-

Zadania ze Wstępu do Analizy Stochastycznej – seria 1

1. Znajdź rozkład zmiennej $5W_1 - 2W_3 + W_7$.

2. Dla jakich parametrów a i b, zmienne $aW_1 - W_2$ oraz $bW_3 + W_5$ są niezależne?

3. Udowodnij, że $\lim_{t\to\infty} \frac{W_t}{t} = 0$ p.n.

4. Znajdź rozkład wektora losowego $(W_{t_1}, W_{t_2}, \ldots, W_{t_n})$ dla $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$.

5. Udowodnij, że z prawdopodobieństwem 1 trajektorie procesu Wienera są nieograniczone.

6. Udowodnij, że z prawdopodobieństwem 1 trajektorie procesu Wienera nie są jednostajnie ciągłe na $\mathbb{R}_+$.

7. Udowodnij, że następujące procesy też są procesami Wienera
   a) $X_t = -W_t$ (odbicie)
   b) $Y_t = c^{-1/2}W_{ct}, c > 0$ (przeskalowanie czasu)
   c) $Z_t = tW_{1/t}$ dla $t > 0$ oraz $Z_0 = 0$ (inwersja czasu)
   d) $U_t = W_{T+t} - W_T, T \geqslant 0$
   e) $V_t = W_t$ dla $t \leqslant T$, $V_t = 2W_T - W_t$ dla $t > T$, gdzie $T \geqslant 0$.

8. Niech $(W_t)_{t\in[0,1]}$ będzie procesem Wienera na $[0,1]$. Wykaż, że $((1+t)W_{\frac{1}{1+t}} - W_1)_{t\geqslant 0}$ jest procesem Wienera na całej półprostej.

9. Niech $\pi_n = \{t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \ldots, t_{k_n}^{(n)}\}$, gdzie $a = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \ldots < t_{k_n}^{(n)} = b$ będzie ciągiem podziałów odcinka $[a,b]$ oraz $\|\pi_n\| = \max_k |t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}|$ oznacza średnicę π_n. Udowodnij, że
$$S_n = \sum_{k=1}^{k_n} |W_{t_k^{(n)}} - W_{t_{k-1}^{(n)}}|^2 \to b-a, n \to \infty \text{ w } L^2(\Omega, \mathcal{F}, P),$$
   jeśli $\|\pi_n\| \to 0$ oraz $S_n \to b-a$ p.n., jeśli $\sum_n \|\pi_n\| < \infty$.

10. Udowodnij, że prawie wszystkie trajektorie procesu Wienera mają nieskończone wahanie na każdym przedziale.

11. Wykaż, że jeżeli $(X_t)_{t\geqslant 0}$ jest procesem o ciągłych trajektoriach, stacjonarnych, niezależnych przyrostach oraz $X_0 = 0$ p.n., to istnieje proces Wienera $(W_t)_{t\geqslant 0}$ oraz stałe $a, b \in \mathbb{R}$, takie że $X_t = aW_t + bt$.

Zadania ze Wstępu do Analizy Stochastycznej – seria 2

1. Udowodnij, że jeśli zbiór $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$ to istnieje zbiór przeliczalny $T_0 \subset T$ taki, że jeśli $x, y \in \mathbb{R}^T$ oraz $x(t) = y(t)$ dla $t \in T_0$ to $x \in A \Leftrightarrow y \in A$.

2. Niech $T = [a, b]$ $a < t_0 < b$, wykaż, że następujące zbiory nie należą do $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$.
   $A_1 = \{x \in \mathbb{R}^T \colon \sup_{t\in[a,b]} |x_t| \leqslant 1\}$;
   $A_2 = \{x \in \mathbb{R}^T \colon t \to x_t$ ciągłe na [a,b] $\}$;
   $A_3 = \{x \in \mathbb{R}^T \colon \lim_{t\to t_0} x_t = 0\}$:
   $A_4 = \{x \in \mathbb{R}^T \colon t \to x_t$ ciągłe w $t_0\}$.
   Wykaż mierzalność tych zbiorów przy założeniu ciągłości (prawostronnej ciągłości) trajektorii tzn. wykaż, że wszystkie te zbiory po przecięciu z $C(T)$ ($RC(T)$ odp.) należą do $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T) \cap C(T)$ ($\mathcal{B}(\mathbb{R}^T) \cap RC(T)$ odp.).

3. Niech $T = [a, b]$. Wykaż, że $\mathcal{F} = \{A \cap C(T) \colon A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^T)\}$ jest sigma ciałem zbiorów borelowskich (w metryce supremum) na $C(T)$.

4. Rozważmy rodzinę rozkładów $\{\mu_{t_1,\ldots,t_n} \colon n > 0, 0 \leqslant t_1 < \ldots < t_n < \infty\}$, zadaną wzorem
   $$\mu_{t_1,\ldots,t_n}(C) = \mathbb{P}((X_1, X_1 + X_2, \ldots, X_1 + \ldots + X_n) \in C)$$
   dla $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{[0,\infty)})$, gdzie $X_1, \ldots, X_n$ niezależne oraz $X_i \sim \mathcal{N}(0, t_i - t_{i-1})$ (przyjmujemy $t_0 = 0$). Wykazać, że ta rodzina spełnia warunki zgodności.

5. Wykaż, że istnieje proces $(X_t)_{t\geqslant 0}$ o przyrostach niezależnych, startujący z 0 taki, że $X_t - X_s$ ma rozkład Cauchy'ego z parametrem $t - s$ (proces taki nazywamy procesem Cauchy'ego, bądź procesem 1-stabilnym).

6. Proces X jest modyfikacją procesu Wienera. Które z następujących własności są spełnione dla procesu X:
   a) niezależność przyrostów,
   b) stacjonarność przyrostów,
   c) ciągłość trajektorii,
   d) $\lim_{t\to\infty} \frac{X_t}{t} = 0$ p.n.
   e) $\lim_{t\to\infty} \frac{X_t}{t} = 0$ według prawdopodobieństwa?

7. Rozpatrzmy następujące 3 własności procesów:
   a) ciągłość trajektorii;
   b) stochastyczną ciągłość (tzn. $X_t \xrightarrow{\mathbb{P}} X_s$ gdy $t \to s$);
   c) ciągłość wg p-tego momentu (tzn. $\mathbb{E}|X_t - X_s|^p \to 0$ gdy $t \to s$).
   Jakie implikacje zachodzą między powyższymi własnościami?

Zadania ze Wstępu do Analizy Stochastycznej – seria 3

1. Wykaż, że trajektorie procesu Wienera z prawdopodobieństwem 1 są lokalnie γ-hölderowskie dla dowolnego $\gamma < 1/2$, ale nie są lokalnie 1/2-hölderowskie.

2. Scentrowany proces gaussowski nazywamy ułamkowym ruchem Browna, jeśli $\mathbb{E}|X_t - X_s|^2 = |t-s|^{2\alpha}$ (można wykazać, że taki proces istnieje dla $0 < \alpha < 1$). Udowodnij, że ułamkowy ruch Browna ma ciągłą modyfikację. Co można powiedzieć o hölderowskości jej trajektorii?

3. Załóżmy, że T jest przedziałem i określmy:
$$\mathcal{F}_{t+} := \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s, \ \mathcal{F}_{t-} := \sigma\Big(\bigcup_{s<t} \mathcal{F}_s\Big).$$
a) Wykaż, że filtracja $\mathcal{F}_{t+}$ jest prawostronnie ciągła, tzn. $\mathcal{F}_{t++} = \mathcal{F}_{t+}$.
b) Udowodnij, że jeśli $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^X$ jest filtracją generowaną przez proces X o lewostronnie ciągłych trajektoriach, to $\mathcal{F}_{t-} = \mathcal{F}_t$.
c) Niech $T = [0,\infty), A \in \mathcal{F}$ oraz $X_t = (t-1)^+ I_A$. Znajdź $\mathcal{F}_t^X$.
d) Dla X jak w punkcie c) określmy $\tau := \inf\{t\colon X_t > 0\}$. Wykaż, że τ nie jest momentem zatrzymania względem $\mathcal{F}_t^X$ ale jest momentem zatrzymania względem $\mathcal{F}_{t+}^X$.

4. Załóżmy, że T jest przedziałem, wykaż, że:
a) jeśli τ jest momentem zatrzymania, to $\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t$ dla wszystkich t
b) jeśli $\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t$ dla wszystkich t, to τ jest momentem zatrzymania względem $\mathcal{F}_{t+}$.

5. Niech $T = [0,\infty)$, a τ będzie momentem zatrzymania, które ze zmiennych $\tau + 1, \tau^2, \tau^2 + 1, \tau - 1$ muszą być momentami zatrzymania?

6. Niech $T = [0,\infty)$, a X_t procesem $\mathcal{F}_t$-adaptowalnym o ciągłych trajektoriach. Wykaż, że dla A domkniętego $\tau_A := \inf\{t\colon X_t \in A\}$ jest momentem zatrzymania względem $\mathcal{F}_t$.

7. Niech $T = [0,\infty)$, a X_t procesem $\mathcal{F}_t$-adaptowalnym o ciągłych trajektoriach. Wykaż, że dla A otwartego $\tau_A := \inf\{t\colon X_t \in A\}$ jest momentem zatrzymania względem $\mathcal{F}_{t+}$.

8. Wykaż, że jeśli τ i σ są momentami zatrzymania to zdarzenia $\{\tau < \sigma\}, \{\tau = \sigma\}$ i $\{\tau \leqslant \sigma\}$ należą do $\mathcal{F}_\tau$, $\mathcal{F}_\sigma$ i $\mathcal{F}_{\tau\wedge\sigma}$.

9. Wykaż, że jeśli τ jest momentem zatrzymania, to proces $X_t := I_{[0,\tau)}(t)$ jest progresywnie mierzalny.

10. Niech τ będzie momentem zatrzymania względem $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$, a (X_t) będzie procesem $\mathcal{F}_t$-adaptowalnym. Wykaż, że
a) τ jest $\mathcal{F}_\tau$-mierzalne
b) Jeśli τ przyjmuje przeliczalnie wiele wartości, to X_τ jest $\mathcal{F}_\tau$ mierzalny na zbiorze $\tau < \infty$.

11. Wykaż, że jeśli σ jest momentem zatrzymania, $\tau \geqslant \sigma$ oraz τ jest $\mathcal{F}_\sigma$ mierzalny, to τ jest momentem zatrzymania.

12. Wykaż, że jeśli proces X_t ma niezależne przyrosty i prawostronnie ciągłe trajektorie oraz $s < t$, to to $X_t - X_s$ jest niezależne od $\mathcal{F}_{s+}^X$.

Zadania ze Wstępu do Analizy Stochastycznej – seria 4

1. Załóżmy, że N_t jest procesem Poissona, tzn. procesem o prawostronnie ciągłych trajektoriach takim, że $N_0 = 0$, N ma przyrosty niezależne, oraz $N_t - N_s \sim \mathrm{Poiss}(\lambda(t-s))$ dla $t > s$. Wykaż, że $(N_t - \lambda t)_{t\geqslant 0}$ oraz $((N_t - \lambda t)^2 - \lambda t)_{t\geqslant 0}$ są martyngałami względem $(\mathcal{F}_t^N)_{t\geqslant 0}$

2. Wykaż, że $(\exp(\lambda W_t - \frac{\lambda^2 t}{2}), \mathcal{F}_t^W)_{t\geqslant 0}$ jest martyngałem dla dowolnego $\lambda \in \mathbb{R}$.

3. (Prawo iterowanego logarytmu dla procesu Wienera) Wykaż, że
   a) $\limsup_{t\to\infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t\ln\ln t}} = 1$ p.n.
   b) $\liminf_{t\to\infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t\ln\ln t}} = -1$ p.n.

   Wskazówki:
   i) Niech $C > 1$ oraz $u > C^{1/2}$. Wykaż, że
   $$\sum_n \Pr\left(\sup_{C^n\leqslant t\leqslant C^{n+1}} W_t \geqslant u\sqrt{2C^n \ln\ln C^n}\right) < \infty$$
   i wywnioskuj stąd, że $\limsup_{t\to\infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t\ln\ln t}} \leqslant u$ p.n.
   ii) Wykaż, że $\limsup_{t\to\infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t\ln\ln t}} \leqslant 1$ p.n. oraz $\liminf_{t\to\infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t\ln\ln t}} \geqslant -1$ p.n.
   iii) Udowodnij, że dla $g \sim \mathcal{N}(0,1)$ i $t > 0$,
   $$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^3}\right)e^{-t^2/2} \leqslant \Pr(g \geqslant t) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}t}e^{-t^2/2}.$$
   iv) Wykaż, że dla $C > 1$ i $u < 1$
   $$\sum \Pr(W_{C^n} - W_{C^{n-1}} \geqslant u\sqrt{1-1/C}\sqrt{2C^n\ln\ln C^n}) = \infty$$
   i wywnioskuj stąd i z ii), że $\limsup_{t\to\infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t\ln\ln t}} \geqslant u(1-1/C)^{1/2} - C^{-1/2}$ p.n.

4. Udowodnij, że
   a) $\limsup_{t\to 0+} \frac{W_t}{\sqrt{2t\ln\ln(1/t)}} = 1$ p.n.
   b) $\liminf_{t\to 0+} \frac{W_t}{\sqrt{2t\ln\ln(1/t)}} = -1$ p.n.

5. Niech $I(0) = \{1\}$ oraz $I(n) = \{1, \ldots, 2^{n-1}\}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Układem Haara nazywamy rodzinę funkcji $\{h_{n,k}\}_{n\in\mathbb{N}, k\in I(n)}$ na $[0,1]$ zadaną wzorami $h_{0,1} \equiv 1$ oraz dla $n \geqslant 1$ i $k \in I(n)$,
   $$h_{n,k}(t) = \begin{cases} 2^{(n-1)/2} & \text{dla} \quad (2k-2)2^{-n} \leqslant t < (2k-1)2^{-n} \\ -2^{(n-1)/2} & \text{dla} \quad (2k-1)2^{-n} \leqslant t < 2k2^{-n} \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$$
   Układem Schaudera nazywamy rodzinę funkcji $(S_{n,k})_{n\geqslant 0, k\in I(n)}$ daną wzorem $S_{n,k}(t) = \int_0^t h_{n,k}(s)ds$. Niech $\{g_{n,k}\}_{n\geqslant 0, k\in I(n)}$ będzie rodziną niezależnych standardowych zmiennych gaussowskich. Wykazać, że ciąg funkcji losowych
   $$W_t^n(\omega) = \sum_{m=0}^{n} \sum_{k\in I(m)} g_{m,k}(\omega) S_{m,k}(t)$$
   z prawdopodobieństwem jeden zbiega jednostajnie do pewnej funkcji ciągłej W_t. Ponadto jeśli dla pozostałych ω zdefiniujemy $W_t(\omega) = 0$, to tak otrzymany proces W będzie procesem Wienera.

Zadania ze Wstępu do Analizy Stochastycznej – seria 5

1. Które z podanych niżej warunków implikują jednostajną całkowalność ciągu X_n:
a) $\sup_n \mathbb{E}|X_n| < \infty$,
b) $\sup_n \mathbb{E}|X_n|^2 < \infty$,
c) $\mathbb{E}\sup_n |X_n| < \infty$,
d) zbieżność X_n w L_1,
e) zbieżność X_n p.n.?

2. Wykaż, że martyngał $M_t = \exp(\lambda W_t - \lambda^2 t/2)$ jest zbieżny p.n. i znajdź jego granicę. Czy jest on zbieżny w L_1?

3. Niech W będzie n-wymiarowym procesem Wienera, zaś $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcją harmoniczną (odp. podharmoniczną, nadharmoniczną), taką że dla każdego $t \geqslant 0$, $\mathbb{E}|f(W_t)| < \infty$. Wykazać, że $(f(W_t))_{t\geqslant 0}$ jest martyngałem (odp. nadmartyngałem, podmartyngałem) względem $\mathcal{F}^W$.

4. Niech $W_t = (W_t^1, \ldots, W_t^d)$ będzie d wymiarowym procesem Wienera, a $x_0 \in \mathbb{R}^d$ oraz $d > 2$.
a) Wykaż, że $|W_t - x_0|^{2-d}$ jest nieujemnym nadmartyngałem.
b) Udowodnij, że $|W_t - x_0|^{2-d}$ zbiega przy $t \to \infty$ do 0 p.n. i wywnioskuj stąd, że $\lim_{t\to\infty} |W_t| = \infty$ p.n..
c) Wykaż, że dla prawostronnie ciągłego nadmartyngału $(X_t)_{t\geqslant a}$ zachodzi
$$\forall_{\lambda>0}\ \lambda \Pr(\sup_{t\geqslant a} X_t \geqslant \lambda) \leqslant \sup_t \mathbb{E}X_t^- + \mathbb{E}X_a.$$
d) Wykaż, że $\Pr(\exists_{t>0}\ W_t = x_0) = 0$.

5. Niech τ będzie momentem zatrzymania względem $\mathcal{F}_t^W$.
a) Wykaż, że $(W_{\tau\wedge n}, \mathcal{F}_{\tau\wedge n})_{n=1}^{\infty}$ jest martyngałem.
b) Udowodnij, że jeśli $\mathbb{E}\tau < \infty$, to $\mathbb{E}\sup_n W_{\tau\wedge n}^2 < \infty$.
c) Wykaż, że jeśli $\mathbb{E}\tau < \infty$, to $\mathbb{E}W_\tau^2 = \mathbb{E}\tau$ i $\mathbb{E}W_\tau = 0$.

6. Niech W_t będzie jednowymiarowym procesem Wienera oraz
$$\tau_a := \inf\{t > 0\colon W_t = a\},\ \tilde{\tau}_a := \inf\{t > 0\colon |W_t| = a\}.$$
Rozpatrując martyngały W_t i $W_t^2 - t$ wykaż, że
a) $\Pr(\tau_a < \tau_{-b}) = \frac{b}{a+b}$ dla $a, b > 0$,
b) $\tau_a < \infty$ p.n. dla wszystkich $a \in \mathbb{R}$,
c) $\mathbb{E}\tilde{\tau}_a = a^2$ dla $a \geqslant 0$,
d) $\mathbb{E}\tau_a \wedge \tau_{-b} = ab$ dla $a, b > 0$,
e) $\mathbb{E}\tau_a = \infty$ dla wszystkich $a \neq 0$.

7. Rozpatrując martyngały $M_t^\lambda = \exp(\lambda W_t - \lambda^2 t/2)$ oraz $N_t^\lambda = (M_t^\lambda + M_t^{-\lambda})/2$ wykaż, że przy oznaczeniach poprzedniego zadania, dla wszystkich $a, s \geqslant 0$,
a) $\mathbb{E}e^{-s\tau_a} = e^{-a\sqrt{2s}}$,
b) $\mathbb{E}e^{-s\tilde{\tau}_a} = (\cosh(a\sqrt{2s}))^{-1}$.

Zadania ze Wstępu do Analizy Stochastycznej – seria 6

1. Udowodnij, że jeżeli $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ma wahanie skończone, to istnieją funkcje niemalejące $f_1, f_2\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, takie że $f_1(a) = f_2(a) = 0$ oraz $f(t) = f(a) + f_1(t) - f_2(t)$. Co więcej, jeżeli f jest ciągła (odp. prawostronnie ciągła) to funkcje f_1, f_2 można wybrać ciągłe (odp. prawostronnie ciągłe).

2. Załóżmy, że h jest niemalejącą funkcją ciągłą na przedziale $[a,b]$. Udowodnij, że
a) Jeśli g ma wahanie skończone na $[h(a), h(b)]$, to $g \circ h$ ma wahanie skończone na $[a,b]$.
b) Jeśli $\int_{h(a)}^{h(b)} f dg$ istnieje, to
$$\int_a^b f(h(t))dg(h(t)) = \int_{h(a)}^{h(b)} f(s)dg(s).$$

3. Załóżmy, że $f, g, h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, przy czym f i g są ciągłe, a h ma wahanie skończone. Udowodnij, że
a) $H(x) = \int_a^x g(t)dh(t)$ ma wahanie skończone na $[a,b]$.
b) $\int_a^b f dH = \int_a^b fg dh$.

4. Wykaż, że dla dowolnej funkcji ciągłej f o wahaniu skończonym na $[a,b]$ zachodzi $\int_a^b f(s)df(s) = \frac{1}{2}(f^2(b) - f^2(a))$.

5. Oblicz granice w $L_2(\Omega)$ przy $n \to \infty$
a) $\sum_{k=0}^{n-1} W_{tk/n}(W_{t(k+1)/n} - W_{tk/n})$
b) $\sum_{k=0}^{n-1} W_{t(k+1)/n}(W_{t(k+1)/n} - W_{tk/n})$.

6. Oblicz $\mathrm{Cov}(\int_0^s h_1(t)dW_t, \int_0^s h_2(t)dW_t)$ dla $h_1, h_2 \in L_2([0,s])$.

7. Niech $C_p := (\mathbb{E}|W_1|^p)^{1/p}$. Wykaż, że dla $0 < p < \infty$, przekształcenie $h \to C_p^{-1} \int_0^T h(t)dW_t$ jest izometrycznym włożeniem $L_2([0,T])$ w $L_p(\Omega)$.

8. Wykaż, że dla $0 \leqslant u < t$ i $h \in L_2([0,t])$ zachodzi
$$\int_0^u h(s)dW_s = \int_0^t h1_{[0,u]}(s)dW_s \text{ p.n.}$$

9. Wykaż, że dla $h \in C^1[0,t]$ zachodzi
$$\int_0^t h(s)dW_s = h(t)W_t - \int_0^t h'(s)W_s ds \text{ p.n.}$$

10. Wykaż, że proces
$$Y_t = \begin{cases} (1-t)\int_0^t \frac{1}{1-s}dW_s & 0 \leqslant t < 1 \\ 0 & t = 1 \end{cases}$$
ma takie same rozkłady skończenie wymiarowe co proces $Z_t = W_t - tW_1$ (most Browna).

Zadania ze Wstępu do Analizy Stochastycznej – seria 7

1. Wykaż, że jeśli $X \in \mathcal{L}^2_T, 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant T$ oraz ξ jest ograniczoną zmienną losową $\mathcal{F}_t$ mierzalną to $\xi X I_{(t,s]} \in \mathcal{L}^2_T$ oraz $\int_t^s \xi X dW = \xi \int_t^s X dW$ (Uwaga: $\int_t^s X dW$ definiujemy jako $\int_0^T 1_{(s,t]} X dW$).

2. Wykaż, że jeśli $0 < t_1 < \ldots < t_m < T$ oraz ξ_k są zmiennymi losowymi w $L^2(\Omega)$, $\mathcal{F}_{t_k}$ mierzalnymi to proces $X := \sum_{k=1}^{m-1} \xi_k 1_{(t_k,t_{k+1}]}$ należy do $\mathcal{L}^2_T$ oraz $\int_0^t X dW = \sum_{k=1}^{m-1} \xi_k (W_{t_{k+1}\wedge t} - W_{t_k \wedge t})$.

3. Załóżmy, że X jest procesem prognozowalnym, ciągłym w L^2 (tzn. $t \to X_t$ jest ciągła z $[0,T]$ w $L^2(\Omega)$). Wykaż, że wówczas $X \in \mathcal{L}^2_T$ oraz dla dowolnego ciągu podziałów $0 = t_0^{(n)} \leqslant t_1^{(n)} \leqslant \ldots \leqslant t_{k_n}^{(n)} = T$ o średnicy zbiegającej do zera zachodzi dla $t \leqslant T$
$$\sum_{k=0}^{k_n-1} X_{t_k^{(n)}} (W_{t_{k+1}^{(n)}} - W_{t_k^{(n)}}) \to \int_0^T X dW$$
w $L^2(\Omega)$ przy $n \to \infty$.

4. Oblicz $\int_0^t W_s dW_s$.

5. Niech τ będzie momentem zatrzymania takim, że $\mathbb{E}\tau < \infty$. Wykaż, że $1_{[0,\tau]} \in \mathcal{L}^2_\infty$ oraz $\int_0^\infty 1_{[0,\tau]}(s) dW_s = W_\tau$. Wywnioskuj stąd, że $\mathbb{E}W_\tau = 0$ oraz $\mathbb{E}W_\tau^2 = \mathbb{E}\tau$.

6. Dla $a, b > 0$ określmy $\tau = \inf\{t\colon |W_t| = a\sqrt{b+t}\}$. Wykaż, że $\tau < \infty$ p.n. oraz $\mathbb{E}\tau < \infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a < 1$. Ponadto dla $a < 1$, $\mathbb{E}\tau = \frac{a^2 b}{1-a^2}$.

7. (*) Niech ξ będzie zmienną losową o skończonej wariancji, taką że $\mathbb{E}\xi = 0$. Wykazać, że istnieje moment zatrzymania τ, taki że W_τ ma ten sam rozkład co ξ oraz $\mathbb{E}\tau = \mathbb{E}\xi^2$.

8. Załóżmy, że M jest adaptowalnym, prawostronnie ciągłym procesem takim, że $M_0 = 0$ i dla wszystkich t, $\mathbb{E}|M_t| < \infty$. Wykaż, że M jest martyngałem wtedy i tylko wtedy gdy $\mathbb{E}M_\tau = 0$ dla wszystkich ograniczonych momentów zatrzymania τ.

Zadania ze Wstępu do Analizy Stochastycznej – seria 8

1. Niech $\mathcal{A}$ będzie pewną klasą procesów adaptowalnych na $[0,T)$ taką, że jeśli $X \in \mathcal{A}$ to $X^\tau \in \mathcal{A}$ dla dowolnego momentu zatrzymania τ. Przez $\mathcal{A}_{loc}$ oznaczamy wówczas klasę tych procesów adaptowalnych na $[0,T)$ dla których istnieje rosnący ciąg momentów zatrzymania τ_n taki, że $\tau_n \to T$ oraz $X^{\tau_n} \in \mathcal{A}$ dla wszystkich n.
   a) Wykaż, że jeśli $X \in \mathcal{A}_{loc}$ to $X^\tau \in \mathcal{A}_{loc}$ dla dowolnego momentu zatrzymania τ
   b) Wykaż, że $(\mathcal{A}_{loc})_{loc} = \mathcal{A}_{loc}$
   c) Wykaż, że jeśli $\mathcal{A}$ jest liniowa to $\mathcal{A}_{loc}$ też jest liniowa.

2. Wykaż, że $M - M_0 \in \mathcal{M}^c_{loc}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $M - M_0 \in \mathcal{M}^{2,c}_{loc}$.

3. a) Wykaż, że każdy ograniczony ciągły martyngał lokalny jest martyngałem.
   b) Wykaż, że każdy nieujemny całkowalny ciągły martyngał lokalny jest nadmartyngałem.
   c) Podaj przykład ciągłego nieujemnego całkowalnego martyngału lokalnego, który nie jest martyngałem.
   d) Niech X będzie martyngałem lokalnym, takim że $|X_t| \leqslant Y$ p.n. dla wszystkich t oraz $\mathbb{E}Y < \infty$. Wykazać, że X jest martyngałem.

4. Niech $X \in \Lambda^2_T$, $0 \leqslant t < s \leqslant T$ oraz ξ będzie zmienną losową $\mathcal{F}_{t_1}$ mierzalną (niekoniecznie ograniczoną). Wykaż, że $\xi X 1_{(t,s]} \in \Lambda^2_T$ oraz $\int_t^s \xi X dW = \xi \int_t^s X dW$.

5. Niech $M \in \mathcal{M}^{2,c}_{loc}$ oraz $X \in \Lambda^2_T(M)$. Wykaż, że dla dowolnego momentu zatrzymania τ zachodzi
$$(\int X dM)^\tau = \int X dM^\tau = \int X 1_{[0,\tau]} dM = \int X 1_{[0,\tau]} dM^\tau.$$
   W szczególności jeśli procesy X i Y pokrywają się na przedziale $[0,\tau]$, to $(\int X dM)^\tau = (\int Y dM)^\tau$.

6. Wykaż, że każdy ciągły martyngał lokalny $M = (M_t)_{t<T}$, którego trajektorie mają skończone wahanie na każdym przedziale $[0,t]$ jest stale równy M_0.