-

Zadania ze Wstępu do procesów stochastycznych – seria 1

1. Znajdź rozkład zmiennej $5W_1 - 2W_3 + W_7$.

2. Dla jakich parametrów a i b, zmienne $aW_1 - W_2$ oraz $bW_3 + W_5$ są niezależne?

3. Udowodnij, że $\lim_{t\to\infty} \frac{W_t}{t} = 0$ p.n.

4. Znajdź rozkład wektora losowego $(W_{t_1}, W_{t_2}, \ldots, W_{t_n})$ dla $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$.

5. Udowodnij, że z prawdopodobieństwem 1 trajektorie procesu Wienera są nieograniczone.

6. Udowodnij, że z prawdopodobieństwem 1 trajektorie procesu Wienera nie są jednostajnie ciągłe na $\mathbb{R}_+$.

7. Udowodnij, że następujące procesy też są procesami Wienera
   a) $X_t = -W_t$ (odbicie)
   b) $Y_t = c^{-1/2} W_{ct}, c > 0$ (przeskalowanie czasu)
   c) $Z_t = tW_{1/t}$ dla $t > 0$ oraz $Z_0 = 0$ (inwersja czasu)
   d) $U_t = W_{T+t} - W_T, T \geqslant 0$
   e) $V_t = W_t$ dla $t \leqslant T$, $V_t = 2W_T - W_t$ dla $t > T$, gdzie $T \geqslant 0$.

8. Niech $(W_t)_{t\in[0,1]}$ będzie procesem Wienera na $[0,1]$. Wykaż, że $((1+t)W_{\frac{1}{1+t}} - W_1)_{t\geqslant 0}$ jest procesem Wienera na całej półprostej.

9. Niech $\pi_n = \{t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \ldots, t_{k_n}^{(n)}\}$, gdzie $a = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \ldots < t_{k_n}^{(n)} = b$ będzie ciągiem podziałów odcinka $[a,b]$ oraz $\|\pi_n\| = \max_k |t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}|$ oznacza średnicę π_n. Udowodnij, że
$$S_n = \sum_{k=1}^{k_n} |W_{t_k^{(n)}} - W_{t_{k-1}^{(n)}}|^2 \to b - a, n \to \infty \text{ w } L^2(\Omega, \mathcal{F}, P),$$
   jeśli $\|\pi_n\| \to 0$ oraz $S_n \to b - a$ p.n., jeśli $\sum_n \|\pi_n\| < \infty$.

10. Udowodnij, że prawie wszystkie trajektorie procesu Wienera mają nieskończone wahanie na każdym przedziale.

11. Wykaż, że układ Haara jest bazą ortonormalną w $L_2([0,1])$.

12. Wykaż, że dla dowolnych zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots$ oraz funkcji $f_1, f_2, \ldots \in C([0,1])$ zbiór $A = \{\omega \in \Omega\colon \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\omega) f_n$ jest zbieżny jednostajnie$\}$ jest zdarzeniem.

13. Wykaż, że jeżeli $(X_t)_{t\geqslant 0}$ jest procesem o ciągłych trajektoriach, stacjonarnych, niezależnych przyrostach oraz $X_0 = 0$ p.n., to istnieje proces Wienera $(W_t)_{t\geqslant 0}$ oraz stałe $a, b \in \mathbb{R}$, takie że $X_t = aW_t + bt$.

Zadania ze Wstępu do procesów stochastycznych – seria 2

1. Udowodnij, że dla $g \sim \mathcal{N}(0,1)$ i $t > 0$,
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^3}\Big)e^{-t^2/2} \leqslant \Pr(g \geqslant t) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}t}e^{-t^2/2}.$$

2. Niech $X_1, \ldots, X_n$ będą niezależnymi symetrycznymi zmiennymi losowymi. Udowodnij nierówność Lévy'ego
$$\mathbb{P}(\max_{k \leqslant n}(X_1 + \ldots + X_k) \geqslant t) \leqslant 2\mathbb{P}(X_1 + \ldots + X_n \geqslant t)$$
dla $t \geqslant 0$.

3. (Prawo iterowanego logarytmu dla procesu Wienera) Wykaż, że
a) $\limsup_{t\to\infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t\ln\ln t}} = 1$ p.n.
b) $\liminf_{t\to\infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t\ln\ln t}} = -1$ p.n.
Wskazówki:
i) Niech $C > 1$ oraz $u > C^{1/2}$. Wykaż, że
$$\sum_n \Pr\left(\sup_{C^n \leqslant t \leqslant C^{n+1}} W_t \geqslant u\sqrt{2C^n \ln\ln C^n}\right) < \infty$$
i wywnioskuj stąd, że $\limsup_{t\to\infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t\ln\ln t}} \leqslant u$ p.n.
ii) Wykaż, że $\limsup_{t\to\infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t\ln\ln t}} \leqslant 1$ p.n. oraz $\liminf_{t\to\infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t\ln\ln t}} \geqslant -1$ p.n.
iii) Wykaż, że dla $C > 1$ i $u < 1$
$$\sum \Pr(W_{C^n} - W_{C^{n-1}} \geqslant u\sqrt{1-1/C}\sqrt{2C^n \ln\ln C^n}) = \infty$$
i wywnioskuj stąd i z ii), że $\limsup_{t\to\infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t\ln\ln t}} \geqslant u(1-1/C)^{1/2} - C^{-1/2}$ p.n.

4. Udowodnij, że
a) $\limsup_{t\to 0+} \frac{W_t}{\sqrt{2t\ln\ln(1/t)}} = 1$ p.n.
b) $\liminf_{t\to 0+} \frac{W_t}{\sqrt{2t\ln\ln(1/t)}} = -1$ p.n.

5. Udowodnij, że z prawdopodobieństwem 1, trajektorie procesu Poissona przyjmują wartości z $\mathbb{N}$, są niemalejące, mają wszystkie skoki równe 1 oraz dążą do nieskończoności.

6. Niech $\tau_k = \inf\{t\colon N_t = k\}$ będzie momentem k-tego skoku procesu Poissona. Wykaż, że $\tau_1, \tau_2 - \tau_1, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie wykładniczym.

7. Niech N będzie procesem Poissona z parametrem λ. Udowodnij, że $\lim_{n\to\infty} \frac{N_t}{t} = \lambda$ p.n.

8. Wykaż, że jeżeli N jest procesem Poissona z parametrem λ i $T \in [0, \infty)$, to $M = (N_{t+T} - N_T)_{t\geqslant 0}$ też jest procesem Poissona z parametrem λ.

9. Niech N będzie procesem Poissona z parametrem λ, $\tau_k = \inf\{t \geqslant 0\colon N_t = k\}$. Dla $t > 0$ znajdź rozkład warunkowy $(\tau_1, \ldots, \tau_k)$ pod warunkiem $N_t = k$.

10. Niech N i M będą niezależnymi procesami Poissona. Wykaż, że $N + M$ też jest procesem Poissona.

11. Niech $X = (X_t)_{t \geqslant 0}$ będzie procesem o o niezależnych, stacjonarnych przyrostach, przyjmującym wartości w $\mathbb{N}$, trajektoriach càdlág, o skokach równych 1, $X_0 = 0$. Wykaż, że X jest procesem Poissona.