Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - seria 1

1. Dana jest przestrzeń probabilistyczna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, gdzie Ω jest zbiorem przeliczalnym oraz $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$. Udowodnij, że istnieją liczby $p_\omega \geqslant 0$, takie że $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega$ dla wszystkich $A \in \mathcal{F}$.

2. Udowodnij, że każde nieskończone σ-ciało jest nieprzeliczalne.

3. Klasa liczy 15 uczniów, na każdej lekcji do odpowiedzi losowany jest jeden uczeń. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w ciągu 16 lekcji każdy uczeń zostanie przepytany.

4. Roztrzepana sekretarka rozmieściła losowo N listów w N uprzednio zaadresowanych kopertach. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że dokładnie k listów trafiło do właściwej koperty.

5. (Igła Buffona) Igłę o długości l rzucono na podłogę z desek o szerokości $a > l$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że igła przetnie krawędź deski?

6. Z przedziału $[0, 1]$ wybrano losowo liczbę x. Jakie jest prawdopodobieństwo, że x jest niewymierna?

7. W n rozróżnialnych urnach rozmieszczono losowo n rozróżnialnych kul. Jakie jest prawdopodobieństwo, że dokładnie jedna urna zostanie pusta?

8. Do n rozróżnialnych urn wrzucono losowo k nierozróżnialnych kul. Jakie jest prawdopodobieństwo, że dokładnie jedna urna zostanie pusta?

9. Udowodnij, że następujące pseudometryki na $\mathcal{F}$ spełniają warunek trójkąta:

$$\begin{aligned} \rho_1(A,B) &= \mathbb{P}(A \Delta B) \\ \rho_2(A,B) &= \begin{cases} \frac{\mathbb{P}(A\Delta B)}{\mathbb{P}(A\cup B)} & \text{jeśli } \mathbb{P}(A \cup B) > 0 \\ 0 & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases} \end{aligned}$$

10. Pewien chłopiec ma dwie babcie, obie oczekują, że będzie on je regularnie odwiedzał. Z przystanku przed jego domem odjeżdżają dwa tramwaje, tramwaj A, którym można dojechać do pierwszej babci i tramwaj B, którym można dojechać do drugiej. Chłopiec codziennie wychodzi z domu o losowej godzinie i wsiada w pierwszy tramwaj, który pojawi się na przystanku. Oba tramwaje jeżdżą co godzinę, a jednak okazuje się, że u jednej babci chłopiec bywa dużo częściej niż u drugiej. Jak to wyjaśnić?

11. Z przedziału $[0, 1]$ wybrano losowo dwa punkty, które podzieliły go na trzy odcinki. Jakie jest prawdopodobieństwo, że z tych odcinków da się zbudować trójkąt?

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - seria 2

1. W kolejce po bilety na mecz stoi n kibiców. Każdy z nich nosi szalik w kolorze A lub B. Załóżmy, ze wszystkie możliwe układy kolorów sa jednakowo prawdopodobne. Jakie jest prawdopodobieństwo, ze żadne dwie kolejne osoby nie maja szalików w tym samym kolorze? Jakie jest prawdopodobieństwo, ze żadne dwie kolejne osoby nie maja szalików w kolorze A?

2. Miasto zbudowane jest na planie kwadratu i poszatkowane ulicami biegnącymi ze wschodu na zachód i z północy na południe, przy czym ulic każdego typu jest po $N = 2n + 1$. Kierowca jedzie z południowo-zachodniego wierzchołka miasta na kraniec północno-wschodni, wybierając losowo jedną z najkrótszych dróg. Oblicz prawdopodobieństwo, że kierowca przejedzie przez środek miasta.

3. Z jeziora wyłowiono 200 ryb, oznakowano je i wpuszczono do wody. Po pewnym czasie wyłowiono 100 ryb, a wśród nich było 8 oznakowanych. Za rozsądną ocenę liczby ryb w jeziorze można uznać liczbę ryb, dla której zrealizowało się zdarzenie o największym prawdopodobieństwie. Jaka to liczba?

4. Zdarzenia A, B, C spełniają $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B), \mathbb{P}(C) \geqslant 2/3$ oraz $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0$. Co można powiedzieć o $\mathbb{P}(A)$?

5. Każdy z n chromosomów w komórce wystawionej na promieniowanie dzieli się na dwie części różnych typów (powiedzmy typu A i typu B). Części te następnie ponownie łączą się w pary, przy czym możliwe jest także połączenie w parę 2 części tego samego typu. Jakie jest prawdopodobieństwo, że części te połączą się w takich samych kombinacjach, jak przed podziałem? Jakie jest prawdopodobieństwo, że po połączeniu każda z par będzie się składać z części różnych typów?

6. **(Paradoks kawalera de Méré)** Co jest bardziej prawdopodobne: wyrzucenie co najmniej jednej jedynki przy rzucie 4 kostkami czy co najmniej raz obu jedynek przy 24 rzutach 2 kostkami?

7. Na nieskończoną szachownicę o boku a rzuca się monetę średnicy $2r < a$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że a) moneta znajdzie się całkowicie we wnętrzu jednego z pól b) przetnie się z co najwyżej jednym bokiem szachownicy?

8. W kole o promieniu 1 wyróżniono 1025 punktów. Udowodnić, że odległość między pewnymi dwoma punktami nie przekracza 2/31.

9. ($*$) Dane są liczby $k, n \in \mathbb{N}$ ($k > 1$), spełniające nierówność $n < 2^{k/2}$. Udowodnić, że liczby ze zbioru $A_n = \{1, \dots, n\}$ można pokolorować dwoma kolorami w ten sposób, by w każdym ciągu arytmetycznym długości k, o elementach ze zbioru A_n występowały liczby w obu kolorach.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - seria 3

1. (Paradoks Simpsona) Populacja miasta A składa się w 20% z Krakowiaków i w 80% z Górali zaś populacja miasta B w 80% z Krakowiaków i w 20% z Górali. 10% Krakowiaków i 30% Górali zamieszkałych w mieście A ma rude włosy. Z kolei w mieście B rude włosy posiada 20% Krakowiaków i 40% Górali. W którym mieście jest większy odsetek mieszkańców z rudymi włosami?

2. Gracz dostał 13 kart z 52, obejrzał 8 z nich i stwierdził, że nie ma asa. Jaka jest szansa, że w ogóle nie ma asa?

3. Wybrano losowo rodzinę z dwojgiem dzieci i okazało się, że jedno z dzieci ma na drugie imię Franek. Jaka jest szansa, że drugie dziecko jest chłopcem (nie wykluczamy, że też ma na drugie imię Franek)?

4. W teleturnieju gracz ma do wyboru trzy koperty, dwie puste, jedną z nagrodą pieniężną. Gdy dokona wyboru, prowadzący otwiera jedną z odrzuconych kopert i pokazuje, że jest pusta. Gracz może w tym momencie zatrzymać wybraną wcześniej kopertę lub zmienić wybór i wziąć pozostałą z odrzuconych wcześniej kopert. Która strategia jest lepsza?

5. Na loterii jest 10 losów wygrywających, 100 przegrywających i 1000 uprawniających do kolejnego losowania. Jakie jest prawdopodobieństwo wygrania?

6. **(Zagadnienie ruiny)** Dwóch graczy (nazwijmy ich A i B) gra w „orła i reszkę”, rzucając (niekoniecznie symetryczną) monetą. Gracz A zaczyna z kapitałem a zł, gracz B - z kapitałem b zł. W każdej kolejce stawką jest 1 zł, gracz A wygrywa, gdy wypadnie orzeł (powiedzmy z prawdopodobieństwem p). Gra toczy się, dopóki jeden z graczy nie zbankrutuje. Obliczyć prawdopodobieństwo ruiny gracza A.

7. W pierwszej urnie są 3 kule białe i 2 czarne, w drugiej urnie są 4 czarne i 1 biała. Rzucamy kostką. Jeśli wypadnie mniej niż 5 oczek, to losujemy kulę z pierwszej urny, w przeciwnym razie z drugiej. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej?

8. (**Schemat urnowy Polya**) W urnie mamy b kul białych i c czarnych. Powtarzamy n razy następującą operację: losujemy kulę z urny, następnie wkładamy ją z powrotem, dokładając dodatkowo jeszcze a kul tego samego koloru.
   - Jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosowano dokładnie k razy kulę czarną?
   - Wykazać, że prawdopodobieństwo wylosowania za n-tym razem kuli białej wynosi $\frac{b}{b+c}$.

9. Wśród n monet k jest asymetrycznych, orzeł wypada na nich z prawdopodobieństwem 1/3. W wyniku rzutu wybraną losowo monetą wypadł orzeł. Jakie jest prawdopodobieństwo, że ta moneta jest asymetryczna?

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - seria 4

1. W mieście działają dwa przedsiębiorstwa taksówkowe: Zielone Taxi (85% samochodów) i Niebieskie Taxi (15%). Świadek nocnego wypadku zakończonego ucieczka kierowcy twierdzi, ze samochód był niebieski. Eksperymenty wykazały, ze świadek rozpoznaje kolor poprawnie w 80% przypadków, a myli się w 20% przypadków. Jaka jest szansa, ze w wypadku uczestniczyła niebieska taksówka?
2. Podać przykład zdarzeń A, B, C, które są parami niezależne, ale nie są niezależne.
3. Zdarzenia A, B są niezależne oraz $A \cup B = \Omega$. Wykazać, że $\mathbb{P}(A) = 1$ lub $\mathbb{P}(B) = 1$.
4. Czy z tego, że A, B, C są parami niezależne wynika, że a) $A \cap B$ i C, b) $A \cup B$ i C są niezależne? Czy coś się zmieni jeśli niezależność parami zastąpimy przez niezależność łączną?
5. Wykazać, że λ-układy spełniają założenia lematu o rodzinie multyplikatywnej.
6. Jakie jest prawdopodobieństwo otrzymania parzystej liczby sukcesów w ciągu n prób Bernoulliego o prawdopodobieństwie sukcesu równym p?
7. Dwaj gracze rzucają po n razy symetryczną monetą. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wyrzucą tę samą liczbę orłów?
8. Rzucamy n razy symetryczną monetą. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wyrzucimy łącznie więcej orłów niż reszek?
9. Bolek i Lolek grają w bierki do momentu gdy jeden z nich wygra dwie partie pod rząd. Jakie jest prawdopodobieństwo, ze wygra Lolek, jeśli prawdopodobieństwo wygrania przez niego pojedynczej partii wynosi p? Zakładamy, że wyniki poszczególnych partii są niezależne.
10. W sytuacji z poprzedniego zadania, przyjmijmy, że prawdopodobieństwo, że Bolek wygra pierwszą partię wynosi 1/2, ale począwszy od drugiej partii, prawdopodobieństwo wygranej Bolka zależy od tego, czy wygrał poprzednią partię. Jeśli dopiero co odniósł sukces, czuje się pewnie i wygrywa z prawdopodobieństwem 3/4, jeśli poprzednia partia zakończyła się jego przegraną, zżera go trema i wygrywa z mniejszym prawdopodobieństwem, równym 1/3. Jakie jest prawdopodobieństwo, że Bolek wygra całą rozgrywkę?
11. Jakie jest prawdopodobieństwo, że przy wielokrotnym rzucaniu parą kostek sześciennych, suma oczek 2 wypadnie przed sumą oczek 4?
12. Rzucamy kostką do wypadnięcia drugiej szóstki. Rozważmy zdarzenia A_1, A_2, gdzie A_1 - przed pierwszą szóstką wyrzucono czwórkę, zaś A_2 - pomiędzy pierwszą i drugą szóstką padła dwójka. Czy zdarzenia A_1, A_2 są niezależne?
13. Owad składa k jajeczek z prawdopodobieństwem $\lambda^k e^{-\lambda}/k!$ $(\lambda > 0)$. Potomek wylęga się z jaja z prawdopodobieństwem p. Znaleźć prawdopodobieństwo, że liczba potomków będzie równa l.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - seria 5

1. Niech $(\Omega, \mathcal{F})$ będzie przestrzenią mierzalną, zaś $\mu, \nu \colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ miarami probabilistycznymi. Wykazać, że rodzina $\mathcal{G} = \{A \in \mathcal{F} \colon \mu(A) = \nu(A)\}$ jest λ-układem.
2. Zdarzenia $A_1, A_2, A_3, \ldots$ są niezależne i mają równe prawdopodobieństwa. Jaka jest szansa, że zajdzie skończenie wiele zdarzeń A_n?
3. Rzucamy nieskończenie wiele razy monetą o prawdopodobieństwie wyrzucenia orła równym $p \in (0,1)$, wyniki doświadczenia kodujemy jako nieskończony ciąg zer (reszka) i jedynek (orzeł). Wykazać, że z prawdopodobieństwem 1 dowolny skończony ciąg zerojedynkowy pojawia się w ciągu kodującym wynik nieskończenie wiele razy.

4.* (Perkolacja) Rozważmy nieskończony graf G o zbiorze wierzchołków $V = \mathbb{Z}^2$ i zbiorze krawędzi E złożonym ze wszystkich par $(u,v) \in V^2$, takich że u i v są odległe dokładnie o 1. Ustalmy liczbę $p \in [0,1]$ i rozważmy graf uzyskany z G w wyniku następującej procedury: dla każdej krawędzi grafu G rzucamy monetą o prawdopodobieństwie orła równym p (rzuty są niezależne) i jeśli wypadnie orzeł, krawędź pozostawiamy, jeśli reszka - usuwamy. Nazwijmy uzyskany w ten sposób graf przez G'. Niech M oznacza moc składowej spójności grafu G', zawierającej punkt $(0,0)$. Wykazać, że istnieje liczba $p_c \in (0,1)$, taka że dla $p < p_c$, $M < \infty$ z prawdopodobieństwem 1, zaś dla $p > p_c$, $M = \infty$ z dodatnim prawdopodobieństwem.

5. Niech $F \colon \mathbb{R} \to [0,1]$ będzie funkcją niemalejącą, prawostronnie ciągłą, taką że $\lim_{t\to-\infty} F(t) = 0$, $\lim_{t\to\infty} F(t) = 1$. Zdefiniujmy funkcję $F^{-1} \colon (0,1) \to \mathbb{R}$ wzorem $F^{-1}(x) = \inf\{t \colon F(t) \geqslant x\}$. Wykazać, że funkcja F^{-1} traktowana jako zmienna losowa na przestrzeni $((0,1), \mathcal{B}((0,1)), \lambda)$, ma dystrybuantę F.
6. Wyznaczyć dystrybuantę rozkładów a) dwupunktowego $p\delta_a + (1-p)\delta_b$, gdzie $a < b$, b) geometrycznego z parametrem p, c) wykładniczego z parametrem λ
7. Skonstruować rozkład bezatomowy, który nie jest ciągły.
8. Zmienna X ma rozkład jednostajny na odcinku $(0,1)$. Znaleźć rozkład zmiennej $Y = -\ln X$.
9. Zmienna losowa X ma rozkład $\mathcal{N}(0,1)$. Wyznaczyć dystrybuanty i gęstości (o ile istnieją) dla a) $Y = e^X$, b) $Y = X^2$.

   Uwaga: Dystrybuanty należy wyznaczyć w terminach dystrybuanty zmiennej X.
10. Zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy z parametrem λ. Znaleźć rozkład zmiennych a) $Y = 1/(X+1)$, b) $Y = \sqrt{X}$.
11. Wykazać, że funkcja $g(x) = 3x^2 e^{-x^3} 1_{(0,\infty)}(x)$ jest gęstościa prawdopodobieństwa. Niech X będzie zmienną losową o tej gęstości. Wyznaczyć rozkład zmiennej $\max(x^2, 3x)$.
12. Losujemy punkt z okręgu o promieniu 1 i środku w punkcie $(0,0)$. Niech (X,Y) oznaczają współrzędne wylosowanego punktu. Znaleźć dystrybuantę i gęstość (jeśli istnieje) zmiennej X.
13. Rozwiązać poprzednie zadanie, jeśli punkt (X,Y) losujemy nie z okręgu, a z koła o promieniu 1 i środku w punkcie $(0,0)$.
14. Niech zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na przedziale $(-\pi/2, \pi)$. Znaleźć gęstość zmiennej losowej $Y = \sin x$.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - seria 6

1. Udowodnić, że funkcja $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dana wzorem $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$ jest gęstością prawdopodobieństwa.

2. Losujemy punkt P z kuli o środku O i promieniu 1. Niech X będzie odległością między punktami O i P. Znaleźć gęstość zmiennej losowej X.

3. Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie wykładniczym z parametrem λ. Znaleźć $\mathbb{P}(X > t+s|X > s)$. Rozwiązać analogiczny problem dla rozkładu geometrycznego.

4. Niech X_i, $i = 1, \ldots, n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach odp. $Exp(\lambda_i)$. Wyznaczyć rozkład zmiennej $Y = \min(X_1, \ldots, X_n)$.

5. Ciągła dystrybuanta F ma ciągłą pochodną g a) wszędzie, b) poza zbiorem Z bez punktów skupienia. Wykazać, że g jest gęstością dla dystrybuanty F. Wykazać, że założenie ciągłości g można opuścić.

6. Niech $r_i\colon [0, 1] \to \{-1, 1\}$ będą funkcjami zdefiniowanymi wzorem $r_i(t) = \operatorname{sgn}\sin(2^i \pi t)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$. Wykazać, że funkcje r_i traktowane jako zmienne losowe na przestrzeni $\Omega = [0, 1]$ z σ-ciałem borelowskim i miarą Lebesgue'a sa niezależne.

7. Bolek, Lolek rzucają symetryczną monetą, każdy z nich wykonuje serię rzutów do momentu wyrzucenia orła. Niech T_B (odp. T_L) oznacza numer rzutu w którym Bolek (odp. Lolek) wyrzucił po raz pierwszy orła. Znaleźć rozkłady zmiennych a) $\min(T_B, T_L)$, b) $T_B + T_L$.

8. Niech ε_i, $i = 1, 2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $\mathbb{P}(\varepsilon_i = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon_i = -1) = 1/2$. Niech $Z = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i / 2^i$. Wykazać, że Z ma rozkład jednostajny na odcinku $[-1, 1]$.

9. Zmienne losowe X, Y są niezależne i mają gęstości odp. f_1, f_2. Znaleźć rozkład zmiennej losowej $Z = X/Y$.

10. Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi o rozkladach

    a) Bernoulliego z parametrami odp. p, n i p, m
    b) Poissona z parametrami odp. λ_1, λ_2.
    c) normalnych z parametrami a_1, σ_1^2 i a_2, σ_2^2.
    d) jednostajnych na $[0, 1]$
    e) wykładniczych z parametrem λ

    Znaleźć rozkład zmiennej $Z = X + Y$.

11. Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na $[0, 1]$, zaś Y, zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na zbiorze $0, 1, 2, \ldots, n$. Znaleźć rozkład zmiennej $X + Y$.

12. Zmienne X, Y są niezależne, o rozkładzie wykładniczym z parametrem 1. Znaleźć rozkład zmiennej $X - Y$.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - seria 7

1. Zmienna X ma rozkład
$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = -1) = 1/4,\ \mathbb{P}(X = 0) = 1/2.$$
Wyznaczyć wartości oczekiwane zmiennych $\sin(\pi X)$, 2^X, $X(X-1)$.

2. Znaleźć wartości oczekiwane i wariancje rozkładów
   a) jednostajnego na odcinku $[a, b]$,
   b) Bernoulliego z parametrami n, p,
   c) wykładniczego z parametrem λ,
   d) geometrycznego z parametrem p.
   e) Poissona z parametrem λ,
   f) gaussowskiego z parametrami a, σ^2.

3. Roztrzepana sekretarka umieściła n listów w n uprzednio zaadresowanych kopertach. Niech X oznacza liczbę listów, które trafiły do właściwych kopert. Znaleźć wartość oczekiwaną i wariancję X.

4. Urna zawiera N kul w tym b kul białych. Losujemy bez zwracania n kul ($n \leqslant N$) i definiujemy zmienną losową X jako liczbę wylosowanych kul białych. Znaleźć wartość oczekiwaną i wariancję X.

5. Zmienna X ma rozkład jednostajny na odcinku $[0, 2\pi]$. Znaleźć wartość oczekiwaną zmiennej $Y = f(X)$, jeśli
   a) $f(x) = \sin x$,
   b) $f(x) = \cos^2 x$.
   c) $f(x) = -\ln x$
   d)
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \in [0, \pi/2] \\ \sin x & \text{dla } x \in (\pi/2, 3\pi/2] \\ 1 & \text{dla } x \in (3\pi/2, 2\pi] \end{cases}$$

6. Wykazać, że jeżeli $X \geqslant 0$ oraz $p > 0$, to
$$\mathbb{E}X^p = p \int_0^\infty t^{p-1}\mathbb{P}(X \geqslant t)dt$$

7. Niech X, Y będa ograniczonymi zmiennymi losowymi, takimi że dla $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}X^k = \mathbb{E}Y^k$. Wykazać, że X i Y mają ten sam rozkład. Co się zmieni jeśli odrzucimy założenie o ograniczoności zmiennych X, Y?

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - seria 8

1. W mieście X ginie 7 samochodów tygodniowo. Jakie jest w przybliżeniu prawdopodobieństwo, że jutro nie będzie kradzieży , przy założeniu stałej intensywności działania złodziei?

2. Wyznaczyć w przybliżeniu prawdopodobieństwo, że spośród 365 wybranych losowo osób, dokładnie 5 urodziło się 23 lub 24 kwietnia. Podać oszacowanie błędu. Zakładamy, że wszystkie daty urodzin sa jednakowo prawdopodobne.

3. Wykazać, że jeśli dla $p \geqslant 1$, $\|X\|_p \leqslant M$, to $\|X\|_\infty \leqslant M$.

4. Wykazać, że jeśli $X \in L_\infty$, to $\lim_{p\to\infty} \|X\|_p = \|X\|_\infty$.

5. Znaleźć momenty zmiennej o rozkładzie $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

6. Zmienna X ma rozkład μ, dany wzorem

$$\mu(A) = \frac{1}{3}|A \cap (-2, -1)| + \frac{1}{3}|A \cap (1, 2)| + \frac{1}{3}1_A(0).$$

   Dla $p \in [0, 1]$, wyznaczyć kwantyle rzędu p zmiennej x. Dla jakich p są one wyznaczone jednoznacznie?

7. **(Nierówność Bernsteina)** Wykazać, że jeśli $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ to niezależne zmienne Rademachera, zaś $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, to

$$\mathbb{P}(|\sum_{i=1}^n a_i\varepsilon_i| \geqslant t) \leqslant 2\exp\Big(-\frac{t^2}{2\sum_{i=1}^n a_i^2}\Big).$$

8. **(Nierówność Chinczyna)** W sytuacji z poprzedniego zadania, wykazać, że dla $p > 0$ istnieją stałe C_p, takie że

$$\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i a_i\|_p \leqslant C_p \|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i a_i\|_2$$

9. **(Wielomiany Bernsteina)** Niech f będzie funkcją ciągłą określoną na przedziale $[0, 1]$. Określmy ciąg wielomianów

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}.$$

   Wykazać, że B_n zbiegają jednostajnie do funkcji f.

10. Niech $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ będą niezależnymi zmiennymi Rademachera, zaś $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ spełniają $|a_i| \leqslant |b_i|$. Wykazać, że wówczas

$$\|a_1\varepsilon_1 + \ldots + a_n\varepsilon_n\|_p \leqslant \|b_1\varepsilon_1 + \ldots + b_n\varepsilon_n\|_p$$

    dla $p \geqslant 1$.

11. Niech $X_1, \ldots, X_n$ oraz $Y_1, \ldots, Y_n$ będą ciągami niezależnych symetrycznych zmiennych losowych, takimi że dla $t \geqslant 0$, $\mathbb{P}(|X_i| \geqslant t) \leqslant \mathbb{P}(|Y_i| \geqslant t)$. Wykazać, że wówczas

$$\|X_1 + \ldots + X_n\|_p \leqslant \|Y_1 + \ldots + Y_n\|_p.$$

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - seria 9

1. Dana jest przestrzeń probabilistyczna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Wykazać, że jeśli $\mathbb{P}$ jest rozkładem dyskretnym to zbieżność według prawdopodobieństwa na Ω jest równoważna zbieżności p.n.

2. Udowodnić, że granica względem prawdopodobieństwa jest wyznaczona jednoznacznie.

3. Wykazać, że jeśli dla pewnego ciągu ε_n o wyrazach dodatnich, zbiegającego monotonicznie do 0 mamy
$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon_n) < \infty,$$
to $X_n \to X$ p.n.

4. Niech $L^0 = L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią wszystkich zmiennych losowych (utożsamiamy zmienne równe p.n.) Zdefiniujmy
$$\rho(X,Y) = \mathbb{E}\left(\frac{|X-Y|}{1+|X-Y|}\right).$$
Wykazać, że (L^0, ρ) jest przestrzenią metryczną zupełną, w której zbieżność jest równoważna zbieżności według prawdopodobieństwa. Wykazać, że jeśli zbieżność według prawdopodobieństwa na Ω nie jest równoważna zbieżności p.n., to zbieżność p.n. nie jest metryzowalna.

5. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi całkowalnymi zmiennymi losowymi o wspólnym rozkładzie. Wykazać, że $\frac{1}{n}\max_{i\leqslant n}|X_i|$ zbiega do 0 prawie na pewno.

6. Niech X będzie dowolną zmienną losową. Zmienne X_n zdefiniowane są wzorem
$$X_n = X1_{\{X>n\}} + \frac{1}{n}.$$
Wykazać, że X_n zbiega p.n.

7. Rozważmy ciągi X_n, Y_n zmiennych losowych, takie że $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$. Wykazać, że $X_n+Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X+Y$, $X_nY_n \xrightarrow{\mathbb{P}} XY$ oraz, jeśli $\mathbb{P}(Y=0)=0$ to $X_n/Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X/Y$ (tam gdzie $Y_n = 0$ definiujemy wartość X_n/Y_n dowolnie).

8. Niech X będzie zmienna losową, zaś $X_n = XY_n$ dla pewnego ciągu zmiennych losowych (niekoniecznie niezależnych) o rozkładach $\mathbb{P}(Y_n = 1) = 1 - 1/n$, $\mathbb{P}(Y_n = 0) = 1/n$. Czy ciąg X_n musi zbiegać p.n.? Czy musi zbiegać według prawdopodobieństwa?

9. Niech zmienne losowe X_n będą określone na tej samej przestrzeni probabilistycznej oraz $X_n \sim \mathcal{N}(0, 1/n)$. Zbadać zbieżność ciągu X_n.

10. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach jednostajnych na przedziale $(-1, 1)$. Zbadać zbieżność ciągu $Y_n = X_1 \cdots X_n$.

11. Niech X_i będą niezależnymi zmiennymi losowymi (o wartościach rzeczywistych lub zespolonych). Rozważmy szereg potęgowy $\sum_{i=0}^{\infty} X_i z^i$. Wykazać, że promień zbieżności tego szeregu jest stały p.n.

12. Niech X_i będą niezależnymi zmiennymi losowymi. Wykazać, że ciąg
$$Y_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$$
jest albo zbieżny p.n., albo rozbieżny p.n. Co więcej, jeśli jest zbieżny p.n. to jego granica jest stała p.n.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - seria 10

1. Rodzinę zmiennych losowych $(X_i)_{i\in I}$ nazwiemy jednostajnie całkowalną, jeżeli
$$\lim_{C\to\infty}\sup_{i\in I}\mathbb{E}|X_i|\mathbf{1}_{\{|X_i|\geqslant C\}}=0.$$
Niech $X_1,X_2,\ldots$ będzie ciągiem zmiennych losowych. Wykazać, że $X_n\xrightarrow{L_p}X$ wtedy i tylko wtedy gdy $X_n\xrightarrow{\mathbb{P}}X$ oraz rodzina $|X_n|^p{}_{n\in\mathbf{N}}$ jest jednostajnie całkowalna.

2. Udowodnić nierówność Minkowskiego, $\|X+Y\|_p\leqslant\|X\|_p+\|Y\|_p$, gdzie $p\geqslant 1$, X,Y – dowolne zmienne losowe.

3. Wykazać, że jeżeli X_i są niezależnymi, symetrycznymi zmiennymi losowymi, to $\sum_{i=1}^{\infty}X_i$ jest zbieżny p.n. wtedy i tylko wtedy, gdy $\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{E}\frac{|X_i|^2}{1+|X_i|^2}<\infty$

4. Niech $X_1,Y_1,X_2,Y_2,\ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $\mathcal{U}(0,1)$, zaś $f\colon[0,1]\to[0,1]$ – funkcją mierzalną. Zdefiniujmy zmienne $Z_i=1_{\{f(X_i)\leqslant Y_i\}}$. Wykazać, że
$$\lim_{n\to\infty}\frac{Z_1+Z_2+\ldots+Z_n}{n}=\int_0^1 f(x)dx.$$

5. Niech $X_1,X_2,\ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o wspólnym rozkładzie z dystrybuantą F. Dla $t\in\mathbb{R}$ zdefiniujmy $F_n(t)=n^{-1}\sum_{i=1}^{n}1_{\{X_i\leqslant t\}}$.
a) Wykazać, że dla każdego $t\in\mathbb{R}$, $F_n(t)\to F(t)$ p.n. b) Wzmocnić punkt a) do $\mathbb{P}(\forall_{t\in\mathbb{R}}\,F_n(t)\to F(t))=1$.

6. Wyznaczyć granice

   a)
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^1\cdots\int_0^1\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}\,dx_1\ldots dx_n,$$
   b)
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\cdots\int_0^1 f(\sqrt[n]{x_1\cdots x_n})dx_1\ldots dx_n,$$
   gdzie $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą.

7. Niech $X_1,X_2,\ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o wspólnym rozkładzie, takim że $\mathbb{E}X_1=\infty$. Wykazać, że $n^{-1}(X_1+\ldots+X_n)=\infty$ p.n.

8. Niech $X_1,X_2,\ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie Poissona z parametrem λ. Zbadać zbieżność ciągów

   a)
$$\frac{X_1+\ldots+X_n}{X_1^2+\ldots+X_n^2},$$
   b)
$$\frac{X_1X_2+X_2X_3+\ldots+X_nX_{n+1}}{n}.$$

9. Dany jest ciąg $X_1,X_2,\ldots$ niezależnych zmiennych losowych o takim samym rozkładzie. Wykazać, że jeśli $\mathbb{E}|X_1|<\infty$, to
$$\frac{X_1+\ldots+X_n}{n}\to\mathbb{E}X_1$$
w L_1.

10. Dany jest ciąg zmiennych losowych N_n, taki że zmienna N_n ma rozkład $Poiss(n)$. Zbadać zbieżność w L_1 ciągu N_n/n.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - seria 11

1. Niech $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi Rademachera. Zbadać zbieżność p.n. ciągu
$$\frac{\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n}{n^p}$$
dla $p \in \mathbb{R}$.

2. Niech $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi Rademachera. Wykazać, że szereg $\sum_{i=1}^n a_i \varepsilon_i$ jest zbieżny p.n. wtedy i tylko wtedy, gdy $\sum_i a_i^2 < \infty$

3. Niech $X_1, \varepsilon, X_2, \varepsilon_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi, przy czym ε_i to zmienne Rademachera. Wykazać, że $\sum_i \varepsilon_i X_i$ jest zbieżny p.n. wtedy i tylko wtedy, gdy $\sum_i X_i^2 < \infty$ p.n.

4. Wykazać, że szereg $\sum_n n^{-1}\varepsilon_n$ (gdzie ε_n – niezależne zmienne Rademachera) jest zbieżny p.n. oraz że jego granica ma rozkład absolutnie ciągły względem miary Lebesgue'a.

5. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą zmiennymi niezależnymi o wspólnym rozkładzie i skończonej wariancji. Zdefiniujmy średnią i wariancję empiryczną jako
$$m_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}, \quad \sigma_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^n (X_k - m_n)^2.$$
Udowodnić, że $\mathbb{E}m_n = \mathbb{E}X_1$, $\mathbb{E}\sigma_n^2 = \mathrm{Var}X_1$ oraz, że $m_n \to \mathbb{E}X_1$, $\sigma_n^2 \to \mathrm{Var}X_1$ p.n.

6. Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne, przy czym zmienna X_i ma rozkład $Exp(i)$. Zbadać zbieżność wg prawdopodobieństwa ciągu
$$\frac{X_1 + 2X_2 + \ldots + nX_n}{n}.$$

7. Prawdopodobieństwo urodzenia chłopca wynosi $0,517$. Jakie jest w przybliżeniu prawdopodobieństwo, że wśród 1000 noworodków liczba chłopców nie przewyższy liczby dziewcząt?

8. Rzucamy symetryczną monetą aż do momentu, gdy wyrzucimy 200 orłów. Jakie jest w przybliżeniu prawdopodobieństwo, że wykonamy więcej niż 500 rzutów?

9. Do sklepu meblowego przywieziono 75 biurek I rodzaju oraz 150 biurek II rodzaju. Wiadomo, że biurka II rodzaju cieszą się dwukrotnie większym powodzeniem (tzn. prawdopodobieństwo tego, że klient kupujący biurko zdecyduje się na biurko II rodzaju, wynosi 2/3). Jakie jest przybliżone prawdopodobieństwo tego, że jeden z pierwszych 200 klientów kupujących biurka nie dostanie takiego modelu, jaki chce?

10. W pierwszej urnie znajdują się cztery kule białe i jedna czarna, w drugiej jedna kula biała i jedna czarna. Rzucamy monetą i jeśli wypadnie orzeł losujemy 100 razy (ze zwracaniem) kulę z urny pierwszej w przeciwnym wypadku 100 razy (także ze zwracaniem) z urny drugiej. Jakie jest w przybliżeniu prawdopodobieństwo, że kulę białą wyciągniemy więcej niż 70 razy?

11. Niech $X_1, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym z parametrem λ. Znaleźć rozkład $X_1 + \ldots + X_n$ oraz rozkład zmiennej $N_t = \sup\{n\colon X_1 + \ldots + X_n \leqslant t\}$.

Dodatkowe zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I

1. Zmienne X, Y są niezalezne i mają rozkład $\mathcal{N}(0,1)$. Wykazać, że zmienne $X+Y, X-Y$ są niezależne.

2. Podać przykład dwóch nieskorelowanych zmiennych losowych o rozkładzie $\mathcal{N}(0,1)$, które nie są niezależne.

3. Niech $X_1, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi o jednakowym rozkładzie z ciągłą dystrybuantą F. Dla $\omega \in \Omega$ niech $X_{k:n}(\omega)$ będzie ustawieniem liczb $X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)$ w porządku rosnącym. Znaleźć dystrybuantę $X_{k:n}$ oraz gęstość tej zmiennej (przy założeniu, że X_i mają gęstość) dla $k = 1, \ldots, n$.

4. Niech $U = \min(X, Y)$, $V = \max(X, Y) - \min(X, Y)$, gdzie X, Y są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $Exp(\lambda)$. Wykazać, że U i V są niezależne.

5. Zmienne X, Y są niezależne o wspólnym rozkładzie wykładniczym z parametrem 1. Wyznaczyć $\mathbb{P}(X \geqslant Y^2)$.

6. Pewien matematyk ma w kieszeniach po jednym pudełku zapałek. Ilekroć chce zapalić, sięga do losowej kieszeni. Jaka jest szansa, że gdy po raz pierwszy wyciągnie puste pudełko, w drugim będzie dokładnie k zapałek ($k = 0, 1, \ldots, m$, gdzie m jest liczbą zapałek w pełnym pudełku).