Egzamin ze Wstępu do Analizy Stochastycznej
26 czerwca 2013

Proszę **wybrać pięć** *spośród poniższych zadań i pełne rozwiązania każdego z nich napisać na odrębnej kartce, podpisanej imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu i numerem grupy. Za każde zadanie można otrzymać maksymalnie 16 punktów.*

1. a) Wykaż, że dla $a > 0$, i $\mathcal{F}_0$-mierzalnej zmiennej losowej ξ, proces
$$X_t = \xi e^{bt} + \sqrt{a}\int_0^t e^{b(t-s)} dW_s$$
jest jedynym rozwiązaniem równania
$$dX_t = bX_t dt + \sqrt{a} dW_t$$
z warunkiem początkowym $X_0 = \xi$.

   b) Wykaż, że jeżeli $b < 0$ oraz ξ ma rozkład $\mathcal{N}(0, \frac{-a}{2b})$, to dla każdego t, X_t również ma rozkład $\mathcal{N}(0, \frac{-a}{2b})$.

2. Niech $W = (W_t)_{t\geqslant 0}$ będzie procesem Wienera. Wyznaczyć granicę według prawdopodobieństwa ciągu
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} W^3_{\frac{k}{n}}(W_{\frac{k}{n}} - W_{\frac{k-1}{n}}).$$

3. Niech $W = (W_t)_{t\geqslant 0}$ będzie procesem Wienera, $a > 0$ oraz
$$\tau_a = \inf\{t > 0\colon W_t + at = 5\}.$$
   a) Wykazać, że $\tau_a < \infty$ p.n.

   b) Obliczyć $\mathbb{E}\tau_a$.

4. Wyznaczyć taką funkcję $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$, aby proces $Y_t = \int_0^{f(t)} \frac{1}{\sqrt{1+s}} dW_s$ był procesem Wienera.

5. Niech $W = (W_t)_{t\in[0,1]}$ będzie procesem Wienera zdefiniowanym na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ oraz niech
$$B_t = W_t - tW_1 + t - t^2.$$
Znaleźć miarę probabilistyczną Q na $(\Omega, \mathcal{F})$, taką żeby B, rozpatrywany jako proces na $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$, był scentrowanym procesem gaussowskim o funkcji kowariancji
$$\mathrm{Cov}_Q\,(B_s, B_t) = s(1-t)$$
dla $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1$.

6. Niech $N = (N_t)_{t\geqslant 0}$ będzie procesem Poissona czyli procesem o prawostronnie ciągłych trajektoriach, niezależnych przyrostach, $N_0 = 0$ p.n. oraz dla $0 \leqslant s < t < \infty$, $N_t - N_s$ ma rozkład Poissona z parametrem $t - s$. Zdefiniujmy proces $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ wzorem
$$X_t = \exp(N_t - t(e-1)).$$
Wykazać, że X_t jest zbieżne p.n. dla $t \to \infty$ i zidentyfikować granicę. Czy X_t jest zbieżne w L_1? Czy rodzina $\{X_t\}_{t\geqslant 0}$ jest jednostajnie całkowalna?

7. Dany jest scentrowany proces gaussowski $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ o funkcji kowariancji
$$\mathrm{Cov}\,(X_s, X_t) = e^{\min(s,t)}.$$
Wykazać że proces X ma modyfikację, której trajektorie są lokalnie hölderowsko ciągłe z dowolnym wykładnikiem $\gamma < \frac{1}{2}$.