Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa - seria 1

1. (rozgrzewka) Na przyjęciu urodzinowym jest n dzieci i n prezentów (przy czym każdy prezent jest inny). Na ile sposobów można rozdać prezenty dzieciom tak, aby każde dziecko otrzymało prezent?

2. Na ile sposobów można rozdać n pączków k osobom? Pączki uznajemy za nierozróżnialne.

3. Z 24 kart wybieramy 5. Jaka jest szansa, że otrzymamy fulla? Jaka jest szansa, że otrzymamy karetę?

4. Z 52 kart wybrano 13. Jaka jest szansa otrzymania a) dokładnie siedmiu kart jednego koloru; b) dokładnie sześciu kart jednego koloru.

5. Na bankiecie, przy okrągłym stole siadają losowo Ania, Bartek, Czarek i jeszcze 4 osoby. Jakie jest prawdopodobieństwo, że Ania będzie siedzieć między Bartkiem i Czarkiem?

6. Klasa liczy 15 uczniów, na każdej lekcji do odpowiedzi losowany jest jeden uczeń. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w ciągu 16 lekcji każdy uczeń zostanie przepytany.

7. Grupa studentów liczy 23 osoby. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w tej grupie są dwie osoby, które mają urodziny tego samego dnia (zakładamy, że żaden student nie jest urodzony w roku przestępnym).

8. W urnie jest b kul białych i c kul czarnych. Losujemy dwie kule a) ze zwracaniem b) bez zwracania. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania kul tego samego koloru?

9. Pan X spotyka się z paniami A i B, do których dojeżdża autobusami odpowiednio linii 1 i 2. Gdy czuje się samotny, wychodzi z domu, udaje się na przystanek i wsiada w pierwszy autobus, jaki się pojawi. Oba autobusy kursują przez całą dobę co godzinę, pan X ma napady samotności codziennie w losowym momencie czasu, obie panie lubią pana X tak samo, a jednak pani A czyni mu wyrzuty, że odwiedza ją zbyt rzadko, zaś pani B ma wrażenie, że pan X jej się narzuca. Jak to wyjaśnić?

10. (Paradoks Bertranda) Z okręgu o promieniu 1 wybrano losowo cięciwę AB. Jakie jest prawdopodobieństwo, że będzie ona dłuższa niż bok trójkąta równobocznego wpisanego w ten okrąg?

Rachunek prawdopodobieństwa - seria 2

1. Rzucamy jednocześnie 7 nieodróżnialnymi kostkami do gry. Ile jest możliwych wyników?

2. Losujemy 6 liczb z 49. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wśród wylosowanych nie będzie dwóch kolejnych liczb?

3. W kolejce po bilety na mecz stoi n kibiców. Każdy z nich nosi szalik w kolorze A lub B. Załóżmy, ze wszystkie możliwe układy kolorów sa jednakowo prawdopodobne. Jakie jest prawdopodobieństwo, ze żadne dwie kolejne osoby nie maja szalików w tym samym kolorze? Jakie jest prawdopodobieństwo, że żadne dwie kolejne osoby nie maja szalików w kolorze A?

4. Miasto N. zbudowane jest na planie kwadratu i poszatkowane ulicami biegnącymi ze wschodu na zachód i z północy na południe, przy czym ulic każdego typu jest po N = 2n+ 1. Kierowca jedzie z południowo-zachodniego wierzchołka miasta na kraniec północno-wschodni, wybierając losowo jedna z najkrótszych dróg. Oblicz prawdopodobieństwo, ze kierowca przejedzie przez środek miasta.

5. Mamy n zapałek, każdą z nich dzielimy na dwie części (różnych typów). Następnie części te łączymy losowo w pary (możliwe jest, że w parze znajdą się dwie części tego samego typu). Jakie jest prawdopodobieństwo, że te pary połączą się w takich samych kombinacjach jak przed podziałem? Jakie jest prawdopodobieństwo, że po połączeniu każda z par będzie się składać z dwóch części różnych typów?

6. (Paradoks kawalera de Méré) Co jest bardziej prawdopodobne: wyrzucenie co najmniej jednej jedynki przy rzucie 4 kostkami czy co najmniej raz obu jedynek przy 24 rzutach 2 kostkami?

7. (Igła Buffona) Igłę o długości l rzucono na podłogę z desek o szerokości $a > l$. Jakie jest prawdopodobieństwo, ze igła przetnie krawędź deski?

8. W n rozróżnialnych urnach rozmieszczono losowo n rozróżnialnych kul. Jakie jest prawdopodobieństwo, ze dokładnie jedna urna zostanie pusta?

9. Zdarzenia A, B, C spełniają $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B), \mathbb{P}(C) \geqslant 2/3$ oraz $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0$. Co można powiedzieć o $\mathbb{P}(A)$?

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa - seria 3

1. Z jeziora wyłowiono 200 ryb, oznakowano je i wpuszczono do wody. Po pewnym czasie wyłowiono 100 ryb, a wśród nich było 8 oznakowanych. Za rozsądną ocenę liczby ryb w jeziorze można uznać liczbę ryb, dla której zrealizowało się zdarzenie o największym prawdopodobieństwie. Jaka to liczba?

2. Na nieskończoną szachownicę o boku a rzuca się monetę średnicy $2r < a$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że a) moneta znajdzie się całkowicie we wnętrzu jednego z pól b) przetnie się z co najwyżej jednym bokiem szachownicy?

3. Roztargniona sekretarka rozmieściła losowo N listów w N uprzednio zaadresowanych kopertach. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że dokładnie k listów trafiło do właściwej koperty

4. (Paradoks Simpsona) Populacja miasta A składa się w 20% z Krakowiaków i w 80% z Górali zaś populacja miasta B w 80% z Górali i w 20% z Krakowiaków. 10% Krakowiaków i 30% Górali zamieszkałych w mieście A ma rude włosy. Z kolei w mieście B rude włosy posiada 20% Krakowiaków i 40% Górali. W którym mieście jest większy odsetek mieszkańców z rudymi włosami?

5. Gracz dostał 13 kart z 52, obejrzał 8 z nich i stwierdził, że nie ma asa. Jaka jest szansa, że w ogóle nie ma asa?

6. Wybrano losowo małżeństwo z dwojgiem dzieci i okazało się, że a) ich starsze dziecko to chłopiec b) mają syna. Jakie jest prawdopodobieństwo, że mają dwóch synów?

7. Wybrano losowo rodzinę z dwojgiem dzieci i okazało się, że jedno z dzieci ma na drugie imię Franek. Jaka jest szansa, że drugie dziecko jest chłopcem (nie wykluczamy, że też ma na drugie imię Franek)?

8. W teleturnieju gracz ma do wyboru trzy koperty, dwie puste, jedną z nagrodą pieniężną. Gdy dokona wyboru, prowadzący otwiera jedną z odrzuconych kopert i pokazuje, że jest pusta. Gracz może w tym momencie zatrzymać wybraną wcześniej kopertę lub zmienić wybór i wziąć pozostałą z odrzuconych wcześniej kopert. Która strategia jest lepsza?

9. Na loterii jest 10 losów wygrywających, 100 przegrywających i 1000 uprawniających do kolejnego losowania. Jakie jest prawdopodobieństwo wygrania?

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa - seria 4

1. W pierwszej urnie są 3 kule białe i 2 czarne, w drugiej urnie są 4 czarne i 1 biała. Rzucamy kostką. Jeśli wypadnie mniej niż 5 oczek, to losujemy kulę z pierwszej urny, w przeciwnym razie z drugiej. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej?

2. (**Schemat urnowy Polya**) W urnie mamy b kul białych i c czarnych. Powtarzamy n razy następującą operację: losujemy kulę z urny, następnie wkładamy ją z powrotem, dokładając dodatkowo jeszcze a kul tego samego koloru.
   - Jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosowano dokładnie k razy kulę czarną?
   - Wykazać, że prawdopodobieństwo wylosowania za n-tym razem kuli białej wynosi $\frac{b}{b+c}$.

3. Wśród n monet k jest asymetrycznych, orzeł wypada na nich z prawdopodobieństwem $1/3$. W wyniku rzutu wybraną losowo monetą wypadł orzeł. Jakie jest prawdopodobieństwo, że ta moneta jest asymetryczna?

4. Test na chorobę X daje wynik pozytywny u wszystkich chorych oraz fałszywy wynik pozytywny u 1% zdrowych. Wiadomo, że na chorobę X cierpi 10% populacji. U pacjenta test dał wynik pozytywny, jakie jest prawdopodobieństwo, że pacjent jest chory?

5. Król Artur urządza turniej rycerski, w którym rycerze spotykają się systemem turniejowym. Obaj uczestnicy każdego pojedynku mają równe szanse na zwycięstwo. Wśród 2^n uczestników jest dwóch braci. Jakie jest prawdopodobieństwo, że spotkają się w pojedynku?

6. **(Zagadnienie ruiny)** Dwóch graczy (nazwijmy ich A i B) gra w „orła i reszkę”, rzucając (niekoniecznie symetryczną) monetą. Gracz A zaczyna z kapitałem a zł, gracz B - z kapitałem b zł. W każdej kolejce stawką jest 1 zł, gracz A wygrywa, gdy wypadnie orzeł (powiedzmy z prawdopodobieństwem p). Gra toczy się, dopóki jeden z graczy nie zbankrutuje. Obliczyć prawdopodobieństwo ruiny gracza A.

7. Powiemy, że zmienna losowa X ma rozkład geometryczny z parametrem p jeśli $\mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1}p$ dla $k = 1, 2, \ldots$. Obliczyć $\mathbb{P}(X > k + l | X > k)$ dla $k, l > 0$.

8. Zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy z parametrem λ, tzn. o gęstości $e^{-\lambda x} 1_{\mathbb{R}_+}(x)$. Obliczyć $\mathbb{P}(X > t + h | X > h)$ dla $t, h > 0$.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa - seria 5

1. Jakie jest prawdopodobieństwo otrzymania parzystej liczby sukcesów w ciągu n prób Bernoulliego o prawdopodobieństwie sukcesu równym p?

2. Dwaj gracze rzucają po n razy symetryczną monetą. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wyrzucą tę samą liczbę orłów?

3. Rzucamy n razy symetryczną monetą. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wyrzucimy łącznie więcej orłów niż reszek?

4. Bolek i Lolek grają w szachy do momentu gdy jeden z nich wygra dwie partie pod rząd. Jakie jest prawdopodobieństwo, ze wygra Lolek, jeśli prawdopodobieństwo wygrania przez niego pojedynczej partii wynosi p? Zakładamy, że wyniki poszczególnych partii są niezależne.

5. W sytuacji z poprzedniego zadania, przyjmijmy, że prawdopodobieństwo, że Bolek wygra pierwszą partię wynosi $1/2$, ale począwszy od drugiej partii, prawdopodobieństwo wygranej Bolka zależy od tego, czy wygrał poprzednią partię. Jeśli dopiero co odniósł sukces, czuje się pewnie i wygrywa z prawdopodobieństwem $3/4$, jeśli poprzednia partia zakończyła się jego przegraną, zżera go trema i wygrywa z mniejszym prawdopodobieństwem, równym $1/4$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że Bolek wygra całą rozgrywkę?

6. Jakie jest prawdopodobieństwo, że przy wielokrotnym rzucaniu parą kostek sześciennych, suma oczek 2 wypadnie przed sumą oczek 4?

7. Niech p_n będzie ciągiem liczb z przedziału $(0, 1)$, takim że $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda > 0$. Dla $n = 1, 2, 3, \ldots$ przez $P_k(n)$ oznaczmy prawdopodobieństwo, że w n próbach Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu równym p_n zaszło dokładnie k sukcesów. Znaleźć $\lim_{n\to\infty} P_k(n)$.

8. W ciągu miesiąca firma sprzedała 10000 zegarków. Na podstawie danych z poprzednich lat wiemy, że prawdopodobieństwo, że zegarek będzie wymagał naprawy w czasie objętym gwarancją, wynosi 0.0001. Jakie (w przybliżeniu) jest prawdopodobieństwo, że nie więcej niż 3 zegarki będą wymagały naprawy w ramach gwarancji? Podać oszacowanie błędu.

9. Dwóch korektorów przeczytało książkę. Pierwszy znalazł 91 błędów, drugi 53 przy czym błędów zauważonych przez obu było 39. Następnie korektorzy zostali zwolnieni z pracy. Dlaczego?

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa - seria 6

1. Wyznaczyć dystrybuantę rozkładów a) dwupunktowego $p\delta_a + (1-p)\delta_b$, gdzie $a < b$, b) geometrycznego z parametrem p, c) jednostajnego na odcinku (a,b).

2. Dystrybuanta zmiennej losowej X dana jest wzorem

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \in (-\infty, 0) \\ \frac{t^2}{2} & \text{dla } t \in [0,1) \\ 1 - \frac{(2-t)^2}{2} & \text{dla } t \in [1,2) \\ 1 & \text{dla } t \in [2,\infty) \end{cases}$$

   Czy zmienna X ma gęstość? Jeśli tak, wyznaczyć ją i naszkicować jej wykres.

3. Wykazać, że funkcja $g(x) = 3x^2 e^{-x^3} 1_{(0,\infty)}(x)$ jest gęstościa prawdopodobieństwa. Niech X będzie zmienną losową o tej gęstości. Wyznaczyć rozkład zmiennej $\max(x^2, 3x)$.

4. Bolek, Lolek rzucają symetryczną monetą, każdy z nich wykonuje serię rzutów do momentu wyrzucenia orła. Niech T_B (odp. T_L) oznacza numer rzutu w którym Bolek (odp. Lolek) wyrzucił po raz pierwszy orła. Znaleźć rozkłady zmiennych a) $\min(T_B, T_L)$, b) $T_B + T_L$.

5. Zmienna X ma rozkład jednostajny na odcinku $(0,1)$. Znaleźć rozkład zmiennej $Y = -\ln X$.

6. Zmienna losowa X ma rozkład $\mathcal{N}(0,1)$. Wyznaczyć dystrybuanty i gęstości (o ile istnieją) dla a) $Y = e^X$, b) $Y = X^2$.

7. Zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy z parametrem λ. Znaleźć rozkład zmiennych a) $Y = 1/(X+1)$, b) $Y = \sqrt{X}$.

8. Losujemy punkt z okręgu o promieniu 1 i środku w punkcie $(0,0)$. Niech (X,Y) oznaczają współrzędne wylosowanego punktu. Znaleźć dystrybuantę i gęstość (jeśli istnieje) zmiennej X.

9. Rozwiązać poprzednie zadanie, jeśli punkt (X,Y) losujemy nie z okręgu, a z koła o promieniu 1 i środku w punkcie $(0,0)$.

10. Niech zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na przedziale $(-\pi/2, \pi)$. Znaleźć gęstość zmiennej losowej $Y = \sin x$.

11. Udowodnić, że funkcja $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dana wzorem $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$ jest gęstością prawdopodobieństwa.

12. Losujemy punkt P z kuli o środku O i promieniu 1. Niech X będzie odległością między punktami O i P. Znaleźć gęstość zmiennej losowej X.

13. Powtarzamy wielokrotnie doświadczenie o prawdopodobieństwie sukcesu równym $1/n$. Dla liczby dodatniej $t \in (0,\infty)$, niech $p_n(t)$ oznacza prawdopodobieństwo zdarzenia "w pierwszych $\lfloor nt \rfloor$ rzutach nie było sukcesu" ($\lfloor nt \rfloor$ oznacza największą liczbę naturalną nie przekraczającą nt). Udowodnić, że istnieje granica $p(t) = \lim_{n\to\infty} p_n(t)$ oraz, że $p(t)$ jako funkcja zmiennej t jest gęstością prawdopodobieństwa.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa - seria 7

1. Podać przykład trzech zmiennych losowych, niezależnych parami, ale nie łącznie.
2. Niech X_i, $i = 1, \dots, n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach odp. $Exp(\lambda_i)$. Wyznaczyć rozkład zmiennej $Y = \min(X_1, \dots, X_n)$
3. Bolek, Lolek rzucają symetryczną monetą, każdy z nich wykonuje serię rzutów do momentu wyrzucenia orła. Niech T_B (odp. T_L) oznacza numer rzutu w którym Bolek (odp. Lolek) wyrzucił po raz pierwszy orła. Znaleźć rozkłady zmiennych a) $\min(T_B, T_L)$, b) $T_B + T_L$.
4. Zmienne losowe X, Y są niezależne i mają gęstości odp. f_1, f_2. Znaleźć rozkład zmiennej losowej $Z = X/Y$.
5. Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi o rozkladach
   a) Bernoulliego z parametrami odp. p, n i p, m
   b) Poissona z parametrami odp. λ_1, λ_2.
   c) normalnych z parametrami a_1, σ_1^2 i a_2, σ_2^2.
   d) jednostajnych na $[0, 1]$
   e) wykładniczych z parametrem λ

   Znaleźć rozkład zmiennej $Z = X + Y$.
6. Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na $[0, 1]$, zaś Y, zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na zbiorze $0, 1, 2, \dots, n$. Znaleźć rozkład zmiennej $X + Y$.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa - seria 8

1. Zmienne X, Y sa niezalezne i mają rozkład $Exp(1)$. Znaleźć rozkład zmiennej $Z = X - Y$.

2. Zmienna X ma rozkład
$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = -1) = 1/4,\ \mathbb{P}(X = 0) = 1/2.$$
Wyznaczyć wartości oczekiwane zmiennych $\sin(\pi X)$, 2^X, $X(X-1)$.

3. Znaleźć wartości oczekiwane i wariancje rozkładów
   a) jednostajnego na odcinku $[a, b]$,
   b) Bernoulliego z parametrami n, p,
   c) wykładniczego z parametrem λ,
   d) geometrycznego z parametrem p.

4. Roztrzepana sekretarka umieściła n listów w n uprzednio zaadresowanych kopertach. Niech X oznacza liczbę listów, które trafiły do właściwych kopert. Znaleźć wartość oczekiwaną i wariancję X.

5. Urna zawiera N kul w tym b kul białych. Losujemy bez zwracania n kul ($n \leqslant N$) i definiujemy zmienną losową X jako liczbę wylosowanych kul białych. Znaleźć wartość oczekiwaną i wariancję X.

6. Zmienna X ma rozkład jednostajny na odcinku $[0, 2\pi]$. Znaleźć wartość oczekiwaną zmiennej $Y = f(X)$, jeśli
   a) $f(x) = \sin x$,
   b) $f(x) = \cos^2 x$.
   c) $f(x) = -\ln x$
   d)
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \in [0, \pi/2] \\ \sin x & \text{dla } x \in (\pi/2, 3\pi/2] \\ 1 & \text{dla } x \in (3\pi/2, 2\pi] \end{cases}$$

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa - seria 9

1. Rzucamy kostką aż do momentu wyrzucenia wszystkich możliwych wyników. Znaleźć wartość oczekiwaną liczby rzutów.

2. Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie $\mathcal{N}(0,1)$. Dla $k \in \mathbb{N}$ znaleźć $\mathbb{E}X^k$.

3. Niech (X, Y) będzie wektorem gaussowskim o średniej 0 i macierzy kowariancji
$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
Udowodnić, że zmienne $X+Y, X-Y$ są niezależne. Znaleźć gęstość wektora $(X+Y, X-Y)$.

4. Zmienna dwuwymiarowa $X = (X_1, X_2)$ ma rozkład jednostajny na trójkącie o wierzchołkach $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$. Wyznaczyć średnią i macierz kowariancji wektora X oraz współczynnik korelacji między zmiennymi X_1 i X_2.

5. Wykazać, że macierz
$$\begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}$$
jest nieujemnie określona wtedy i tylko wtedy, gdy $a + b \geqslant 0$ i $ab - c^2 \geqslant 0$.

6. Niech C będzie macierzą 2×2, nieujemnie określoną. Skonstruować wektor gaussowski o macierzy kowariancji równej C.

7. Podać przykład nieskorelowanych zmiennych losowych, które nie są niezależne.

8. Dysponujemy dwoma wynikami pomiarów pewnej wielkości fizycznej. Błędy poszczególnych pomiarów to zmienne losowe X_1, X_2 o średniej 0 i wariancjach odpowiednio σ_1^2, σ_2^2. Jako ostateczny wynik chcielibyśmy przyjąć średnią ważoną z wyników poszczególnych pomiarów. Jakie wagi przyjąć by błąd średniokwadratowy (czyli wariancja ostatecznego wyniku) był jak najmniejszy? Zakładamy, że pomiary są niezależne.

9. Niech X będzie zmienną losową. Dla jakiej wartości t funkcja $f(t) = \mathbb{E}(X-t)^2$ przyjmuje wartość najmniejszą?

Zadania z rachunku pradopodobieństwa - seria 10

1. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $Exp(1)$. Zbadać zbieżność ciągu
$$S_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}.$$

2. Niech $X_1, Y_1, X_2, Y_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[0,1]$. Dla funkcji $f\colon [0,1] \to [0,1]$ definiujemy zmienne Z_i wzorem $Z_i = 1_{\{Y_i < f(X_i)\}}$. Zbadać zbieżność ciągu
$$\frac{Z_1 + \ldots + Z_n}{n}.$$

3. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na $[0,1]$ zbadać zbieżność ciągów
$$A_n = X_1 X_2 \cdots X_n,\ B_n = A_n^{1/n}.$$

4. Rozważmy błądzenie niesymetryczne na zbiorze liczb całkowitych. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $\mathbb{P}(X_i = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X_i = -1)$, zaś $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Wykazać, że dla $p > 1/2$, $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ p.n., zaś dla $p < 1/2$, $\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty$ p.n.

5. Rozważmy ciąg niezależnych zmiennych losowych $(X_i)_{i=1}^{\infty}$, takich że X_i ma rozkład jednostajny na $[0,1]$ dla i parzystych oraz X_i ma rozkład Poissona z parametrem 1 dla i nieparzystych. Zbadać zbieżność ciągu $S_n = n^{-1}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$.

6. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $\mathcal{N}(0,1)$. Zbadać zbieżność ciągów
$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{X_1^2 + \ldots + X_n^2}$$
oraz
$$\frac{X_1X_2 + X_2X_3 + X_3X_4 + \ldots + X_{n-1}X_n}{n}$$

7. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne i mają rozkład wykładniczy z parametrem 1. Niech $F_n(t)$ oznacza dystrybuantę empiryczną próbki $X_1, \ldots, X_n$. Znaleźć $\lim_{t\to\infty} F_n(t)$. Co można powiedzieć o zbieżności tego ciągu funkcji?

Zadania z rachunku pradopodobieństwa - seria 11

1. Rzucono 1000 razy kostką. Znaleźć przybliżenie prawdopodobieństwa, że suma oczek jest zawarta między 3410, a 3590.

2. Klient supermarketu z prawdopodobieństwem 0,2 płaci kartą i wtedy czas obsługi ma rozkład wykładniczy z parametrem 1, z prawdopodobieństwem 0,8 płaci gotówką, wtedy czas obsługi ma rozkład jednostajny na przedziale $[0, 2]$. Jaka jest szansa, że w ciągu 4 godzin uda się obsłużyć 250 lub więcej klientów?

3. Pan X w każdy sobotni poranek sprawdza swoje szczęście rzucając (symetryczną) monetą. Jeśli wypadnie orzeł, X udaje się wieczorem do kasyna, gdzie z prawdopodobieństwem 4/5 traci 100 zł, a z prawdopodobieństwem 1/5, wygrywa 100 zł. Jeśli natomiast rankiem wyrzucił reszkę, idzie wieczorem do kina, kupując bilet za 20 zł. Oszacować prawdopodobieństwo, że w ciągu kolejnych 100 sobót, z portfela Pana X ubyło łącznie więcej niż 4500 zł.

4. W czasie szczytu liczba rozmów łączona przez pewną centralę telefoniczną w ciągu godziny ma rozkład Poissona ze średnią 100. Zakładając niezależność liczby łączonych rozmów w różnych godzinach oszacuj prawdopodobieństwo, że centrala połączy w ciągu 400 kolejnych godzin szczytu między 40 a 42 tysiące rozmów.

5. W urnie jest 36 kul białych i 64 czarne. Losujemy kule po jednej ze zwracaniem. Ile losowań należy dokonać, aby prawdopodobieństwo tego, że częstość otrzymywania kuli białej różni się od 0,36 o co najmniej 0,12 było równe 0,1?

6. Niech $X_1, \ldots, X_{200}$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie geometrycznym z parametrem 1/2. Jakie jest prawdopodobieństwo, że średnia z próbki nalezy do przedziału $[1, 4]$?

7. Rzucamy symetryczną monetą do chwili gdy wyrzucimy 1000 orłów. Jakie jest przybliżone prawdopodobieństwo, że rzucimy więcej niż 2100 razy?

Zadania z rachunku pradopodobieństwa - seria 12

1. Niech (U_n) będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie, $\mathbb{P}(U_n = 1) = \mathbb{P}(U_n = -1) = 1/2$. Czy a) $X_n = U_n \cdot U_{n+1}$, b) $X_n = (U_n + U_{n+1})/2$ są łańcuchami Markowa?

2. Podać przykład łańcucha Markowa X_i i dowolnej funkcji f, takich że $f(X_i)$ nie jest łańcuchem Markowa.

3. Niech U_n będą niezależnymi zmiennymi losowymi, $\mathbb{P}(U_n = 1) = 1 - \mathbb{P}(U_n = -1) = p$, zaś $X_n = U_1 + \ldots + U_n$. Wykazać, że ciąg $Y_n = |X_n|$ jest łańcuchem Markowa.

4. Cząstka porusza się wzdłuż osi OX ze stałą prędkością $+v$ lub $-v$. W chwilach $1, 2, \ldots$ kierunek ruchu pozostaje bez zmian z prawdopodobieństwem p, a z prawdopodobieństwem $q = 1 - p$ zmienia się na przeciwny. Zmienna X_n opisuje kierunek ruchu w momencie n. Znaleźć $\mathbb{P}(X_n = +v | X_0 = -v)$, $\mathbb{P}(X_0 = v | X_n = v)$ oraz rozkład X_n, gdy wiemy, że $\mathbb{P}(X_0 = +v) = r$.

5. Rzucamy kostką tak długo, aż pojawi się ciąg 15 lub 55. Jakie jest prawdopodobieństwo, że ciąg 15 pojawi się wcześniej?

6. Rzucamy symetryczną monetą, aż do momentu, gdy wyrzucimy pod rząd cztery orły. Obliczyć wartość oczekiwaną liczby wykonanych rzutów.

7. Po wierzchołkach pięciokąta ABCDE porusza się pionek. W chwili początkowej znajduje się w punkcie A, a w każdym kolejnym ruchu przesuwa się w sposób niezależny od poprzednich ruchów z prawdopodobieństwem $1/2$ do jednego z sąsiednich wierzchołków. Oblicz prawdopodobieństwo, że pionek powróci do punktu A przed dotarciem do punktu C,

8. Miasta A, B, C, D położone są w wierzchołkach kwadratu (w tej kolejności). Wzdłuż każdej krawędzi kwadratu prowadzi droga, dodatkowo miasta A i C są połączone drogą wzdłuż przekątnej kwadratu. Akwizytor startuje w mieście B i objeżdża miasta A, B, C, D za każdym razem wybierając losową drogę wyjazdową. Jakie jest prawdopodobieństwo, że odwiedzi on miasto C wcześniej niż miasto D? Wszystkie drogi są dwukierunkowe

9. Znaleźć rozkład stacjonarny dla łańcucha Markowa o macierzy przejścia
$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}. \end{pmatrix}$$

10. W pudełku A są 3 kule ponumerowane od 1 do 3, w pudełku B – ani jednej. Wykonano 10000000 rzutów kostką i po każdym rzucie przekładano kulę z wylosowanym numerem do drugiego pudełka. Jaka jest w przybliżeniu szansa, że pudełko B jest puste?

Zadania z rachunku prawdopodobieństwa - seria 13

1. Wykazać, że jeżeli w łańcuchu Markowa stany i, j komunikują się, to mają ten sam okres.
2. Niech $P = (p_{ij})_{i,j\leqslant m}$ będzie macierzą podwójnie stochastyczną, tzn. taką, że $\sum_{i=1}^{m} p_{ij}$, $j = 1, \ldots, m$ oraz $\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1$, $i = 1, \ldots, m$. Udowodnić, że rozkład $\pi_i = 1/m$ jest rozkładem stacjonarnym dla łańcucha Markowa z macierzą przejścia P.
3. Niech $p_0, \ldots, p_{k-1} \geqslant 0$, $\sum_{i=0}^{k-1} p_i = 1$, $p_1 > 0$, $E = \{0, \ldots, k-1\}$, a macierz P będzie zdefiniowana wzorem $p_{0j} = p_j$, $p_{ij} = p_{(j-i) \bmod k}$. Rozważmy łańcuch Markowa (X_n) z macierzą przejścia P. Znaleźć $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = i)$.
4. Niech X_i będą wynikami kolejnych rzutów kostką i niech Z_n będzie ostatnią cyfrą liczby $X_1 X_2 \cdots X_n$. Jakie są stany pochłaniające łańcucha Markowa Z_n?
5. Zbadać czy jest powracające błądzenia losowe na kracie $\mathbb{Z}^d$, zdefiniowane wzorem $Z_{n+1} = Z_n + J_n$, gdzie J_n są niezależne, o rozkładzie $\mathbb{P}(J_n = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_d)) = 1/2^d$, $\varepsilon_i = \pm 1$.
6. Niech łańcuch Markowa z przestrzenią stanów $S = \{0, 1, 2, \ldots\}$ ma macierz przejścia postaci $p_{01} = p_0$, $p_{00} = 1 - p_0$, $p_{n,n+1} = p_n$, $p_{n0} = 1 - p_n$. Kiedy ten łańcuch jest powracający, a kiedy chwilowy?
7. Niech X_n^a oraz X_n^b będą niezależnymi symetrycznymi błądzeniami przypadkowymi na prostej, startującymi odpowiednio z punktu $a \in \mathbb{Z}$ i $b \in \mathbb{Z}$. Jaka jest szansa, że te błądzenia spotkają się w jakimś punkcie?
8. W populacji gen odpowiadający za pewną cechę ma wersję dominującą (d) i recesywną (r). Geny występują u osobników w parach, mamy więc możliwości rr, dd, dr. Osobniki o układzie dd nazywamy dominantami, o układzie dr - hybrydami. Wyobraźmy sobie, że startując od losowego osobnika krzyżujemy go z hybrydą i w kolejnym pokoleniu powtarzamy tę operację na losowym potomku, tzn. w każdym pokoleniu wybieramy jednego osobnika i krzyżujemy go znów z hybrydą. Jakie jest w przybliżeniu prawdopodobieństwo, że po wielu pokoleniach potomek będzie dominantą? Gdyby osobniki były za każdym razem krzyżowane z dominantą, jaka jest średnia liczba pokoleń potrzebna do uzyskania dominanty?
9. Wyznaczyć medianę dla zmiennej X o rozkładzie wykładniczym z parametrem λ.
10. Wykazać, że dla dowolnej całkowalnej zmiennej losowej X, Med X minimalizuje funkcję $x \mapsto \mathbb{E}|X - x|$.
11. Wykazać, że dla dowolnej zmiennej losowej całkowalnej z kwadratem $|\mathbb{E}X - \mathrm{Med}\, X| \leqslant \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$.
12. Zmienna X ma rozkład μ, dany wzorem

$$\mu(A) = \frac{1}{3}|A \cap (-2, -1)| + \frac{1}{3}|A \cap (1, 2)| + \frac{1}{3}1_A(0).$$

Dla $p \in [0, 1]$, wyznaczyć kwantyle rzędu p zmiennej X. Dla jakich p są one wyznaczone jednoznacznie?