Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - seria 1

Aksjomatyka Kołmogorowa, prawdopodobieństwo klasyczne, prawdopodobieństwo geometryczne

1. Dana jest przestrzeń probabilistyczna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, gdzie Ω jest zbiorem przeliczalnym oraz $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$. Udowodnij, że istnieją liczby $p_\omega \geqslant 0$, takie że $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega$ dla wszystkich $A \in \mathcal{F}$.

2. Udowodnij, że każde nieskończone σ-ciało jest nieprzeliczalne.

3. Udowodnij, że następujące pseudometryki na $\mathcal{F}$ spełniają warunek trójkąta:

$$\begin{aligned} \rho_1(A,B) &= \mathbb{P}(A \Delta B) \\ \rho_2(A,B) &= \begin{cases} \frac{\mathbb{P}(A\Delta B)}{\mathbb{P}(A \cup B)} & \text{jeśli } \mathbb{P}(A \cup B) > 0 \\ 0 & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases} \end{aligned}$$

4. Klasa liczy 15 uczniów, na każdej lekcji do odpowiedzi losowany jest jeden uczeń. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w ciągu 16 lekcji każdy uczeń zostanie przepytany.

5. Roztrzepana sekretarka rozmieściła losowo N listów w N uprzednio zaadresowanych kopertach. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że dokładnie k listów trafiło do właściwej koperty.

6. W n rozróżnialnych urnach rozmieszczono losowo n rozróżnialnych kul. Jakie jest prawdopodobieństwo, że dokładnie jedna urna zostanie pusta?

7. Do n rozróżnialnych urn wrzucono losowo k nierozróżnialnych kul. Jakie jest prawdopodobieństwo, że dokładnie jedna urna zostanie pusta?

8. Pewien chłopiec ma dwie babcie, obie oczekują, że będzie on je regularnie odwiedzał. Z przystanku przed jego domem odjeżdżają dwa tramwaje, tramwaj A, którym można dojechać do pierwszej babci i tramwaj B, którym można dojechać do drugiej. Chłopiec codziennie wychodzi z domu o losowej godzinie i wsiada w pierwszy tramwaj, który pojawi się na przystanku. Oba tramwaje jeżdżą co godzinę, a jednak okazuje się, że u jednej babci chłopiec bywa dużo częściej niż u drugiej. Jak to wyjaśnić?

9. (Igła Buffona) Igłę o długości l rzucono na podłogę z desek o szerokości $a > l$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że igła przetnie krawędź deski?

10. Z przedziału $[0, 1]$ wybrano losowo liczbę x. Jakie jest prawdopodobieństwo, że x jest niewymierna?

11. Z przedziału $[0, 1]$ wybrano losowo dwa punkty, które podzieliły go na trzy odcinki. Jakie jest prawdopodobieństwo, że z tych odcinków da się zbudować trójkąt?

12. Na nieskończoną szachownicę o boku a rzuca się monetę średnicy $2r < a$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że a) moneta znajdzie się całkowicie we wnętrzu jednego z pól b) przetnie się z co najwyżej jednym bokiem szachownicy?

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - seria 2

Aksjomatyka Kołmogorowa, prawdopodobieństwo klasyczne i geometryczne - c.d.

1. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ jest przestrzenią probabilistyczną, $A, B, C \in \mathcal{F}$.
   a) Załóżmy, że $\mathbb{P}(A \cup B) = 1/2$, $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/4$, $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(B \setminus A)$. Obliczyć $\mathbb{P}(A)$ oraz $\mathbb{P}(B \setminus A)$.
   b) Załóżmy, że $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = 1$, $\mathbb{P}(B) = 2\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(C) = 3\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(B \cap C)$. Wykazać, że $1/6 \leqslant \mathbb{P}(A) \leqslant 1/4$.
   c) Załóżmy, że $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B), \mathbb{P}(C) \geqslant 2/3$ oraz $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0$. Co można powiedzieć o $\mathbb{P}(A)$?
2. W szafie jest n par butów. Wyjmujemy na chybił trafił k butów ($k \leqslant n$). Jakie jest prawdopodobieństwo, że wśród wybranych par butów będzie a) co najmniej jedna para, b) dokładnie jedna para?
3. W kolejce po bilety na mecz stoi n kibiców. Każdy z nich nosi szalik w kolorze A lub B. Załóżmy, ze wszystkie możliwe układy kolorów sa jednakowo prawdopodobne. Jakie jest prawdopodobieństwo, ze żadne dwie kolejne osoby nie maja szalików w tym samym kolorze? Jakie jest prawdopodobieństwo, ze żadne dwie kolejne osoby nie maja szalików w kolorze A?
4. Miasto zbudowane jest na planie kwadratu i poszatkowane ulicami biegnącymi ze wschodu na zachód i z północy na południe, przy czym ulic każdego typu jest po $N = 2n + 1$. Kierowca jedzie z południowo-zachodniego wierzchołka miasta na kraniec północno-wschodni, wybierając losowo jedną z najkrótszych dróg. Oblicz prawdopodobieństwo, że kierowca przejedzie przez środek miasta.
5. Z jeziora wyłowiono 200 ryb, oznakowano je i wpuszczono do wody. Po pewnym czasie wyłowiono 100 ryb, a wśród nich było 8 oznakowanych. Za rozsądną ocenę liczby ryb w jeziorze można uznać liczbę ryb, dla której zrealizowało się zdarzenie o największym prawdopodobieństwie. Jaka to liczba?
6. Każdy z n chromosomów w komórce wystawionej na promieniowanie dzieli się na dwie części różnych typów (powiedzmy typu A i typu B). Części te następnie ponownie łączą się w pary, przy czym możliwe jest także połączenie w parę 2 części tego samego typu. Jakie jest prawdopodobieństwo, że części te połączą się w takich samych kombinacjach, jak przed podziałem? Jakie jest prawdopodobieństwo, że po połączeniu każda z par będzie się składać z części różnych typów?
7. W kole o promieniu 1 wyróżniono 1025 punktów. Udowodnić, że odległość między pewnymi dwoma punktami nie przekracza 2/31.
8. (∗) Dane są liczby $k, n \in \mathbb{N}$ ($k > 1$), spełniające nierówność $n < 2^{k/2}$. Udowodnić, że liczby ze zbioru $A_n = \{1, \ldots, n\}$ można pokolorować dwoma kolorami w ten sposób, by w każdym ciągu arytmetycznym długości k, o elementach ze zbioru A_n występowały liczby w obu kolorach.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - seria 3
Prawdopodobieństwo warunkowe

1. Gracz dostał 13 kart z 52, obejrzał 8 z nich i stwierdził, że nie ma asa. Jaka jest szansa, że w ogóle nie ma asa?

2. Grupa n osób ($n \geqslant 3$), wśród których są osoby X, Y, Z, ustawia się losowo w kolejce. Jakie jest prawdopodobieństwo, że

   a) X stoi bezpośrednio przed Y, jeśli Y stoi bezpośrednio przed Z?

   b) X stoi przed Y, jeśli Y stoi przed Z?

3. W pierwszej urnie są 3 kule białe i 2 czarne, w drugiej urnie są 4 czarne i 1 biała. Rzucamy kostką. Jeśli wypadnie mniej niż 5 oczek, to losujemy kulę z pierwszej urny, w przeciwnym razie z drugiej. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej?

4. **(Paradoks Simpsona)** Populacja miasta A składa się w 20% z Krakowiaków i w 80% z Górali zaś populacja miasta B w 80% z Krakowiaków i w 20% z Górali. 10% Krakowiaków i 30% Górali zamieszkałych w mieście A ma rude włosy. Z kolei w mieście B rude włosy posiada 20% Krakowiaków i 40% Górali. W którym mieście jest większy odsetek mieszkańców z rudymi włosami?

5. W urnie znajdują się trzy kule białe i jedna czarna. Losujemy kulę, wyrzucamy bez oglądania, a następnie losujemy kolejną kulę z urny.

   a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że druga kula jest biała?

   b) Załóżmy, że za drugim razem wyciągnięto kulę białą. Jakie jest prawdopodobieństwo, że za pierwszym razem wylosowano kulę czarną?

6. W teleturnieju gracz ma do wyboru trzy koperty, dwie puste, jedną z nagrodą pieniężną. Gdy dokona wyboru, prowadzący otwiera jedną z odrzuconych kopert i pokazuje, że jest pusta. Gracz może w tym momencie zatrzymać wybraną wcześniej kopertę lub zmienić wybór i wziąć pozostałą z odrzuconych wcześniej kopert. Która strategia jest lepsza?

7. Wybrano losowo rodzinę z dwojgiem dzieci i okazało się, że jedno z dzieci ma na drugie imię Franek. Jaka jest szansa, że drugie dziecko jest chłopcem (nie wykluczamy, że też ma na drugie imię Franek)?

8. Wśród n monet k jest asymetrycznych, orzeł wypada na nich z prawdopodobieństwem 1/3. W wyniku rzutu wybraną losowo monetą wypadł orzeł. Jakie jest prawdopodobieństwo, że ta moneta jest asymetryczna?

9. W pewnej fabryce telewizorów każdy z aparatów może być wadliwy z prawdopodobieństwem p. W fabryce są trzy stanowiska kontroli i wyprodukowany telewizor trafia na każde ze stanowisk z jednakowym prawdopodobieństwem. Załóżmy, że i-te stanowisko wykrywa wadliwy telewizor z prawdopodobieństwem p_i ($i = 1, 2, 3$). Telewizory nie odrzucone w fabryce trafiają do hurtowni i tam poddawane są dodatkowej kontroli, która wykrywa wadliwy telewizor z prawdopodobieństwem p_0.

   a) Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że dany nowowyprodukowany telewizor znajdzie się w sprzedaży (tzn. przejdzie przez obie kontrole).

   b) Przypuśćmy, że telewizor jest już w sklepie. Jakie jest prawdopodobieństwo, że jest on wadliwy?

10. W populacji jest 15% dyslektyków. Jeśli w teście diagnostycznym uczeń popełni 5 lub więcej błędów, to zostaje uznany za dyslektyka. Każdy dyslektyk na pewno popełni co najmniej 6 błędów w takim teście, ale również nie-dyslektyk może popełnić więcej niż 5 błędów – dzieje się tak z prawdopodobieństwem 0,1. Jasio popełnił w teście 6 błędów. Jakie jest prawdopodobieństwo, że jest dyslektykiem? Jakie jest prawdopodobieństwo, że w kolejnym teście też popełni co najmniej 6 błędów?

11. Na loterii jest 10 losów wygrywających, 100 przegrywających i 1000 uprawniających do kolejnego losowania. Jakie jest prawdopodobieństwo wygrania?

12. **(Zagadnienie ruiny)** Dwóch graczy (nazwijmy ich A i B) gra w „orła i reszkę”, rzucając (niekoniecznie symetryczną) monetą. Gracz A zaczyna z kapitałem a zł, gracz B - z kapitałem b zł. W każdej kolejce stawką jest 1 zł, gracz A wygrywa, gdy wypadnie orzeł (powiedzmy z prawdopodobieństwem p). Gra toczy się, dopóki jeden z graczy nie zbankrutuje. Obliczyć prawdopodobieństwo ruiny gracza A.

13. (**Schemat urnowy Polya**) W urnie mamy b kul białych i c czarnych. Powtarzamy n razy następującą operację: losujemy kulę z urny, następnie wkładamy ją z powrotem, dokładając dodatkowo jeszcze a kul tego samego koloru.

    a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosowano dokładnie k razy kulę czarną?
    b) Wykazać, że prawdopodobieństwo wylosowania za n-tym razem kuli białej wynosi $\frac{b}{b+c}$.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - seria 4

Niezależność zdarzeń

1. Podać przykład zdarzeń A, B, C, które są parami niezależne, ale nie są niezależne.
2. Zdarzenia A, B są niezależne oraz $A \cup B = \Omega$. Wykazać, że $\mathbb{P}(A) = 1$ lub $\mathbb{P}(B) = 1$.
3. Czy z tego, że A, B, C są parami niezależne wynika, że a) $A \cap B$ i C, b) $A \cup B$ i C są niezależne? Czy coś się zmieni jeśli niezależność parami zastąpimy przez niezależność łączną?
4. Na n kartonikach zapisano n różnych liczb rzeczywistych. Kartoniki włożono do pudełka, starannie wymieszano, a następnie losowano kolejno bez zwracania. Niech A_k – k-ta wylosowana liczba jest większa od poprzednich. a) Udowodnić, że $\mathbb{P}(A_k) = 1/k$, $k = 1, 2, \ldots, n$. b) Udowodnić, że zdarzenia $A_1, \ldots, A_n$ są niezależne.
5. Jakie jest prawdopodobieństwo otrzymania parzystej liczby sukcesów w ciągu n prób Bernoulliego o prawdopodobieństwie sukcesu równym p?
6. Jakie jest prawdopodobieństwo, że liczba sukcesów w n próbach Bernoulliego o prawdopodobieństwie sukcesu równym 1/2 jest podzielna przez a) 3, b) 4.
7. Dwaj gracze rzucają po n razy symetryczną monetą. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wyrzucą tę samą liczbę orłów?
8. Rzucamy n razy symetryczną monetą. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wyrzucimy łącznie więcej orłów niż reszek?
9. Bolek i Lolek grają w bierki do momentu gdy jeden z nich wygra dwie partie pod rząd. Jakie jest prawdopodobieństwo, ze wygra Lolek, jeśli prawdopodobieństwo wygrania przez niego pojedynczej partii wynosi p? Zakładamy, że wyniki poszczególnych partii są niezależne.
10. W sytuacji z poprzedniego zadania, przyjmijmy, że prawdopodobieństwo, że Bolek wygra pierwszą partię wynosi 1/2, ale począwszy od drugiej partii, prawdopodobieństwo wygranej Bolka zależy od tego, czy wygrał poprzednią partię. Jeśli dopiero co odniósł sukces, czuje się pewnie i wygrywa z prawdopodobieństwem 3/4, jeśli poprzednia partia zakończyła się jego przegraną, zżera go trema i wygrywa z mniejszym prawdopodobieństwem, równym 1/3. Jakie jest prawdopodobieństwo, że Bolek wygra całą rozgrywkę?
11. Jakie jest prawdopodobieństwo, że przy wielokrotnym rzucaniu parą kostek sześciennych, suma oczek 2 wypadnie przed sumą oczek 4?
12. Rzucamy kostką do wypadnięcia drugiej szóstki. Rozważmy zdarzenia A_1, A_2, gdzie A_1 - przed pierwszą szóstką wyrzucono czwórkę, zaś A_2 - pomiędzy pierwszą i drugą szóstką padła dwójka. Czy zdarzenia A_1, A_2 są niezależne?
13. Owad składa k jajeczek z prawdopodobieństwem $\lambda^k e^{-\lambda}/k!$ ($\lambda > 0$). Potomek wylęga się z jaja z prawdopodobieństwem p. Znaleźć prawdopodobieństwo, że liczba potomków będzie równa l.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - seria 5

Niezależność zdarzeń, lemat Borela-Cantellego, lemat o $\pi - \lambda$-układach

1. Dane są liczby całkowite dodatnie m, n oraz liczby nieujemne p, q, takie że $p + q = 1$. Wykazać, że
$$(1 - p^n)^m + (1 - q^m)^n \geqslant 1.$$

2. Wyznaczyć najbardziej prawdopodobną liczbę sukcesów w schemacie n prób Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu p.

3. Rzucono 10 razy kostką. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w pierwszym rzucie otrzymano szóstkę, jeśli wiadomo, że
   a) otrzymano trzy szóstki?
   b) w następnych dziewięciu rzutach otrzymano same szóstki?

4. Zdarzenia $A_1, A_2, A_3, \ldots$ są niezależne i mają równe prawdopodobieństwa. Jaka jest szansa, że zajdzie skończenie wiele zdarzeń A_n?

5. Rzucamy nieskończenie wiele razy monetą o prawdopodobieństwie wyrzucenia orła równym $p \in (0, 1)$, wyniki doświadczenia kodujemy jako nieskończony ciąg zer (reszka) i jedynek (orzeł). Wykazać, że z prawdopodobieństwem 1 dowolny skończony ciąg zerojedynkowy pojawia się w ciągu kodującym wynik nieskończenie wiele razy.

6. Rzucamy nieskończenie wiele razy monetą, dla której prawdopodobieństwo wyrzucenia orła $p \neq 1/2$. Dla $n = 2, 3, 6, \ldots$ rozważmy zdarzenie A_n – do rzutu n włącznie wypadło tyle samo orłów co reszek. Udowodnić, że z prawdopodobieństwem 1 zajdzie tylko skończenie wiele spośród zdarzeń $A_2, A_4, A_6, \ldots$.

7. Dane są dwie miary probabilistyczne μ, ν na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
   (a) Załóżmy, że dla dowolnej liczby $t > 0$, mamy $\mu([-t, t]) = \nu([-t, t])$. Udowodnić, że jeżeli $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ jest symetryczny względem zera to $\mu(A) = \nu(A)$.
   (b) Przypuśćmy, że $\mathcal{K}$ jest pewną klasą generującą $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (tzn. $\sigma(\mathcal{K}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$). Czy z tego, że $\mu(A) = \nu(A)$ dla każdego $A \in \mathcal{K}$ wynika, że $\mu = \nu$?

8. Niech $(\Omega, \mathcal{F})$ będzie przestrzenią mierzalną, zaś $\mu, \nu\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ miarami probabilistycznymi. Wykazać, że rodzina $\mathcal{G} = \{A \in \mathcal{F}\colon \mu(A) = \nu(A)\}$ jest λ-układem.

9. Wykazać, że λ-układy spełniają założenia lematu o rodzinie multyplikatywnej.

9.* (Perkolacja) Rozważmy nieskończony graf G o zbiorze wierzchołków $V = \mathbb{Z}^2$ i zbiorze krawędzi E złożonym ze wszystkich par $(u, v) \in V^2$, takich że u i v są odległe dokładnie o 1. Ustalmy liczbę $p \in [0, 1]$ i rozważmy graf uzyskany z G w wyniku następującej procedury: dla każdej krawędzi grafu G rzucamy monetą o prawdopodobieństwie orła równym p (rzuty są niezależne) i jeśli wypadnie orzeł, krawędź pozostawiamy, jeśli reszka - usuwamy. Nazwijmy uzyskany w ten sposób graf przez G'. Niech M oznacza moc składowej spójności grafu G', zawierającej punkt $(0, 0)$. Wykazać, że istnieje liczba $p_c \in (0, 1)$, taka że dla $p < p_c$, $M < \infty$ z prawdopodobieństwem 1, zaś dla $p > p_c$, $M = \infty$ z dodatnim prawdopodobieństwem.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - seria 6

Zmienne losowe: rozkład, dystrybuanta, gęstość

1. Dystrybuanta zmiennej losowe X dana jest wzorem
$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad t < -1 \\ \frac{1}{2}(t+1) & \text{dla} \quad -1 \leqslant t < 0 \\ 3/4 & \text{dla} \quad t \leqslant 0 < 4 \\ 1 & \text{dla} \quad t \geqslant 4. \end{cases}$$
Obliczyć $\mathbb{P}(X = -5)$, $\mathbb{P}(2 < X \leqslant 5)$, $\mathbb{P}(X = 4)$, $\mathbb{P}(-1 < X < 0)$.

2. Zmienna losowa X ma rozkład o dystrybuancie $F(t) = 0 \vee ((2^{-1}t) \wedge 1)$. Wyznaczyć dystrybuantę zmiennych $Y = X \vee 1$ oraz $Z = X \wedge X^2$.

3. Niech $F\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ będzie funkcją niemalejącą, prawostronnie ciągłą, taką że $\lim_{t\to-\infty} F(t) = 0$, $\lim_{t\to\infty} F(t) = 1$. Zdefiniujmy funkcję $F^{-1}\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ wzorem $F^{-1}(x) = \inf\{t\colon F(t) \geqslant x\}$. Wykazać, że funkcja F^{-1} traktowana jako zmienna losowa na przestrzeni $((0,1), \mathcal{B}((0,1)), \lambda)$, ma dystrybuantę F.

4. Wyznaczyć dystrybuantę rozkładów a) dwupunktowego $p\delta_a + (1-p)\delta_b$, gdzie $a < b$, b) geometrycznego z parametrem p, c) wykładniczego z parametrem λ

5. (*) Skonstruować rozkład bezatomowy, który nie jest ciągły.

6. Zmienna X ma rozkład jednostajny na odcinku $(0,1)$. Znaleźć rozkład zmiennej $Y = -\ln X$.

7. Zmienna losowa X ma rozkład $\mathcal{N}(0,1)$. Wyznaczyć dystrybuanty i gęstości (o ile istnieją) dla a) $Y = e^X$, b) $Y = X^2$.

   Uwaga: Dystrybuanty należy wyznaczyć w terminach dystrybuanty zmiennej X.

8. Zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy z parametrem λ. Znaleźć rozkład zmiennych a) $Y = 1/(X+1)$, b) $Y = \sqrt{X}$.

9. Wykazać, że funkcja $g(x) = 3x^2 e^{-x^3} 1_{(0,\infty)}(x)$ jest gęstościa prawdopodobieństwa. Niech X będzie zmienną losową o tej gęstości. Wyznaczyć rozkład zmiennej $\max(x^2, 3x)$.

10. Losujemy punkt z okręgu o promieniu 1 i środku w punkcie $(0,0)$. Niech (X,Y) oznaczają współrzędne wylosowanego punktu. Znaleźć dystrybuantę i gęstość (jeśli istnieje) zmiennej X.

11. Rozwiązać poprzednie zadanie, jeśli punkt (X,Y) losujemy nie z okręgu, a z koła o promieniu 1 i środku w punkcie $(0,0)$.

12. Niech zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na przedziale $(-\pi/2, \pi)$. Znaleźć gęstość zmiennej losowej $Y = \sin x$.

13. Udowodnić, że funkcja $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dana wzorem $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$ jest gęstością prawdopodobieństwa.

14. Losujemy punkt P z kuli o środku O i promieniu 1. Niech X będzie odległością między punktami O i P. Znaleźć gęstość zmiennej losowej X.

15. Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie wykładniczym z parametrem λ. Znaleźć $\mathbb{P}(X > t + s | X > s)$. Rozwiązać analogiczny problem dla rozkładu geometrycznego.

16. Ciągła dystrybuanta F ma ciągłą pochodną g a) wszędzie, b) poza zbiorem Z bez punktów skupienia. Wykazać, że g jest gęstością dla dystrybuanty F. Wykazać, że założenie ciągłości g można opuścić.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - seria 7

Rozkłady łączne, niezależność zmiennych losowych, parametry rozkładów

1. Wektor losowy (X, Y) ma rozkład jednostajny na trójkącie o wierzchołkach $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$. Obliczyć $\mathbb{P}(Y \leqslant X^2)$.

2. Wektor losowy (X, Y) ma gęstość $g(x, y) = Ce^{-x}1_{\{0 \leqslant y \leqslant 2x\}}$. a) Wyznaczyć stałą C. b) Znaleźć rozkład X. c) Obliczyć $\mathbb{P}(Y \leqslant X/2)$.

3. Niech X_i, $i = 1, \ldots, n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach odp. $Exp(\lambda_i)$. Wyznaczyć rozkład zmiennej $Y = \min(X_1, \ldots, X_n)$.

4. Zmienne X, Y są niezależne, o rozkładach $\mathbb{P}(X = n) = (1-p)^{n-1}p$, $\mathbb{P}(Y = n) = (1-q)^{n-1}q$, $n = 1, 2, \ldots$. Obliczyć $\mathbb{P}(X \leqslant Y)$.

5. Niech $r_i \colon [0, 1] \to \{-1, 1\}$ będą funkcjami zdefiniowanymi wzorem $r_i(t) = \operatorname{sgn}\sin(2^i \pi t)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$. Wykazać, że funkcje r_i traktowane jako zmienne losowe na przestrzeni $\Omega = [0, 1]$ z σ-ciałem borelowskim i miarą Lebesgue'a sa niezależne.

6. Zmienne $X_1, X_2, \ldots, X_n$ $(n \geqslant 6)$ są niezależne i mają ten sam rozkład, zadany wzorem $\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = 1/2$.
   a) Czy zmienne $X_1 + X_2, X_1X_2$ są niezależne?
   b) Czy zmienne $X_1 + X_2, X_3, X_4 + X_5X_6$ są niezależne?
   c) Czy zmienne $X_1, X_1X_2, X_1X_2X_3, \ldots, X_1X_2 \cdots X_n$ są niezależne?

7. Zmienne X, Y są niezależne, przy czym Y nie ma atomów. Wykazać, że $\mathbb{P}(X = Y) = 0$.

8. Rzucamy monetą dla której prawdopodobieństwo wypadnięcia orła wynosi $p \in (0, 1]$, aż do momentu wypadnięcia k orłów (łącznie, niekoniecznie pod rząd). Niech X oznacza liczbę rzutów. Wyznaczyć rozkład X.

9. Dla dowolnej liczby $\omega \in [0, 1]$, niech $X_n(\omega)$ oznacza n-tą cyfrę rozwinięcia dwójkowego ω, $n = 1, 2, \ldots$ (jeśli ω posiada dwa rozwinięcia, bierzemy to ze skończoną liczbą jedynek). Wykazać, że $X_1, X_2, \ldots$, są niezależnymi zmiennymi losowymi na p-ni probabilistycznej $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), |\cdot|)$.

10. Niech ε_i, $i = 1, 2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $\mathbb{P}(\varepsilon_i = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon_i = -1) = 1/2$. Niech $Z = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i/2^i$. Wykazać, że Z ma rozkład jednostajny na odcinku $[-1, 1]$.

11. Zmienna X ma rozkład $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 1) = 1/4, \mathbb{P}(X = -3) = 1/2$. Obliczyć $\mathbb{E}X$, $\mathbb{E}\cos(\pi X)$, $\mathbb{E}\frac{1}{X+2}$ oraz $\mathrm{Var}X$.

12. Znaleźć wartości oczekiwane i wariancje rozkładów
    a) jednostajnego na odcinku $[a, b]$,
    b) Bernoulliego z parametrami n, p,
    c) wykładniczego z parametrem λ,
    d) geometrycznego z parametrem p.
    e) Poissona z parametrem λ,
    f) gaussowskiego z parametrami a, σ^2.

13. Zmienna losowa X ma rozkład Poissona z parametrem 2. Obliczyć $\mathbb{E}6^X$.

14. Zmienna losowa X ma rozkład z gęstością $g(x) = \frac{3}{8}x^2 1_{[0,2]}$. Obliczyć $\mathbb{E}X$, $\mathbb{E}\frac{1}{1+X^3}$ oraz $\mathrm{Var}X$.

15. Zmienna losowa X ma dystrybuantę

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli} \quad t < 0 \\ t/2 & \text{jeśli} \quad 0 \leqslant t < 1 \\ 3/4 & \text{jeśli} \quad 1 \leqslant t < 5 \\ 1 & \text{jeśli} \quad t \geqslant 5. \end{cases}$$

Wyznaczyć $\mathbb{E}(2X+1)$.

16. Zmienna X ma rozkład jednostajny na odcinku $[0, 2\pi]$. Znaleźć wartość oczekiwaną zmiennej $Y = f(X)$, jeśli

a) $f(x) = \sin x$,

b) $f(x) = \cos^2 x$.

c) $f(x) = -\ln x$

d)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \in [0, \pi/2] \\ \sin x & \text{dla } x \in (\pi/2, 3\pi/2] \\ 1 & \text{dla } x \in (3\pi/2, 2\pi] \end{cases}$$

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - seria 8

Parametry rozkładów - c.d.

1. Roztrzepana sekretarka umieściła n listów w n uprzednio zaadresowanych kopertach. Niech X oznacza liczbę listów, które trafiły do właściwych kopert. Znaleźć wartość oczekiwaną i wariancję X.

2. W urnie znajduje się 50 białych kul. Losujemy ze zwracaniem po jednej kuli, przy czym wyciągniętą kulę malujemy na czerwono, jeśli jest biała. Niech X oznacza liczbę czerwonych kul w urnie po 20 losowaniach. Wyznaczyć $\mathbb{E}X$ oraz $\mathrm{Var}X$.

3. Urna zawiera N kul w tym b kul białych. Losujemy bez zwracania n kul ($n \leqslant N$) i definiujemy zmienną losową X jako liczbę wylosowanych kul białych. Znaleźć wartość oczekiwaną i wariancję X.

4. Wykazać, że jeżeli $X \geqslant 0$ oraz $p > 0$, to
$$\mathbb{E}X^p = p\int_0^\infty t^{p-1}\mathbb{P}(X \geqslant t)dt = p\int_0^\infty t^{p-1}\mathbb{P}(X > t)dt.$$
Wywnioskować stąd, że jeśli zmienna X ma rozkład skoncentrowany na liczbach naturalnych, to
$$\mathbb{E}X = \sum_{k=1}^\infty \mathbb{P}(X \geqslant k) = \sum_{k=0}^\infty \mathbb{P}(X > k).$$

5. Liczby $1, 2, \ldots, n$ ustawiono losowo w ciąg $(a_1, \ldots, a_n)$. Niech N oznacza największą liczbę taką, że $a_k > a_{k-1}$ dla $k \leqslant N$. Wyznaczyć $\mathbb{E}N$.

6. Dany jest ciąg niezależnych zmiennych losowych $X_0, X_1, X_2, \ldots$ o tym samym rozkładzie z ciągłą dystrybuantą. Niech $\eta = \inf\{n\colon X_n > X_0\}$. Wyznaczyć rozkład zmiennej η oraz obliczyć $\mathbb{E}\eta$.

7. Kij o długości 1 złamano w losowym punkcie (z prawd. rozłożonym jednostajnie). Obliczyć wartość oczekiwaną stosunku a) długości kawałka lewego do długości kawałka prawego; b) długości kawałka krótszego do długości kawałka dłuższego.

8. Zmienne losowe X, Y spełniają warunki $\mathrm{Var}X = 3$, $\mathrm{Cov}(X, Y) = -1$, $\mathrm{Var}Y = 2$. Obliczyć $\mathrm{Var}(4X - 3Y)$ oraz $\mathrm{Cov}(5X - Y, 3X + Y)$.

9. **(Nierówność Bernsteina)** Wykazać, że jeśli $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ to niezależne zmienne Rademachera, zaś $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, to
$$\mathbb{P}(|\sum_{i=1}^n a_i\varepsilon_i| \geqslant t) \leqslant 2\exp\Big(-\frac{t^2}{2\sum_{i=1}^n a_i^2}\Big).$$

10. **(Nierówność Chinczyna)** W sytuacji z poprzedniego zadania, wykazać, że dla $p > 0$ istnieją stałe C_p, takie że
$$\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i a_i\|_p \leqslant C_p \|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i a_i\|_2$$

11. **(Wielomiany Bernsteina)** Niech f będzie funkcją ciągłą określoną na przedziale $[0, 1]$. Określmy ciąg wielomianów
$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.$$
Wykazać, że B_n zbiegają jednostajnie do funkcji f.

12. Niech X, Y będą ograniczonymi zmiennymi losowymi, takimi że dla $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}X^k = \mathbb{E}Y^k$. Wykazać, że X i Y mają ten sam rozkład. Co się zmieni jeśli odrzucimy założenie o ograniczoności zmiennych X, Y?

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - seria 9

parametry rozkładów, sploty, Twierdzenie Poissona

1. Wyznaczyć momenty zmiennej o rozkładzie $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

2. Wyznaczyć kwantyl rzędu p zmiennej o rozkładzie wykładniczym, z parametrem λ.

3. Wyznaczyć kwantyl rzędu p zmiennej o rozkładzie geometrycznym, z parametrem p.

4. Wykazać, że jeśli dla pewnej liczby M i dowolnego $p \geqslant 1$, $\|X\|_p \leqslant M$, to $\|X\|_\infty \leqslant M$.

5. Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi o rozkladach

   a) Bernoulliego z parametrami odp. p, n i p, m

   b) Poissona z parametrami odp. λ_1, λ_2.

   c) normalnych z parametrami a_1, σ_1^2 i a_2, σ_2^2.

   d) jednostajnych na $[0, 1]$

   e) wykładniczych z parametrem λ

   Znaleźć rozkład zmiennej $Z = X + Y$.

6. Zmienne losowe X, Y są niezależne i mają gęstości odp. f_1, f_2. Znaleźć rozkład zmiennej losowej $Z = X/Y$.

7. Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na $[0, 1]$, zaś Y, zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na zbiorze $0, 1, 2, \ldots, n$. Znaleźć rozkład zmiennej $X + Y$.

8. Zmienne X, Y są niezależne, o rozkładzie wykładniczym z parametrem 1. Znaleźć rozkład zmiennej $X - Y$.

9. Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład z gęstością $g(x, y) = Cxy1_{\{0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1\}}$.

   a) Wyznaczyć C.

   b) Obliczyć $\mathbb{P}(X + Y \leqslant 1)$.

   c) Wyznaczyć rozkład zmiennej X/Y.

   d) Czy X, Y są niezależne?

   e) Czy X/Y, Y są niezależne?

10. Wyznaczyć w przybliżeniu prawdopodobieństwo, że wśród 365 wybranych losowo osób z rocznika 1991, dokładnie 5 urodziło się 23 lub 24 kwietnia. Zakładamy, że wszystkie dni urodzin są równo prawdopodobne.

11. Prawdopodobieństwo, że nowy zegarek jest wadliwy wynosi 1/1000. Jakie jest w przybliżeniu prawdopodobieństwo, że w partii 1000 zegarków będą co najmniej 3 zepsute?

12. W mieście ginie 7 samochodów tygodniowo. Jakie jest w przybliżeniu prawdopodobieństwo, że jutro będzie dzień bez kradzieży przy założeniu stałej intensywności działania złodziei?

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - seria 10

Zbieżność ciągów zmiennych losowych. Prawo zerojedynkowe Kołmogorowa.

1. Zmienne $(X_n)_{n\geqslant 1}$ są niezależnymi zmiennymi Rademachera. Czy ciąg $(X_n)_{n\geqslant 1}$ jest zbieżny p.n. Czy jest zbieżny według prawdopodobieństwa?

2. Dana jest całkowalna zmienna losowa X. Niech dla $n \geqslant 1$,
$$X_n(\omega) = \begin{cases} -n & \text{jeśli} \quad X(\omega) < -n \\ X(\omega) & \text{jeśli} \quad |X(\omega)| \leqslant n \\ n & \text{jeśli} \quad X(\omega) > n \end{cases}$$
Czy X_n zbiega do X p.n.? Czy X_n zbiega do X w L_1?

3. Dane są ciągi $(X_n)_{n\geqslant 1}$ $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ zbieżne według prawdopodobieństwa odp. do X i Y. Udowodnić, że jeśli dla każdego n, X_n i Y_n mają ten sam rozkład, to również X i Y mają ten sam rozkład.

4. Zmienne X_n są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym z parametrem λ.
   a) Udowodnić, że jeżeli $\lambda > 1$ to z prawdopodobieństwem 1 mamy $X_n < \log n$ dla dostatecznie dużych n, natomiast jeżeli $\lambda \leqslant 1$ to z prawdopodobieństwem 1 mamy $X_n \geqslant \log n$ dla nieskończenie wielu n.
   b) Zbadać zbieżność p.n. ciągu $(X_n/\log n)_{n\geqslant 2}$.

5. Zmienne $(X_n)_{n\geqslant 1}$ są niezależne, nieujemne i mają ten sam rozkład różny od δ_0. Wykazać, że $\sum_{n=1}^{\infty} X_n = \infty$ p.n.

6. Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne, mają ten sam rozkład i spełniają $\mathbb{P}(|X_n| < 1) = 1$. Udowodnić, że $\lim_{n\to\infty} X_1 \cdots X_n = 0$ p.n.

7. Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne, mają ten sam rozkład i spełniają $\mathbb{E}|X_n| < 1$. Udowodnić, że $\lim_{n\to\infty} X_1 \cdots X_n = 0$ p.n.

8. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne.
   a) Udowodnić, że ciąg średnich
   $$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}, \ n = 1, 2, \ldots$$
   jest albo zbieżny p.n., albo rozbieżny z prawdopodobieństwem 1.
   b) Udowodnić, że jeżeli ten ciąg jest zbieżny p.n., to granica ma rozkład jednopunktowy.

9. Dane są ciągi zmiennych $(X_n)_{n\geqslant 1}$, $(Y_n)_{n\geqslant 1}$, przy czym $X_n \to X$ w L_p, oraz $Y_n \to Y$ w L_q, gdzie $p, q > 1$ spełniają warunek $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Dowieść, że $X_n Y_n \to XY$ w L_1.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - seria 11

Zbieżność zmiennych losowych. Szeregi niezależnych zmiennych losowych.

1. Wykazać, że $d(X,Y) = \mathbb{E}\frac{|X-Y|}{1+|X-Y|}$ jest metryką na przestrzeni L_0 zmiennych losowych, metryzującą zbieżność według prawdopodobieństwa.

2. Wykazać, że na dyskretnej przestrzeni probabilistycznej, zbieżność według prawdopodobieństwa jest równoważna zbieżności p.n.

3. Wykazać, że jeżeli na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ zbieżność według prawdopodobieństwa nie jest równoważna zbieżności prawie na pewno, to nie istnieje topologia na L_0, zadająca zbieżność prawie na pewno.

4. X_n jest ciągiem zmiennych losowych, takim że
$$\mathbb{P}(X_n = 1) = 1 - \frac{1}{n}, \quad \mathbb{P}(X_n = 0) = \frac{1}{n},$$
zaś X jest inną zmienną losową. Czy wynika stąd, że $Y_n := X_n X$ zbiega według prawdopodobieństwa? Czy wynika, że Y_n zbiega p.n.? Czy z założenia $X \in L_p$, wynika, że Y_n zbiega w L_p?

5. Zmienne X_n są niezależne, o rozkładzie wykładniczym z parametrem 1. Niech $\xi_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$, $\eta_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$. Wykazać, że $\xi_n \to \infty$, p.n., $\eta_n \to 0$ p.n. Czy $\mathbb{E}\xi_n \to \infty$? Czy $\mathbb{E}\eta_n \to 0$?

6. Niech $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi Rademachera. Wykazać, że szereg $\sum_{i=1}^{n} a_i \varepsilon_i$ jest zbieżny p.n. wtedy i tylko wtedy, gdy $\sum_i a_i^2 < \infty$

7. Niech $X_1, \varepsilon, X_2, \varepsilon_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi, przy czym ε_i to zmienne Rademachera. Wykazać, że $\sum_i \varepsilon_i X_i$ jest zbieżny p.n. wtedy i tylko wtedy, gdy $\sum_i X_i^2 < \infty$ p.n.

8. Wykazać, że szereg $\sum_n n^{-1}\varepsilon_n$ (gdzie ε_n – niezależne zmienne Rademachera) jest zbieżny p.n. oraz że jego granica ma rozkład absolutnie ciągły względem miary Lebesgue'a.

9. Wykazać, że jeżeli X_i są niezależnymi, symetrycznymi zmiennymi losowymi, to $\sum_{i=1}^{\infty} X_i$ jest zbieżny p.n. wtedy i tylko wtedy, gdy $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}\frac{|X_i|^2}{1+|X_i|^2} < \infty$

10. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne, przy czym X_n ma rozkład symetryczny wykładniczy z parametrem n^α (czyli o gęstości $f(x) = \frac{1}{2}n^\alpha \exp(-n^\alpha|x|)$. Dla jakich wartości parametru $\alpha > 0$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ jest zbieżny z prawdopodobieństwem 1?