Z Twierdzenia 10.13 wynika, że istnieje układ ortonormalny $(u_n)_{n=1}^N$ taki, że $Su_n = \mu_n u_n$ i S znika na podprzestrzeni $\mathrm{Lin}(u_n\colon n \leqslant N)^\perp$. Z nieujemności S wynika, że $\mu_n > 0$. Niech

$$\lambda_n := \sqrt{\mu_n} \quad \text{ i } \quad v_n = \frac{1}{\lambda_n} T u_n,$$

wówczas

$$\langle v_n, v_m\rangle = \frac{1}{\lambda_n\lambda_m}\langle T^*Tu_n, u_m\rangle = \frac{\mu_n}{\lambda_n\lambda_m}\langle u_n, u_m\rangle = \delta_{n,m},$$

czyli $(v_n)_{n=1}^N$ jest układem o.n.. Weźmy dowolny $x \in \mathcal{H}$, wtedy

$$x = \sum_{n=1}^{N} \langle x, u_n \rangle u_n + x_0,$$

gdzie $Tx_0 = 0$ oraz szereg $\sum_{n=1}^{N} \langle x, u_n \rangle u_n$ jest zbieżny w normie. Zatem

$$Tx = T\Big(\sum_{n=1}^{N} \langle x, u_n \rangle u_n\Big) = \sum_{n=1}^{N} \langle x, u_n \rangle T u_n = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \langle x, u_n \rangle v_n.$$

Ponadto dla $m < N$,

$$\Big|Tx - \sum_{n=1}^{m} \lambda_n \langle x, u_n \rangle v_n\Big|^2 = \Big| \sum_{n=m+1}^{N} \lambda_n \langle x, u_n \rangle v_n\Big|^2 = \sum_{n=m+1}^{N} \lambda_n^2 |\langle x, u_n \rangle|^2,$$

stąd

$$\Big|T - \sum_{n=1}^{m} \lambda_n \langle \cdot, u_n \rangle v_n\Big| \leqslant \sup_{n \geqslant m+1} |\lambda_n| \to 0$$

przy $m \to \infty$. $\square$

10.4 Problem istnienia podprzestrzeni niezmienniczej

Następujący ważny problem pozostaje otwarty:

Problem 10.17. *Czy każdy operator $T \in B(\mathcal{H})$ na nieskończenie wymiarowej zespolonej przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ ma właściwą domkniętą podprzestrzeń niezmienniczą, tzn. czy musi istnieć domknięta podprzestrzeń M taka, że $TM \subset M$ oraz $M \notin \{\{0\}, \mathcal{H}\}$.*

Odpowiedź jest twierdząca dla wielu klas operatorów (np. operatorów normalnych oraz operatorów zwartych). Podobne pytanie można zadać zamieniając przestrzeń Hilberta na nieskończenie wymiarową przestrzeń Banacha X. Wówczas odpowiedź zależy od przestrzeni – Charles Read skonstruował operator $T \in B(\ell_1)$ bez własciwej podprzestrzeni niezmienniczej, z drugiej zaś strony są przestrzenie Banacha X w których jest na tyle mało operatorów ograniczonych, że można wykazać, że każdy z nich ma podprzestrzeń niezmienniczą (np. Spiros Argyros i Richard Haydon rozwiązali w 2009 długo otwarty problem i skonstruowali ośrodkową przestrzeń Banacha w której każdy operator ograniczony jest postaci $\lambda\mathrm{Id} + T$, gdzie T jest operatorem zwartym).

11 Transformata Fouriera

11.1 Transformata Fouriera na L_1. Podstawowe własności

Definicja 11.1. Dla $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ określamy *tranformatę Fouriera* f, $\mathcal{F}f = \widehat{f}$ wzorem

$$\mathcal{F}f(x) = \widehat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-i\langle x,y\rangle}\mathrm{d}y.$$

Uwaga 11.2. Jeśli X jest n-wymiarowym wektorem losowym z gęstością g, to oczywiście g jest całkowalne oraz funkcja charakterystyczna X, $\varphi_X(t) = \widehat{g}(-t)$.

Przykład 1. Jeśli $f = \mathbb{1}_{[a,b]}$, $a < b$, to dla $x \neq 0$

$$\widehat{f}(x) = \int_a^b e^{-ixy}\mathrm{d}y = \frac{e^{-iax} - e^{-ibx}}{ix}.$$

Przykład 2. Jeśli $a > 0$ oraz $f(x) = e^{-a|x|^2}$, $x \in \mathbb{R}$, to $\widehat{f}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-|x|^2/(4a)}$.

Istotnie, zmienna losowa G o rozkładzie normalnym ze średnią zero i wariancją $\frac{1}{2a}$ ma gęstość $\sqrt{\frac{a}{\pi}}f$, stąd

$$\widehat{f}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\varphi_G(-x) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{|x|^2}{4a}}.$$

Przykład 3. Jeśli $f(x) = \prod_{k=1}^n f_k(x_k)$, gdzie $f_k \in L_1(\mathbb{R})$, $1 \leqslant k \leqslant n$, to z twierdzenia Fubiniego, $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ i $\widehat{f}(x) = \prod_{k=1}^n \widehat{f_k}(x_k)$. W szczególności Przykład 2 uogólnia się na $\mathbb{R}^n$ – jeśli $a > 0$ oraz $f(x) = e^{-a|x|^2}$, $x \in \mathbb{R}^n$, to $\widehat{f}(x) = (\frac{\pi}{a})^{n/2}e^{-|x|^2/(4a)}$.

Twierdzenie 11.3 (Riemanna-Lebesgue'a)**.** *Jeśli $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$, to $\widehat{f}$ jest funkcją jednostajnie ciągłą, $\|\widehat{f}\|_\infty \leqslant \|f\|_1$ oraz $\lim_{|x|\to\infty} \widehat{f}(x) = 0$.*

Dowód. Mamy

$$|\widehat{f}(x+h)-\widehat{f}(x)| \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \left|f(y)\left(e^{-i\langle x+h,y\rangle}-e^{-i\langle x,y\rangle}\right)\right|\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\left|e^{-i\langle h,y\rangle}-1\right|\mathrm{d}y$$

i z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej łatwo otrzymujemy jednostajną ciągłość $\widehat{f}$. Nierówność $|\widehat{f}(x)| \leqslant \|f\|_1$ jest łatwa, stąd $\|\widehat{f}\|_\infty \leqslant \|f\|_1$.

Ustalmy $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$, wówczas dla $\varepsilon > 0$ istnieje g funkcja prosta postaci $g = \sum_{k=1}^{m} a_k \mathbb{1}_{A_k}$, gdzie A_k są prostopadłościanami (czyli produktami odcinków) oraz $\|f - g\|_1 \leqslant \varepsilon$. Z Przykładów 1 i 3 wynika, że $\lim_{|x|\to\infty} \widehat{g}(x) = 0$, stąd

$$\limsup_{|x|\to\infty} |\widehat{f}(x)| \leqslant \|\widehat{g} - \widehat{f}\|_\infty \leqslant \|g - f\|_1 \leqslant \varepsilon$$

i z dowolności $\varepsilon > 0$ mamy $\lim_{|x|\to\infty} \widehat{f}(x) = 0$. □

Definicja 11.4. *Splot* funkcji $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$ definiujemy jako

$$f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y. \tag{14}$$

Fakt 11.5. *Jeśli $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$, to całka* (14) *jest dobrze określona dla p.w. x. ponadto $f * g \in L_1(\mathbb{R}^n)$ oraz $\|f * g\|_1 \leqslant \|f\|_1\|g\|_1$.*

Dowód. Mamy na mocy twierdzenia Fubiniego

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)g(y)|\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \|f\|_1\|g\|_1 < \infty,$$

co pokazuje w szczególności, że $\int |f(x-y)g(y)|\mathrm{d}y < \infty$ dla p.w. $x \in \mathbb{R}^n$, czyli splot jest dobrze zdefiniowany, oraz, że $\|f * g\|_1 \leqslant \|f\|_1\|g\|_1$. □

Fakt 11.6. *Jeśli $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$, to $\widehat{f * g} = \widehat{f}\widehat{g}$.*

Dowód. Poprzedni dowód pokazuje, że $f(x-y)g(y)e^{-i\langle x,z\rangle} \in L_1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, stąd na mocy twierdzenia Fubiniego,

$$\begin{aligned}\widehat{f * g}(z) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x,z\rangle} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle y,z\rangle} g(y) \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)e^{-i\langle x-y,z\rangle}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \widehat{f}(z)\widehat{g}(z).\end{aligned}$$

□

11.2 Przedłużenie na L_2. Transformata odwrotna

Fakt 11.7. *Jeśli $f_1, f_2 \in L_1(\mathbb{R}^n)$, to*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f_1}(x)f_2(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} f_1(x)\widehat{f_2}(x)\mathrm{d}x.$$

Dowód. Stosując twierdzenie Fubiniego dostajemy

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f_1}(x) f_2(x) \mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f_1(y) e^{-i\langle x,y\rangle} \mathrm{d}y f_2(x) \mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f_1(y) \int_{\mathbb{R}^n} f_2(x) e^{-i\langle x,y\rangle} \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} f_1(y) \widehat{f_2}(y) \mathrm{d}y.\end{aligned}$$

□

Określmy dla $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ i $y \in \mathbb{R}^n$ funkcję $\tau_y f$ wzorem

$$\tau_y f(x) := f(x+y) \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Fakt 11.8. *Załóżmy, że $1 \leqslant p < \infty$ i $f \in L_p(\mathbb{R})$ wtedy*

$$\|\tau_y f - f\|_p = \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+y) - f(y)|^p \mathrm{d}x \Big)^{1/p} \to 0 \text{ przy } y \to 0.$$

Równoważnie, przekształcenie $y \mapsto \tau_y f$ jest ciągłe z $\mathbb{R}^n$ w $L_p(\mathbb{R}^n)$.

Dowód. Jeśli f jest funkcją ciągłą o nośniku zwartym, to teza wynika łatwo z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej. Jeśli f jest dowolne, to dla $\varepsilon > 0$ możemy znaleźć funckję ciągłą g o nośniku zwartym taką, że $\|f-g\|_p \leqslant \varepsilon$ i wtedy

$$\|\tau_y f - f\|_p \leqslant \|\tau_y f - \tau_y g\|_p + \|\tau_y g - g\|_p + \|g-f\|_p = 2\|g-f\|_p + \|\tau_y g - g\|_p \leqslant 3\varepsilon$$

dla dostatecznie małego $|y|$.

W ten sposób pokazaliśmy ciągłość przekształcenia $y \mapsto \tau_y f$ w zerze, by wykazać ciągłość w $y_0 \neq 0$ wystarczy zauważyć, że $\tau_{y+y_0} f = \tau_y \tau_{y_0} f$. □

Twierdzenie 11.9. *Załóżmy, że $f \in L_1(\mathbb{R}^n) \cap L_2(\mathbb{R}^n)$, wówczas*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(y)|^2 \mathrm{d}y = (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 \mathrm{d}x.$$

Dowód. Zdefiniujmy dodatkowo $\tilde{f}(x) := \overline{f(-x)}$ i $g := f * \tilde{f}$. Mamy

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) \overline{f(-y)} \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} f(x+y) \overline{f(y)} \mathrm{d}y,$$

w szczególności

$$|g(x)| \leqslant \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+y)|^2 \mathrm{d}y \Big)^{1/2} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |\overline{f(y)}|^2 \mathrm{d}y \Big)^{1/2} = \|f\|_2^2 < \infty$$

oraz

$$g(0) = \int |f(y)|^2 dy.$$

Szacujemy

$$\begin{aligned}|g(x) - g(0)| &= \Big| \int_{\mathbb{R}^n} (f(x+y) - f(y))\overline{f(y)}\mathrm{d}y \Big| \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |f(x+y) - f(y)||\overline{f(y)}|\mathrm{d}y \\ &\leqslant \|\tau_x f - f\|_2 \|f\|_2,\end{aligned}$$

co na mocy Faktu 11.8 pokazuje ciągłość g w zerze.

Zauważmy, że

$$\widehat{\widetilde{f}}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(-x)} e^{-i\langle x,y\rangle}\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(x)} e^{i\langle x,y\rangle}\mathrm{d}x = \overline{\int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\langle x,y\rangle}\mathrm{d}x} = \overline{\widehat{f}(y)},$$

zatem $\widehat{g} = \widehat{f}\widehat{\widetilde{f}} = |\widehat{f}|^2$. Dla $\varepsilon > 0$ z Faktu 11.7 otrzymujemy,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(x)|^2 e^{-\varepsilon|x|^2}\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g}(x) e^{-\varepsilon|x|^2}\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\widehat{e^{-\varepsilon|x|^2}}\mathrm{d}x \\ &= \Big(\frac{\pi}{\varepsilon}\Big)^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} g(x) e^{-\frac{|x|^2}{4\varepsilon}}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Oczywiście

$$\int |\widehat{f}(x)|^2 e^{-\varepsilon|x|^2} dx \to \int |\widehat{f}(x)|^2 \quad \text{przy } \varepsilon \to 0.$$

By zbadać zbieżność drugiej strony równości skorzystamy z tego, że funkcja $(4\varepsilon\pi)^{-n/2} e^{-|x|^2/(4\varepsilon)}$ jest gęstością zmiennej losowej, zatem

$$\begin{aligned}\Big(\frac{\pi}{\varepsilon}\Big)^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} g(x) e^{-\frac{|x|^2}{4\varepsilon}}\mathrm{d}x &= (2\pi)^n \Big(g(0) + \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} (g(\sqrt{2\varepsilon}x) - g(0)) e^{-\frac{|x|^2}{2}}\mathrm{d}x\Big) \\ &\to (2\pi)^n g(0) \quad \text{przy } \varepsilon \to 0\end{aligned}$$

na mocy twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej (funkcja g jest ograniczona i ciągła w zerze). □

Wniosek 11.10. *Przekształcenie $\mathcal{F}f = \widehat{f}$ można w jednoznaczny sposób przedłużyć z $L_1(\mathbb{R}^n) \cap L_2(\mathbb{R}^n)$ do ciągłego liniowego przekształcenia z $L_2(\mathbb{R}^n)$ w $L_2(\mathbb{R}^n)$. Dla $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(y)|^2 \mathrm{d}y = (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 \mathrm{d}x$$

oraz $\|\widehat{f} - \widehat{f}_A\|_2 \to 0$ *przy* $A \to \infty$*, gdzie*

$$\widehat{f}_A(x) = \int_{|x| \leqslant A} e^{-i\langle x,y\rangle} f(x)\mathrm{d}x.$$

Ponadto $f \mapsto (2\pi)^{-n/2}\widehat{f}$ *jest przekształceniem unitarnym na* $L_2(\mathbb{R}^n)$*.*

Dowód. Przestrzeń $L_1(\mathbb{R}^n) \cap L_2(\mathbb{R}^n)$ zawiera funkcje ciągłe o nośniku zwartym, więc jest gęsta w $L_2(\mathbb{R}^n)$. Twierdzenie 11.9 pokazuje zatem, że $\mathcal{F}$ można jednoznacznie przedłużyć na przestrzeń $L_2(\mathbb{R}^n)$ oraz $\|\widehat{f}\|_2 = (2\pi)^{n/2}\|f\|_2$. Dla $f \in L_2$ niech $f_A(x) = f(x)\mathbb{1}_{\{|x|\leqslant A\}}$, wtedy $f_A \to f$ w L_2 przy $A \to \infty$, skąd $\widehat{f_A} \to \widehat{f}$ w L_2.

Wiemy, że $f \mapsto (2\pi)^{-n/2}\widehat{f}$ jest liniową izometrią na $L_2(\mathbb{R}^n)$, musimy pokazać, że jest na, czyli $M := \mathcal{F}(L_2(\mathbb{R}^n)) = L_2(\mathbb{R}^n)$. Oczywiście M jest domkniętą podprzestrzenią L_2, z Faktu 11.7 łatwo wynika, że jeśli $f \in M^\perp$, to $\widehat{f} = 0$, czyli $f = 0$, zatem $M^\perp = \{0\}$, co wobec domkniętości M implikuje, że $M = L_2$. □

Uwaga 11.11. By uniknąć czynnika $(2\pi)^{-n/2}$ wielu autorów przeskalowuje transformatę Fouriera tak by była ona operatorem unitarnym. Można to osiągnąć rozważając $\widehat{f}(2\pi x)$ albo $(2\pi)^{-n/2}\widehat{f}$ zamiast $\widehat{f}$.

Twierdzenie 11.12. *Dla* $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$ *mamy* $\hat{\hat{f}}(x) = (2\pi)^n f(-x)$*, czyli* $f(x) = (2\pi)^{-n}\hat{\hat{f}}(-x)$*.*

Dowód. Operator $(2\pi)^{-n/2}\mathcal{F}$ jest unitarny na L_2, zatem $\mathcal{F}^{-1} = (2\pi)^n\mathcal{F}^*$. Fakt 11.7 zachodzi przez łatwą aproksymację dla $f_1, f_2 \in L_2(\mathbb{R}^n)$, co oznacza, że $\mathcal{F}^*f(x) = \mathcal{F}f(-x)$. Zatem $\mathcal{F}\mathcal{F}f(x) = \mathcal{F}\mathcal{F}^*f(-x) = (2\pi)^n f(-x)$. □

Wniosek 11.13. *Załóżmy, że* $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ *oraz* $\widehat{f} \in L_1(\mathbb{R}^n)$*. Wówczas*

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\widehat{\widehat{f}}(-x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(y)e^{i\langle x,y\rangle}\mathrm{d}y \qquad \textit{dla p.w. } x,$$

w szczególności f *pokrywa się p.w. z funkcją jednostajnie ciągłą, znikającą w nieskończoności.*

Dowód. Niech $g_a = (\frac{a}{\pi})^{n/2}e^{-a|x|^2}$ dla $a > 0$, wtedy

$$\|f * g_a\|_2^2 \leqslant \|f * g_a\|_\infty \|f * g_a\|_1 \leqslant \|f\|_1\|g_a\|_\infty\|f\|_1\|g_a\|_1 < \infty$$

czyli $f * g_a \in L_2$. Ponadto

$$\widehat{f * g_a}(x) = \widehat{f}(x)\widehat{g_a}(x) = \widehat{f}(x)e^{-|x|^2/(4a)}$$

zatem z udowodnionego poprzednio wzoru na odwrócenie w L_2 dostajemy

$$f * g_a(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(y) e^{-|y|^2/(4a)} e^{i\langle x,y\rangle} \mathrm{d}y \to \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(y) e^{i\langle x,y\rangle} \mathrm{d}y$$

przy $a \to \infty$ i wystarczy skorzystać z poniższego lematu. $\square$

Lemat 11.14. *Dla $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ i $g_a = (\frac{a}{\pi})^{n/2} e^{-a|x|^2}$ mamy $\|f * g_a - f\|_1 \to 0$ przy $a \to \infty$.*

Dowód. Funkcja g_a jest gęstością, stąd

$$\begin{aligned} \|f * g_a - f\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} \Big| \int_{\mathbb{R}^n} (f(x-y) - f(x)) g_a(y) \mathrm{d}y \Big| \mathrm{d}x \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |(f(x-y) - f(x)) g_a(y)| \mathrm{d}y \mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g_a(y) \int_{\mathbb{R}^n} |(f(x-y) - f(x))| \mathrm{d}x \mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g_a(y) \|\tau_y f - f\|_1 \mathrm{d}y. \end{aligned}$$

By zakończyć dowód wystarczy zauważyć, że $\|\tau_y f - f\|_1 \leqslant \|\tau_y f\|_1 + \|f\|_1 = 2\|f\|_1$ dla wszystkich y, z Faktu 11.8, $\|\tau_y f - f\|_1 \leqslant \varepsilon$ dla $|y| \leqslant \delta$ oraz $\int_{|y|>\delta} g_a(y) \to 0$ przy $a \to \infty$. $\square$

11.3 Związki z różniczkowaniem. Klasa Schwartza funkcji szybko malejących

Twierdzenie 11.15. *Dla dowolnego multiindeksu α,*
i) jeśli $x^\beta f(x) \in L_1(\mathbb{R}^n)$ dla $0 \leqslant \beta \leqslant \alpha$, to $D^\alpha \widehat{f}$ istnieje oraz $D^\alpha \widehat{f} = ((-ix)^\alpha f)\widehat{\ }$;
ii) jeśli dla $0 \leqslant \beta \leqslant \alpha$, $D^\beta f \in L_1(\mathbb{R}^n)$, to $\widehat{D^\alpha f} = (ix)^\alpha \widehat{f}$.

Dowód. Przez łatwą indukcję wystarczy udowodnić obie części dla $\alpha = (1, 0, \ldots, 0)$.
i) Mamy

$$\frac{\widehat{f}(y + he_1) - \widehat{f}(y)}{h} = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\langle x,y\rangle} \frac{e^{-ihx_1} - 1}{h} \mathrm{d}x,$$

funkcja podcałkowa dąży punktowo przy $h \to 0$ do $-ix_1 f(x) e^{-i\langle x,y\rangle}$ oraz jej moduł jest majoryzowany przez $|x_1 f(x)| \in L_1$, więc

$$\frac{\partial \widehat{f}}{\partial x_1}(y) = \lim_{h\to 0} \frac{\widehat{f}(y+h) - \widehat{f}(y)}{h} = \int_{\mathbb{R}^n} -ix_1 f(x) e^{-i\langle x,y\rangle} \mathrm{d}x = \widehat{-ix_1 f}(y).$$

ii) Całkując przez części dostajemy

$$\int_{-h}^{h} \frac{\partial}{\partial x_1} f(x) e^{-ix_1 y_1} \mathrm{d}x_1 = iy_1 \int_{-h}^{h} f(x) e^{-ix_1 y_1} \mathrm{d}x_1 + f(h) e^{-ihy_1} - f(-h) e^{ihy_1}.$$

Jeśli $f \in L_1$, to można znaleźć ciąg $h_k \to \infty$ taki, że

$$\lim_{k \to \infty} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |f(\pm h_k, x_2, \dots, x_n)| \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n = 0$$

i dostajemy

$$\widehat{\frac{\partial}{\partial x_1} f}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial x_1} f(x) e^{-i\langle x, y \rangle} \mathrm{d}x = iy_1 \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\langle x, y \rangle} \mathrm{d}x = iy_1 \widehat{f}(y).$$

□

Definicja 11.16. Funkcję $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ nazywamy *funkcją szybko malejącą* lub *funkcją z klasy Schwarza*, jeśli dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{N}^n$ i dowolnego wielomianu n zmiennych P,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \big| P(x) D^\alpha f(x) \big| < \infty.$$

Przestrzeń $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ funkcji szybko malejących nazywamy *przestrzenią Schwartza.*

Przykłady. Funkcje C^∞ o nośniku zwartym są oczywiście szybko malejące. Funkcja $\exp(-a|x|^2)$ dla dowolnego $a > 0$ należy do przestrzeni Schwartza.

Uwaga 11.17. Oczywiście $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ wtedy i tylko wtedy, gdy f jest klasy C^∞ oraz dla dowolnego multiindeksu α i $k = 0, 1, \dots$

$$\lim_{|x| \to \infty} (1 + |x|^2)^k |D^\alpha f(x)| = 0.$$

Przetrzeń $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ jest przestrzenią liniowo-metryczną z metryką

$$d(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-k} \min\{\|f - g\|_k, 1\},$$

gdzie

$$\|f\|_k := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \sup_{|\alpha| \leqslant k} (1 + |x|^2)^k |D^\alpha f(x)|.$$

Twierdzenie 11.18. *Transformata Fouriera zachowuje przestrzeń Schwartza, tzn.* $\mathcal{F}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Dowód. Jeśli $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, to $x^\alpha f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L_1(\mathbb{R}^n)$ dla dowolnego multiindeksu α, stąd, na mocy Twierdzenia 11.15i), $\widehat{f} \in C^\infty$ oraz $D^\alpha \widehat{f} = ((-ix)^\alpha f)\widehat{}$ dla dowolnego α.

Ponadto, jeśli $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, to $D^\beta f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L_1(\mathbb{R}^n)$ dla dowolnego β, zatem Twierdzenia 11.15ii) implikuje, że $(ix)^\alpha \widehat{f} = \widehat{D^\alpha f}$ jest funkcją ciągłą i ograniczoną. Zamieniając f na $g = (-ix)^\beta f$ dostajemy $(ix)^\alpha \widehat{g} = (ix)^\alpha D^\beta \widehat{f}$ jest ograniczone, dla dowolnych α, β, zatem $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Wykazaliśmy w ten sposób, że $\mathcal{F}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ By udowodnić, że każda funkcja z klasy Schwarza jest transformatą Fouriera funkcji z klasy Schwartza wystarczy zastosować wzór na transformatę odwrotną. □

Literatura

[1] J. Musielak, *Wstęp do analizy funkcjonalnej*, wyd II, PWN, Warszawa 1989.

[2] W. Rudin, *Analiza funkcjonalna*, wyd. I, PWN, Warszawa 2001.

[3] W. Rudin, *Analiza rzeczywista i zespolona*, wyd II, PWN, Warszawa 1998.

[4] P. Wojtaszczyk, *Teoria falek*, wyd. I, PWN, Warszawa 2000,