Egzamin z Wstępu do Analizy Stochastycznej
7 września 2013

Proszę **wybrać pięć** *spośród poniższych zadań i pełne rozwiązania każdego z nich napisać na odrębnej kartce, podpisanej imieniem, nazwiskiem oraz numerem indeksu. Za każde zadanie można otrzymać maksymalnie 10 punktów.*

1. Wykazać, że dla $a, b \in \mathbb{R}$, proces $X = (X_t)_{t\in[0,1)}$, dany wzorem
$$X_t = a(1-t) + bt + (1-t)\int_0^t \frac{1}{1-s}dW_s$$
jest jedynym rozwiązaniem równania
$$dX_t = \frac{b - X_t}{1-t}dt + dW_t, t \in [0,1),$$
z warunkiem początkowym $X_0 = a$.

2. Niech $W = (W_t)_{t\geqslant 0}$ będzie procesem Wienera zaś $Y = \int W dW$. Wyznaczyć granicę według prawdopodobieństwa ciągu
$$S_n = \sum_{k=1}^n Y^2_{\frac{k}{n}}(W_{\frac{k}{n}} - W_{\frac{k-1}{n}}).$$

3. Załóżmy, że $M = (M_t)_{t\geqslant 0}$ jest ciągłym martyngałem lokalnym względem filtracji $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$. Załóżmy ponadto, że dla każdego $T > 0$, $\sup_{\tau\leqslant T}\mathbb{E}M^2_\tau < \infty$, gdzie supremum przebiega wszystkie momenty stopu τ ograniczone przez T.
   a) (7 pkt.) Wykazać, że dla dowolnego ograniczonego momentu stopu τ, $\mathbb{E}M_\tau = \mathbb{E}M_0$.
   b) (3 pkt.) Załóżmy dodatkowo, że $\sup_{t\geqslant 0}\mathbb{E}M_t^2 < \infty$. Wykazać, że istnieje zmienna losowa M_∞, taka że $M_t \to M_\infty$ dla $t \to \infty$ w L_2 i p.n.

4. Niech $W = (W_t)_{t\geqslant 0}$ będzie procesem Wienera, zaś Y będzie procesem o ciągłych trajektoriach, takim że $Y_t = \int_0^t s dW_s$ p.n. dla $t \geqslant 0$. Niech $\tau = \inf\{t \geqslant 0\colon Y_t \in \{-2, 4\}\}$. Wykazać, że $\tau < \infty$ p.n. oraz obliczyć $\mathbb{E}\tau^3$. (Wsk. Policzyć $\langle Y\rangle$).

5. Niech $W = (W_t)_{t\in[0,1]}$ będzie procesem Wienera zdefiniowanym na $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}, \mathbb{P})$ oraz niech
$$M = W_1 - 2\int_0^1 sW_s ds - \frac{1}{10}.$$
Zdefiniujmy miarę probabilistyczną Q na $(\Omega, \mathcal{F})$, wzorem $dQ(\omega) = \exp(M(\omega))d\mathbb{P}(\omega)$. Znaleźć taką funkcję $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, by proces
$$Z_t = W_t^2 - \frac{2}{3}t^3 W_t + f(t)$$
był martyngałem względem miary Q. (Wsk. Wyrazić $W_1 - 2\int_0^1 sW_s ds$ jako całkę stochastyczną).

6. Niech $W = (W_t)_{t\geqslant 0}$ będzie procesem Wienera. Rozważmy proces
$$Y_t = \int_0^t \cos(W_s)dW_s + \int_0^t \sin(W_s)ds.$$
Znaleźć proces A_t o wahaniu skończonym, $A_0 = 0$, taki aby $M_t = W_t\cos(Y_t) - A_t$ był martyngałem lokalnym. Czy M jest martyngałem? (Uwaga: proces A można wyrazić w terminach procesu Y).

7. Niech $W = (W_t)_{t\geqslant 0}$ będzie procesem Wienera. Niech proces $Y = (Y_t)_{t\geqslant 0}$ będzie dany wzorem
$$Y_t = \int_0^t \sin s dW_s.$$
Wykazać, że proces Y ma modyfikację o trajektoriach lokalnie hölderowsko ciągłych z dowolnym wykładnikiem $\gamma < 1/2$.