Seria 1. Zbieżność rozkładów

We wszystkich poniższych zadaniach (E, ρ) jest przestrzenią metryczną.

1. Wykazać, że dla dowolnych x, x_n, $\delta_{x_n} \Rightarrow \delta_x$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_n \to x$
2. Sprawdzić, że $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \delta_{\frac{k}{n}} \Rightarrow \lambda$, gdzie λ - miara Lebesgue'a na $(0, 1)$.
3. Niech X_n będą zmiennymi losowymi o wartościach w E, określonymi na tej samej przestrzeni probabilistycznej. Wykazać, że jeżeli $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, to $X_n \Rightarrow X$.
4. Podać przykład ciągu zmiennych losowych określonych na wspólnej przestrzeni probabilistycznej, które są zbieżne według rozkładu, ale nie są zbieżne według prawdopodobieństwa.
5. Niech X_n będą zmiennymi losowymi o wartościach w E, określonymi na tej samej przestrzeni probabilistycznej. Wykazać, że jeśli $X_n \Rightarrow c$, to $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c$. Czy musi zachodzić zbieżność p.n.?
6. Twierdzenie Scheffe'go Niech μ będzie miarą σ-skończoną, f_n, f funkcjami nieujemnymi i takimi, że miary $\nu_n(A) = \int_A f_n d\mu$, $\nu(A) = \int_A f d\mu$ są miarami probabilistycznymi. Niech $f_n \xrightarrow{p.w.} f$ względem miary μ. Udowodnić, że
$$\sup_A |\nu(A) - \nu_n(A)| \leqslant \int_\Omega |f - f_n| d\mu \to 0.$$
Wywnioskować stąd, że jeżeli $f_n \to f$ p.w. względem miary μ, to $\nu_n \Rightarrow \nu$.
7. Podać przykład rozkładów ciągłych μ, μ_n na $\mathbb{R}$ o gęstościach odp. f_n, f, takich że $\mu_n \Rightarrow \mu$, ale nie jest prawdą, że $f_n \to f$ p.w. względem miary Lebesgue'a.
8. Niech $S \subseteq E$ będzie zbiorem przeliczalnym, zaś μ, μ_n miarami probabilistycznymi skupionymi na S.
   a) Wykazać, że jeżeli $\mu_n(\{x\}) \to \mu(\{x\})$ dla każdego $x \in S$, to $\mu_n \Rightarrow \mu$.
   b) Wykazać, że jeżeli każdy punkt zbioru S jest izolowany, to implikację z punktu a) można odwrócić oraz że bez tego założenia nie jest to prawdą.
   c) Czy z istnienia granic $\lim_{n\to\infty} \mu_n(\{x\})$ dla każdego $x \in S$ wynika, że ciąg μ_n zbiega słabo?
9. Udowodnić, że jeśli $X_n \Rightarrow X$ oraz $\sup_n \mathbb{E}|X_n|^p < \infty$ wówczas $\mathbb{E}|X|^p < \infty$, ale niekoniecznie $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}|X_n|^p = \mathbb{E}|X|^p$. Tak jest jeśli $\sup_n \mathbb{E}|X_n|^{p+\epsilon} < \infty$.
10. Udowodnić, że jeśli $X_n \Rightarrow X$, $Y_n \Rightarrow Y$ oraz przy każdym n zmienne X_n, Y_n są niezależne i X jest niezależne od Y, to $(X_n, Y_n) \Rightarrow (X, Y)$.

Seria 2. Zbieżność rozkładów

1. Mamy dany okrąg $S^1 = \{z \in C : |z| = 1\}$. Wybieramy liczbę $\alpha \in S^1$, która nie spełnia równania $\alpha^k = 1$ dla żadnego $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$, oraz $I \subseteq S^1$, borelowskiego definiujemy
$$\mu_n(I) := \frac{|0 \leqslant k \leqslant n-1 : \alpha^k \in I|}{n}.$$
Pokaż, że $\mu_n \Rightarrow \mu$, gdzie μ jest unormowaną miarą Lebesgue'a na S^1 (jako rozmaitości).

2. Udowodnić, że dla rzeczywistych zmiennych losowych X_n, X zachodzi równoważnosć $X_n \Rightarrow X$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieją zmienne $X_n^{'}, X^{'}$ takie, że $X_n \sim X_n^{'}$, $X \sim X^{'}$ oraz $X_n^{'} \overset{p.n.}{\rightarrow} X^{'}$.

3. Wykazać, że jeżeli X_n, Y_n, Z_n są określone na tej samej przestrzeni probabilistycznej oraz $X_n \Rightarrow X$, $Y_n \Rightarrow a$, $Z_n \Rightarrow b$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, to $X_nY_n + Z_n \Rightarrow aX + b$.

4. Wykazać, że jeżeli $X_nY_n \Rightarrow X$, $Y_n \Rightarrow 0$ oraz f jest funkcją różniczkowalną w zerze, to $X_n(f(Y_n) - f(0)) \Rightarrow f'(0)X$.

5. Znaleźć warunki konieczne i dostateczne na to, by poniższe rodziny miar były ciasne

   a) $\{\mathcal{U}(a, b)\}_{(a,b)\in I}$

   b) $\{Exp(\lambda)\}_{\lambda\in I}$

   c) $\{\mathcal{N}(a, \sigma^2)\}_{(a,\sigma^2)\in I}$.

6. Wykazać, że ciąg $\mathcal{N}(a_n, \sigma_n^2)$ jest słabo zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy istnieją skończone granice $a = \lim_n a_n$ $\sigma^2 = \lim_n \sigma_n^2$ i wówczas $\mathcal{N}(a_n, \sigma_n^2) \Rightarrow \mathcal{N}(a, \sigma^2)$.

7. Niech X_n będzie pierwszą współrzędną wektora losowego o rozkładzie jednostajnym na sferze (odp. kuli) w $\mathbb{R}^n$ o środku 0 i promieniu $\sqrt{n}$. Zbadać słabą zbieżność ciągu X_n.

8. Niech X_i będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na $(0, 1)$ zbadać słabą zbiezność ciągu $n \min(X_1, \ldots, X_n)$.

9. Wykazać, że jeżeli ciąg dystrybuant jest zbieżny punktowo do dystrybuanty ciągłej, to zbieżność jest jednostajna.

10. Pokazać, że
$$d(\mu, \nu) = \inf\{\epsilon : F_\mu(t) < F_\nu(t + \epsilon) + \epsilon, F_\nu(t) < F_\mu(t + \epsilon) + \epsilon, \forall t \in \mathbb{R}\}$$
definiuje odległość w rozkładach na $\mathbb{R}$, która zadaje słabą zbieżność.

11. Niech (E, ρ) będzie przestrzenią polską. Wykazać, że
$$d_{BL}(\mu, \nu) = \sup\left\{\left|\int_E f d\mu - \int_E f d\nu\right| : f \colon E \to [-1, 1], f \text{ jest 1-Lipschitzowska}\right\}$$
definiuje odległość, która zadaje słabą zbieżność.

12. Załóżmy, że X jest ograniczoną zmienną losową, zaś X_n ciągiem zmiennych losowych takim, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$ $\mathbb{E}X_n^k \to \mathbb{E}X$. Wykazać, że wówczas $X_n \Rightarrow X$.

Seria 3. Funkcje charakterystyczne

1. Obliczyć funkcje charakterystyczne podstawowych rozkładów
   a) dyskretnych,
   b) ciągłych.

2. Pokazać, że kombinacje wypukłe funkcji charakterystycznych są funkcjami charakterystycznymi.

3. Udowodnić, że jeśli funkcja charakterystyczna zmiennej losowej ma drugą pochodną w zerze, to $\mathbb{E}X^2 < \infty$.

4. Wiadomo, że ϕ jest funkcją charakterystyczną pewnej zmiennej losowej X. Czy funkcjami charakterystycznymi są : ϕ^2, $\mathrm{Re}\phi$, $|\phi|^2$, $|\phi|$?

5. Niech $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi Rademachera. Przy pomocy funkcji charakterystycznych sprawdzić, że zmienna losowa $\sum_{i\geqslant 1} 2^{-i}\varepsilon_i$ ma rozkład jednostajny na przedziale $[-1, 1]$.

6. Sprawdzić, że splot rozkładów normalnych jest normalny.

7. Niech X będzie zmienną losową taką, że $P(X \in \mathbb{Z}) = 1$. Wykazać, że dla każdego $n \in \mathbb{Z}$,
$$P(X = n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-itn}\phi_X(t)dt.$$

8. Zmienne losowe X, Y, U, V są niezależne o rozkładzie $\mathcal{N}(0, 1)$. Obliczyć funkcję charakterystyczną zmiennej a) XY, b) X^2, c) X/Y, d) $\frac{1}{2}(X^2 - Y^2)$ e) $XY + UV$.

9. **Twierdzenie Riemanna-Lebesgue'a** Udowodnić, że jeśli X jest zmienną losową o rozkładzie ciągłym, to $\phi_X(t) \to 0$, gdy $|t| \to \infty$.

10. Czy funkcja $\frac{2}{1+e^{x^2}}$ jest funkcją charakterystyczną pewnego rozkładu?

11. Udowodnić, że $\phi(t) = e^{-|t|^\alpha}$ nie jest funkcją charakterystyczną dla $\alpha > 2$.

12. Wykazać, że dla $0 < \alpha \leqslant 2$ $\phi(t) = e^{-|t|^\alpha}$ jest funkcją charakterystyczną pewnego rozkładu.

Seria 4. Funkcje charakterystyczne, rozkłady gaussowskie, CLT

1. Dane są niezależne zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots,$ o wspólnym rozkładzie z wartością oczekiwaną równą 0 i dodatnią wariancją. Wyznaczyć w zależności od $a, \alpha \in \mathbb{R}$
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1+\ldots+X_n}{n^\alpha}\right| > a\right).$$

2. Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne, mają ten sam rozkład, $\mathbb{E}X_1 = 0$, $\mathrm{Var}(X) = 1$. Zbadać zbieżność względem rozkładu ciągów
$$U_n = \frac{\sqrt{n}(X_1+\ldots+X_n)}{X_1^2+\ldots+X_n^2}, \quad V_n = \frac{X_1+\ldots+X_n}{\sqrt{X_1^2+\ldots+X_n^2}}.$$

3. Powiemy, że układ trójkątny $(X_{n,k})$ spełnia warunek Lyapunowa,
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \mathbb{E}|X_{n,k} - \mathbb{E}X_{n,k}|^{2+\delta} = 0.$$
Wykazać, że warunek Lyapunowa implikuje warunek Lindeberga.

4. Rzucono 1000 razy kostką. Oszacować prawdopodobieństwo, że suma wyrzuconych oczek będzie zawarta między 3410 a 3590.

5. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi, takimi, że
$$\mathbb{P}(X_n = \pm 1) = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{n^2}), \quad \mathbb{P}(X_n = \pm n) = \frac{1}{2n^2}.$$
Wykazać, że
$$\frac{X_1+\ldots+X_n}{\sqrt{n}} \Rightarrow \mathcal{N}(0,1),$$
ale $\mathrm{Var}(X_n) \to 2$.

6. Niech X będzie całkowalną z kwadratem zmienną losową, taką, że $X \sim \frac{Y+Z}{\sqrt{2}}$, gdzie Y, Z - niezależne kopie X. Wykazać, że X ma rozkład $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

7. Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne oraz $\mathbb{P}(X_k = k) = \mathbb{P}(X_k = -k) = 1/2$. Niech $s_n^2 = \sum_{k=1}^n \mathrm{Var}(X_k)$. Zbadać słabą zbieżność ciągu
$$\frac{X_1+\ldots+X_n}{s_n}.$$

8. Zmienne losowe $X_1, , X_2, \ldots$ są niezależne i mają rozkłady $U(-a_k, a_k)$. Zbadać zbieżność ciągu
$$\frac{X_1+\ldots+X_n}{s_n}.$$
jeśli
   (a) ciąg (a_k) jest ograniczony i $s_n \to \infty$.
   (b) $\sum_k a_k^2 < \infty$.

9. Zmienna losowa X_λ ma rozkład Poissona z parametrem λ. Zbadać słabą zbieżność $(X_\lambda - \lambda)/\sqrt{\lambda}$ przy $\lambda \to \infty$.

10. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą zmiennymi i.i.d o średniej zero i wariancji σ^2, zaś f funkcją różniczkowalną w 0. Wykazać, że $\sqrt{n}(f(Y_n) - f(0))$ zbiega słabo do rozkładu $\mathcal{N}(0, \sigma^2 f'(0)^2)$, gdzie

$$Y_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}.$$

11. ($*$) Niech $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Wykazać, że dla dowolnej funkcji gładkiej o zwartym nośniku $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, zachodzi

$$\mathrm{Var} f(X) \leqslant \mathbb{E}|f'(X)|^2.$$

Seria 5. Warunkowa wartość oczekiwana

1. Rzucamy dwa razy kostką. Niech X, Y oznacza liczbę oczek wyrzuconą odp. w pierwszym i drugim rzucie. Obliczyć

   a) $\mathbb{E}(X|X+Y)$,

   b) $\mathbb{E}(X|XY=3)$, $\mathbb{E}(X|XY=8)$, $\mathbb{E}(X|XY=36)$.

2. Wektor losowy (X, Y) ma rozkład jednostajny na kole o środku $(0,0)$ i promieniu 1. Obliczyć $\mathbb{E}(X^2|Y=y)$, $\mathbb{E}(X^2+Y^2+2Y|X=x)$,

3. Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na $[0,1]$. Niech $U = \min(X, Y)$, $V = \max(X, Y)$. Wyznaczyć rozkłady warunkowe U względem V i V względem U.

4. Niech X_k oznacza liczbę sukcesów w pierwszych k próbach nieskończonego schematu Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu równym p. Wyznaczyć $\mathbb{E}(X_k|X_l)$ dla $k, l \geqslant 1$

5. Znaleźć rozkład warunkowy X po warunkiem $X+Y=t$, gdzie X, Y są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie a) $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$, b) $Exp(\lambda)$, c) $Poiss(\lambda)$.

6. Niech (X, Y) będzie wektorem losowym o gęstości $g(x,y) = 8xy1_{\{x,y\geqslant 0, x^2+y^2\leqslant 1\}}(x,y)$. Znaleźć $\mathbb{E}(X|Y=y)$.

7. Niech (X, Y) będzie wektorem gaussowskim o macierzy kowariancji Q. Załóżmy, że $\det Q \neq 0$. Wyznaczyć $\mathbb{E}(Y|X)$.

8. X, Y są niezależnymi zmiennymi o rozkładzie $\mathcal{N}(0,1)$. Znaleźć $\mathbb{E}(X^2+Y^2|X+Y)$.

9. Udowodnić, że całkowalna zmienna losowa X ma rozkład symetryczny wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbb{E}(X|X^2) = 0$.

10. Losujemy liczbę Λ z przedziału $(0,1)$, a następnie liczbę X z rozkładu $Exp(\Lambda)$. Wyznaczyć gęstość zmiennych (Λ, X) oraz X.

11. Niech $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ będą σ-ciałami, zaś X zmienną losową, taką że $\mathbb{E}[\mathbb{E}(X|\mathcal{F})]^2 = \mathbb{E}[\mathbb{E}(X|\mathcal{G})]^2$. Wykazać, że $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) = \mathbb{E}(X|\mathcal{G})$.

12. Zmienne X, Y sa całkowalne z kwadratem, zaś $\mathcal{G}$ jest σ-ciałem. Wykazać, że $\mathbb{E}[X\mathbb{E}(Y|\mathcal{G})] = \mathbb{E}[Y\mathbb{E}(X|\mathcal{G})]$.

Seria 6. Filtracje, momenty stopu, martyngały

1. Niech τ_1, τ_2 będą momentami stopu. Udowodnić, że momentami stopu są także $\tau_1 \wedge \tau_2$ oraz $\tau_1 \vee \tau_2$. Czy są momentami stopu $\tau_1 + 1$, $\tau_1 - 1$?

2. Niech $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{N}}$ będzie filtracją, zaś $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ ciągiem zmiennych losowych, adaptowalnym do tej filtracji. Niech τ oznacza moment pierwszej wizyty ciągu X_t w zbiorze borelowskim B. Wykazać, że τ jest momentem zatrzymania.

3. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o średniej 0. Zdefiniujmy $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ oraz $Z_n = S_n^2 - \mathrm{Var} S_n$. Wykazać, że $(Z_n, \sigma(X_1, \ldots, X_n))$ jest martyngałem.

4. Niech X_n będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie średniej 0 i skończonej wariancji, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. Zdefiniujmy

$$Z_0 = 0, \quad Z_n = \sum_{k=1}^{n} X_{k-1} X_k$$

   Udowodnić, że $(Z_n, \mathcal{F}_n)$ jest martyngałem.

5. Niech ξ_i ($i = 1, 2, \ldots$) będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $\Pr(\xi_i = 1) = p$, $\Pr(\xi_i = -1) = q = 1 - p$. Niech $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ oraz

$$Z_n = \left(\frac{q}{p}\right)^{\xi_1 + \ldots + \xi_n}$$

   Wykazać, że ciąg $(Z_n, \mathcal{F}_n)$ jest martyngałem.

6. Niech X_n będzie ciągiem zmiennych losowych, adaptowanych do filtracji $\mathcal{F}_n$. Załóżmy, że $X_0 = 0$. Wykazać, że $(X_n, \mathcal{F}_n)$ jest martyngałem, wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego ograniczonego momentu stopu τ, $\mathbb{E} X_\tau = 0$.

7. Rozważmy martyngał X_n, całkowalny z kwadratem, tzn. $\mathbb{E} X_n^2 < \infty$ dla każdego n. Zdefiniujmy przyrosty martyngałowe wzorem

$$D_n = X_n - X_{n-1}.$$

   Wykazać, że zmienne D_n są parami nieskorelowane.

8. Studenta X czeka egzamin. Zna odpowiedź na 10 z 30 pytań, losowanych przez kolejno zdających studentów. Studenci, wychodząc z egzaminu, informują czekających, jakie pytania otrzymali. Jaką strategię powinien przyjąć X, żeby mieć jak największą szansę na zdanie egzaminu?

9. Niech $S_n = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i$, gdzie $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots$ - niezależne zmienne Rademachera. Niech $\tau = \inf\{n \colon S_n = 1\}$. Wykazać, że $\mathbb{E}\tau = \infty$.

Seria 7. Martyngały (c.d.), łańcuchy Markowa

1. Rzucamy kostką tak długo, aż otrzymamy wszystkie oczka. Znaleźć wartość średnią sumy wyrzuconych oczek.

2. Gracze A i B, startując z kapitałów odp. a, b złotych, grają w następującą grę. Rzucają (niekoniecznie symetryczną) monetą. Jeśli wypadnie orzeł, gracz A otrzymuje złotówkę od gracza B, jeśli reszka – odwrotnie. Grają tak długo, aż jeden z nich zbankrutuje. Obliczyć prawdopodobieństwo wygranej gracza A, korzystając z teorii martyngałów.

3. W urnie znajduje się b kul białych i c czarnych. W kolejnych krokach losujemy ze zwracaniem urnę z kuli i dokładamy do urny jeszcze a kul tego samego koloru, co wylosowana. Niech X_n oznacza liczbę białych kul w urnie po n-tym losowaniu. Wykazać, że $\frac{X_n}{b+c+na}$ jest martyngałem względem naturalnej filtracji.

4. Niech $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi Rademachera. Niech ponadto $\mathcal{F}_n = \sigma(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ oraz
$$Z_n = e^{a(\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_n)-na^2/2}.$$
Wykazać, że Z_n jest nadmartyngałem. Zbadać jego zbieżność prawie na pewno i w L_1.

5. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą nieujemnymi zmiennymi i.i.d. o średniej 1. Zbadać zbieżność ciągu $Y_n = X_1 X_2 \cdots X_n$ p.n. i w L_1.

6. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o średniej zero. Zdefiniujmy $Y_n = n^{-1}(X_1 + \ldots + X_n)$. Wykazać, że rodzina $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ jest jednostajnie całkowalna.

7. W pojemniku znajduje się m cząstek. W każdej sekundzie każda z cząstek, niezależnie od pozostałych może albo zniknąć (z prawdopodobieństwem 2/3), albo podzielić się na trzy cząstki. Wykazać, że z prawdopodobieństwem 1 po pewnym czasie w pojemniku nie będzie żadnej cząstki.

8. Niech (ε_n) będzie ciągiem niezależnych zmiennych Rademachera. Czy a) $X_n = U_n U_{n+1}$, b) $Y_n = (U_n + U_{n+1})/2$ są łańcuchami Markowa?

9. Podać przykład łańcucha Markowa $(X_n)_{n\geqslant 0}$ i funkcji f, takich że $(f(X_n))_{n\geqslant 0}$ nie jest łańcuchem Markowa.

10. Niech (X_n) będzie łańcuchem Markowa na przestrzeni stanów S i o macierzy przejścia P. Funkcję $f\colon S \to \mathbb{R}$ nazwiemy harmoniczną, jeśli $f(i) = \sum_{j\in S} p_{ij} f(j)$ dla każdego $i \in S$. Wykazać, że jeśli S jest skończona, zaś f jest harmoniczna, to $(f(X_n), \sigma(X_0, \ldots, X_n))$ jest martyngałem.

11. Udowodnić, że łańcuch Markowa o skończonej liczbie stanów nie może składać się tylko ze stanów chwilowych. Czy jest to prawda dla łańcuchów o nieskończonej liczbie stanów?

Seria 8. Łańcuchy Markowa

1. Niech X_n będzie błądzeniem przypadkowym na prostej, tzn.

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x+1 | X_n = x) = p, \quad \mathbb{P}(X_{n+1} = x-1 | X_n = x) = q = 1-p.$$

   Wykazać, że 0 jest stanem powracalnym, wtedy i tylko wtedy, gdy $p = 1/2$.

2. Niech $Y_n = (X_n^1, X_n^2, \ldots, X_n^d)$ będzie symetrycznym błądzeniem przypadkowym w $\mathbb{Z}^d$ (czyli $X_n^{(i)}$ to niezależne błądzenia na prostej z $p = 1/2$). Dla jakich wartości d,Y_n jest powracalnym łańcuchem Markowa?

3. Zmodyfikujmy błądzenie z poprzedniego zadania . Niech $X_{n+1} = X_n + J_{n+1}$, gdzie J_n – niezależne zmienne losowe o rozkładzie $\mathbb{P}(J_n = \pm e_k) = \frac{1}{2d}$, gdzie $e_1, \ldots, e_d$ – wersory w $\mathbb{R}^d$. Dla jakich d błądzenie to jest powracalne?

4. Zmienne $Y_0, Y_1, Y_2, \ldots$ są niezależne i mają ten sam rozkład geometryczny z parametrem $\frac{1}{2}$. Ciąg zmiennych $X_1, X_2, \ldots$ jest określony następująco: $X_0 \equiv 1$ p.n., a dla $n \geqslant 0$,

$$X_{n+1} = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } Y_n = 1, \\ X_n Y_n & \text{jeśli } Y_n \neq 1. \end{cases}$$

   a) Wykazać, że $(X_n)_n$ jest nieprzywiedlnym łańcuchem Markowa.
   b) Czy łańcuch ten jest okresowy?
   c) Udowodnić, że wszystkie stany są powracające.
   d) Niech N będzie dużą liczbą naturalną. Wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że X_N nie przekracza 3.

5. Rzucamy kostką tak długo, aż pojawi się ciąg 15 lub 55. Jakie jest prawdopodobieństwo, że ciąg 16 pojawi się wcześniej?

6. Rzucamy symetryczną monetą, aż do momentu, gdy wyrzucimy pod rząd cztery orły. Obliczyć wartość oczekiwaną liczby wykonanych rzutów.

7. Macierz przejścia łańcuch Markowa $(X_n)_{n \geqslant 0}$ na przestrzeni $E = \{1, 2, 3, 4\}$ zadana jest następująco:

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Zakładając, że $X_0 = 1$ p.n., obliczyć prawdopodobieństwo, że X_n będzie w stanie 2 przed stanem 4.
   (b) Zakładając, że $X_0 = 3$ p.n., obliczyć wartość oczekiwaną czasu dojścia do stanu 2
   (c) Wyznaczyć rozkład stacjonarny
   (d) Czy łańcuch jest okresowy? Czy jest nieprzywiedlny?

8. W pudełku A jest 6 kul ponumerowanych od 1 do 6, w pudełku B – ani jednej. Wykonano 10000000 rzutów kostką i po każdym rzucie przekładano kulę z wylosowanym numerem do drugiego pudełka. Jaka jest w przybliżeniu szansa, że pudełko B jest puste?