Egzamin z Wstępu do Analizy Stochastycznej
7 września 2013

Proszę **wybrać pięć** *spośród poniższych zadań i pełne rozwiązania każdego z nich napisać na odrębnej kartce, podpisanej imieniem, nazwiskiem oraz numerem indeksu. Za każde zadanie można otrzymać maksymalnie 10 punktów.*

1. Znaleźć wszystkie rozwiązania równania
$$dX_t = -(\operatorname{tg} t)X_t dt + (\cos t)dW_t, \ X_0 = x.$$
na przedziale $[0, \pi/2)$. (Wsk. szukać rozwiązań postaci $X_t = f(t) + g(t)W_t$).

2. Ciągły martyngał lokalny $(M_t)_{t\geqslant 0}$ spełnia $M_0 = 0$ oraz $\lim_{t\to\infty}\langle M\rangle_t = \infty$ p.n. Niech $\tau = \inf\{t\colon \langle M\rangle_t = 2\}$. Wykazać, że $\mathbb{E}M_\tau^2 = 2$.

3. Niech $W = (W_t)_{t\geqslant 0}$ będzie procesem Wienera, Znajdź wszystkie liczby $a > 0$, $b, c \in \mathbb{R}$, takie że $(b(1+2t)W_{a/(1+2t)} - cW_a)_{t\geqslant 0}$ jest procesem Wienera.

4. Niech $W = (W_t)_{t\in[0,1]}$ będzie procesem Wienera zdefiniowanym na $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}, \mathbb{P})$ oraz niech
$$M = W_1 - 3\int_0^1 s^2 W_s ds - \frac{1}{14}.$$
Zdefiniujmy miarę probabilistyczną Q na $(\Omega, \mathcal{F})$, wzorem $dQ(\omega) = \exp(M(\omega))d\mathbb{P}(\omega)$. Znaleźć taką funkcję $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, by proces
$$Z_t = \exp(W_t - f(t))$$
był martyngałem względem miary Q. (Wsk. Wyrazić $W_1 - 3\int_0^1 s^2 W_s ds$ jako całkę stochastyczną).

5. Niech $W = (W_t)_{t\geqslant 0}$ będzie procesem Wienera. Rozważmy proces
$$Y_t = \int_0^t \cos(W_s)dW_s + \int_0^t \sin(W_s)ds.$$
Znaleźć proces A_t o wahaniu skończonym, $A_0 = 0$, taki aby $M_t = W_t Y_t - A_t$ był martyngałem lokalnym. Czy M jest martyngałem? (Uwaga: proces A można wyrazić w terminach procesu Y).

6. Proces $(X_t)_{t\in[0,1]}$ jest gaussowski, o średniej zero i spełnia $\operatorname{Var}(X_t - X_s) \leqslant 7|t-s|^{1/7}$. Wykazać, że X ma ciągłą modyfikację. Co można powiedzieć o hölderowskości jego trajektorii?