1. Niech $(X_t)_{t\in[0,1]}$ będzie scentrowanym procesem gaussowskim, takim że dla dowolnych $s,t\in[0,1]$, $\mathbb{E}|X_t-X_s|^2\leqslant|t-s|^{2/3}$. Wykazać, że X ma ciągłą modyfikację oraz że trajektorie każdej ciągłej modyfikacji są z prawdopodobieństwem 1 γ–hölderowsko ciągłe dla dowolnego $\gamma\in(0,1/3)$.

2. Niech $(W_t)_{t\geqslant 0}$ będzie procesem Wienera. Wyznaczyć takie stałe a,b,c, aby zmienne losowe W_1, $\int_0^1(t+a)dW_t$, $\int_0^1(t^2+bt+c)dW_t$ były niezależne.

3. Niech $X=(X_t)_{t\geqslant 0}$ będzie procesem o niezależnych, stacjonarnych przyrostach, takim że dla każdego $t\geqslant 0$, $\mathbb{E}X_t=0$ oraz $\mathbb{E}X_t^2<\infty$.

   a) Wykazać, że istnieje funkcja $f\colon\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, taka że $M_t=X_t^2-f(t)$ jest martyngałem.

   b) Czy proces $Y_t=\frac{X_t}{t}$ jest zbieżny według prawdopodobieństwa dla $t\to\infty$? Jeśli tak, wyznaczyć granicę.

4. Niech $(W_t)_{t\geqslant 0}$ będzie procesem Wienera. Wyznaczyć rozkład zmiennej $Y=\int_0^1 W_s ds$. (Wskazówka: wyrazić Y jako całkę Paleya–Wienera).

5. Załóżmy, że $a>0$, zaś ξ jest zmienną losową niezależną od W. Zdefiniujmy proces

$$X_t=\xi e^{bt}+\sqrt{a}\int_0^t e^{b(t-s)}dW_s.$$

   Wykaż, że jeżeli $b<0$ oraz ξ ma rozkład $\mathcal{N}(0,\frac{-a}{2b})$, to dla każdego t, X_t również ma rozkład $\mathcal{N}(0,\frac{-a}{2b})$.

6. Niech $W=(W_t)_{t\geqslant 0}$ będzie procesem Wienera, $a>0$ oraz

$$\tau_a=\inf\{t>0\colon W_t+at=5\}.$$

   a) Wykazać, że $\tau_a<\infty$ p.n.

   b) Obliczyć $\mathbb{E}\tau_a$.

7. Wyznaczyć taką funkcję $f\colon[0,\infty)\to[0,\infty)$, aby proces $Y_t=\int_0^{f(t)}\frac{1}{\sqrt{1+s}}dW_s$ był procesem Wienera.

8. Niech $N=(N_t)_{t\geqslant 0}$ będzie procesem Poissona czyli procesem o prawostronnie ciągłych trajektoriach, niezależnych przyrostach, $N_0=0$ p.n. oraz dla $0\leqslant s<t<\infty$, N_t-N_s ma rozkład Poissona z parametrem $t-s$. Zdefiniujmy proces $X=(X_t)_{t\geqslant 0}$ wzorem

$$X_t=\exp(N_t-t(e-1)).$$

   Wykazać, że X_t jest zbieżne p.n. dla $t\to\infty$ i zidentyfikować granicę. Czy X_t jest zbieżne w L_1? Czy rodzina $\{X_t\}_{t\geqslant 0}$ jest jednostajnie całkowalna?

9. Dany jest scentrowany proces gaussowski $X=(X_t)_{t\geqslant 0}$ o funkcji kowariancji

$$\mathrm{Cov}\,(X_s,X_t)=e^{\min(s,t)}.$$

   Wykazać że proces X ma modyfikację, której trajektorie są lokalnie hölderowsko ciągłe z dowolnym wykładnikiem $\gamma<\frac{1}{2}$.

10. Niech $W = (W_t)_{t\geqslant 0}$ będzie procesem Wienera, zaś Y będzie procesem o ciągłych trajektoriach, takim że $Y_t = \int_0^t s dW_s$ p.n. dla $t \geqslant 0$. Niech $\tau = \inf\{t \geqslant 0\colon Y_t \in \{-2, 4\}\}$. Wykazać, że $\tau < \infty$ p.n. oraz obliczyć $\mathbb{E}\tau^3$. (Wsk. Wyznaczyć taką funkcję f, że $Y_t^2 - f(t)$ jest martyngałem).

11. Niech $W = (W_t)_{t\geqslant 0}$ będzie procesem Wienera. Niech proces $Y = (Y_t)_{t\geqslant 0}$ będzie dany wzorem
$$Y_t = \int_0^t \sin s dW_s.$$
Wykazać, że proces Y ma modyfikację o trajektoriach lokalnie hölderowsko ciągłych z dowolnym wykładnikiem $\gamma < 1/2$.

12. Niech $W = (W_t)_{t\geqslant 0}$ będzie procesem Wienera, Znajdź wszystkie liczby $a > 0$, $b, c \in \mathbb{R}$, takie że $(b(1+2t)W_{a/(1+2t)} - cW_a)_{t\geqslant 0}$ jest procesem Wienera.