Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - seria 1

1. Dana jest przestrzeń probabilistyczna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, gdzie Ω jest zbiorem przeliczalnym oraz $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$. Udowodnij, że istnieją liczby $p_\omega \geqslant 0$, takie że $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega$ dla wszystkich $A \in \mathcal{F}$.

2. Udowodnij, że każde nieskończone σ-ciało jest nieprzeliczalne.

3. Klasa liczy 15 uczniów, na każdej lekcji do odpowiedzi losowany jest jeden uczeń. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w ciągu 16 lekcji każdy uczeń zostanie przepytany.

4. Roztrzepana sekretarka rozmieściła losowo N listów w N uprzednio zaadresowanych kopertach. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że dokładnie k listów trafiło do właściwej koperty.

5. (Igła Buffona) Igłę o długości l rzucono na podłogę z desek o szerokości $a \leqslant l$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że igła przetnie krawędź deski?

6. Z przedziału $[0,1]$ wybrano losowo liczbę x. Jakie jest prawdopodobieństwo, że x jest niewymierna?

7. W n rozróżnialnych urnach rozmieszczono losowo n rozróżnialnych kul. Jakie jest prawdopodobieństwo, że dokładnie jedna urna zostanie pusta?

8. Na przyjęciu dla n osób podano k identycznych (nierozróżnialnych) ciastek. Wszystkie ciastka zostały zjedzone. Jakie jest prawdopodobieńtwo, że dokładnie jedna osoba nie zjadła ani jednego ciastka?

9. Udowodnij, że następujące pseudometryki na $\mathcal{F}$ spełniają warunek trójkąta:

$$\begin{aligned} \rho_1(A,B) &= \mathbb{P}(A\Delta B) \\ \rho_2(A,B) &= \begin{cases} \frac{\mathbb{P}(A\Delta B)}{\mathbb{P}(A\cup B)} & \text{jeśli } \mathbb{P}(A\cup B) > 0 \\ 0 & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases} \end{aligned}$$

10. Pan X spotyka się z paniami A i B, do których dojeżdża autobusami odpowiednio linii 1 i 2. Gdy czuje się samotny, wychodzi z domu, udaje się na przystanek i wsiada w pierwszy autobus, jaki się pojawi. Oba autobusy kursują przez całą dobę co godzinę, a pan X ma napady samotności codziennie w losowym momencie czasu, a jednak pani A czyni mu wyrzuty, że odwiedza ją zbyt rzadko, zaś pani B ma wrażenie, że pan X jej się narzuca. Jak to wyjaśnić?

11. Z przedziału $[0,1]$ wybrano losowo dwa punkty, które podzieliły go na trzy odcinki. Jakie jest prawdopodobieństwo, że z tych odcinków da się zbudować trójkąt?

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - seria 2

1. W kolejce po bilety na mecz stoi n kibiców. Każdy z nich nosi szalik w kolorze A lub B. Załóżmy, ze wszystkie możliwe układy kolorów sa jednakowo prawdopodobne. Jakie jest prawdopodobieństwo, ze żadne dwie kolejne osoby nie maja szalików w tym samym kolorze? Jakie jest prawdopodobienństwo, ze żadne dwie kolejne osoby nie maja szalików w kolorze A?

2. **(Paradoks Bertranda)** Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrana cięciwa okręgu ma długość większą niż bok trójkąta równobocznego wpisanego w ten okrąg?

3. Miasto zbudowane jest na planie kwadratu i poszatkowane ulicami biegnącymi ze wschodu na zachód i z północy na południe, przy czym ulic każdego typu jest po $N = 2n + 1$. Kierowca jedzie z południowo-zachodniego wierzchołka miasta na kraniec północno-wschodni, wybierając losowo jedną z najkrótszych dróg. Oblicz prawdopodobieństwo, że kierowca przejedzie przez środek miasta.

4. Z jeziora wyłowiono 200 ryb, oznakowano je i wpuszczono do wody. Po pewnym czasie wyłowiono 100 ryb, a wśród nich było 8 oznakowanych. Za rozsądną ocenę liczby ryb w jeziorze można uznać liczbę ryb, dla której zrealizowało się zdarzenie o największym prawdopodobieństwie. Jaka to liczba?

5. Zdarzenia A, B, C spełniają $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B), \mathbb{P}(C) \geqslant 2/3$ oraz $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0$. Co można powiedzieć o $\mathbb{P}(A)$?

6. Każdy z n chromosomów w komórce wystawionej na promieniowanie dzieli się na dwie części różnych typów (powiedzmy typu A i typu B). Części te następnie ponownie łączą się w pary, przy czym możliwe jest także połączenie w parę 2 części tego samego typu. Jakie jest prawdopodobieństwo, że części te połączą się w takich samych kombinacjach, jak przed podziałem? Jakie jest prawdopodobieństwo, że po połączeniu każda z par będzie się składać z części różnych typów?

7. **(Paradoks kawalera de Méré)** Co jest bardziej prawdopodobne: wyrzucenie co najmniej jednej jedynki przy rzucie 4 kostkami czy co najmniej raz obu jedynek przy 24 rzutach 2 kostkami?

8. Na nieskończoną szachownicę o boku a rzuca się monetę średnicy $2r < a$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że a) moneta znajdzie się całkowicie we wnętrzu jednego z pól b) przetnie się z co najwyżej jednym bokiem szachownicy?

9. W kole o promieniu 1 wyróżniono 1025 punktów. Udowodnić, że odległość między pewnymi dwoma punktami nie przekracza 1/31.

10. $(*)$ Dane są liczby $k, n \in \mathbb{N}$ $(k > 1)$, spełniające nierówność $n < 2^{k/2}$. Udowodnić, że liczby ze zbioru $A_n = \{1, \ldots, n\}$ można pokolorować dwoma kolorami w ten sposób, by w każdym ciągu arytmetycznym długości k, o elementach ze zbioru A_n występowały liczby w obu kolorach.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - seria 3

1. (Paradoks Simpsona) Populacja miasta A składa się w 20% z Krakowiaków i w 80% z Górali zaś populacja miasta B w 80% z Krakowiaków i w 20% z Górali. 10% Krakowiaków i 30% Górali zamieszkałych w mieście A ma rude włosy. Z kolei w mieście B rude włosy posiada 20% Krakowiaków i 40% Górali. W którym mieście jest większy odsetek mieszkańców z rudymi włosami?

2. Gracz dostał 13 kart z 52, obejrzał 8 z nich i stwierdził, że nie ma asa. Jaka jest szansa, że w ogóle nie ma asa?

3. Wybrano losowo małżeństwo z dwojgiem dzieci i okazało się, że a) ich starsze dziecko to chłopiec b) mają syna. Jakie jest prawdopodobieństwo, że mają dwóch synów?

4. Wybrano losowo rodzinę z dwojgiem dzieci i okazało się, że jedno z dzieci ma na drugie imię Franek. Jaka jest szansa, że drugie dziecko jest chłopcem (nie wykluczamy, że też ma na drugie imię Franek)?

5. W teleturnieju gracz ma do wyboru trzy koperty, dwie puste, jedną z nagrodą pieniężną. Gdy dokona wyboru, prowadzący otwiera jedną z odrzuconych kopert i pokazuje, że jest pusta. Gracz może w tym momencie zatrzymać wybraną wcześniej kopertę lub zmienić wybór i wziąć pozostałą z odrzuconych wcześniej kopert. Która strategia jest lepsza?

6. Na loterii jest 10 losów wygrywających, 100 przegrywających i 1000 uprawniających do kolejnego losowania. Jakie jest prawdopodobieństwo wygrania?

7. **(Zagadnienie ruiny)** Dwóch graczy (nazwijmy ich A i B) gra w „orła i reszkę", rzucając (niekoniecznie symetryczną) monetą. Gracz A zaczyna z kapitałem a zł, gracz B - z kapitałem b zł. W każdej kolejce stawką jest 1 zł, gracz A wygrywa, gdy wypadnie orzeł (powiedzmy z prawdopodobieństwem p). Gra toczy się, dopóki jeden z graczy nie zbankrutuje. Obliczyć prawdopodobieństwo ruiny gracza A.

8. W pierwszej urnie są 3 kule białe i 2 czarne, w drugiej urnie są 4 czarne i 1 biała. Rzucamy kostką. Jeśli wypadnie mniej niż 5 oczek, to losujemy kulę z pierwszej urny, w przeciwnym razie z drugiej. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej?

9. (**Schemat urnowy Polya**) W urnie mamy b kul białych i c czarnych. Powtarzamy n razy następującą operację: losujemy kulę z urny, następnie wkładamy ją z powrotem, dokładając dodatkowo jeszcze a kul tego samego koloru.
   - Jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosowano dokładnie k razy kulę czarną?
   - Wykazać, że prawdopodobieństwo wylosowania za n-tym razem kuli białej wynosi $\frac{b}{b+c}$.

10. Wśród n monet k jest asymetrycznych, orzeł wypada na nich z prawdopodobieństwem 1/3. W wyniku rzutu wybraną losowo monetą wypadł orzeł. Jakie jest prawdopodobieństwo, że ta moneta jest asymetryczna?

11. Test na chorobę X daje wynik pozytywny u wszystkich chorych oraz fałszywy wynik pozytywny u 1% zdrowych. Wiadomo, że na chorobę X cierpi 10% populacji. U pacjenta test dał wynik pozytywny, jakie jest prawdopodobieństwo, że pacjent jest chory?

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - seria 4

1. W mieście działają dwa przedsiębiorstwa taksówkowe: Zielone Taxi (85% samochodów) i Niebieskie Taxi (15%). Świadek nocnego wypadku zakończonego ucieczka kierowcy twierdzi, ze samochód był niebieski. Eksperymenty wykazały, ze świadek rozpoznaje kolor poprawnie w 80% przypadków, a myli się w 20% przypadków. Jaka jest szansa, ze w wypadku uczestniczyła niebieska taksówka?

2. Podać przykład zdarzeń A, B, C, które są parami niezależne, ale nie są niezależne.

3. Jakie jest prawdopodobieństwo otrzymania parzystej liczby sukcesów w ciągu n prób Bernoulliego o prawdopodobieństwie sukcesu równym p?

4. Dwaj gracze rzucają po n razy symetryczną monetą. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wyrzucą tę samą liczbę orłów?

5. Rzucamy n razy symetryczną monetą. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wyrzucimy łącznie więcej orłów niż reszek?

6. Bolek i Lolek grają w szachy do momentu gdy jeden z nich wygra dwie partie pod rząd. Jakie jest prawdopodobieństwo, ze wygra Lolek, jeśli prawdopodobieństwo wygrania przez niego pojedynczej partii wynosi p? Zakładamy, że wyniki poszczególnych partii są niezależne.

7. W sytuacji z poprzedniego zadania, przyjmijmy, że prawdopodobieństwo, że Bolek wygra pierwszą partię wynosi 1/2, ale począwszy od drugiej partii, prawdopodobieństwo wygranej Bolka zależy od tego, czy wygrał poprzednią partię. Jeśli dopiero co odniósł sukces, czuje się pewnie i wygrywa z prawdopodobieństwem 3/4, jeśli poprzednia partia zakończyła się jego przegraną, zżera go trema i wygrywa z mniejszym prawdopodobieństwem, równym 1/4. Jakie jest prawdopodobieństwo, że Bolek wygra całą rozgrywkę?

8. Jakie jest prawdopodobieństwo, że przy wielokrotnym rzucaniu parą kostek sześciennych, suma oczek 2 wypadnie przed sumą oczek 4?

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - seria 5

1. Owad składa k jajeczek z prawdopodobieństwem $\lambda^k e^{-\lambda}/k!$ $(\lambda > 0)$. Potomek wylęga się z jaja z prawdopodobieństwem p. Znaleźć prawdopodobieństwo, że liczba potomków będzie równa l.

2. Rzucamy n razy symetryczną monetą. Niech O_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, oznacza zdarzenie "w i-tym rzucie wypadł orzeł", zaś A zdarzenie "łącznie wypadła parzysta liczba orłów". Czy zdarzenie A jest niezależne od zdarzenia O_i przy ustalonym i? Czy zdarzenia $A, O_1, \ldots, O_n$ są łącznie niezależne?

3. Zdarzenia A, B są niezależne oraz $A \cup B = \Omega$. Wykazać, że $\mathbb{P}(A) = 1$ lub $\mathbb{P}(B) = 1$.

4. Czy z tego, że A, B, C są parami niezależne wynika, że a) $A \cap B$ i C, b) $A \cup B$ i C są niezależne? Czy coś się zmieni jeśli niezależność parami zatąpimy przez niezależność łączną?

5. Rzucamy kostką do wypadnięcia drugiej szóstki. Rozważmy zdarzenia A_1, A_2, gdzie A_1 - przed pierwszą szóstką wyrzucono czwórkę, zaś A_2 - pomiędzy pierwszą i drugą szóstką padła dwójka. Czy zdarzenia A_1, A_2 są niezależne?

6. Zdarzenia $A_1, A_2, A_3, \ldots$ sa niezależne i mają równe prawdopodobieństwa. Jaka jest szansa, że zajdzie skończenie wiele zdarzeń A_n?

7. Rzucamy nieskończenie wiele razy symetryczną monetą. Niech A_n oznacza zdarzenie, że w pierwszych n rzutach było tyle samo orłów co reszek. Wykazać, że z prawdopodobieństwem 1 zachodzi nieskończenie wiele zdarzeń A_n.

8. Rzucamy nieskończenie wiele razy monetą o prawdopodobieństwie wyrzucenia orła równym p, wyniki doświadczenia kodujemy jako nieskończony ciąg zer (porażka) i jedynek (sukces). Wykazać, że z prawdopodobieństwem 1 dowolny skończony ciąg zerojedynkowy pojawia się w ciągu kodującym wynik nieskończenie wiele razy.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - seria 6

1. Wyznaczyć dystrybuantę rozkładów a) dwupunktowego $p\delta_a + (1-p)\delta_b$, gdzie $a < b$, b) geometrycznego z parametrem p, c) jednostajnego na odcinku (a, b).

2. Dystrybuanta zmiennej losowej X dana jest wzorem

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \in (-\infty, 0) \\ \frac{t^2}{2} & \text{dla } t \in [0, 1) \\ 1 - \frac{(2-t)^2}{2} & \text{dla } t \in [1, 2) \\ 1 & \text{dla } t \in [2, \infty) \end{cases}$$

3. Zmienna X ma rozkład jednostajny na odcinku $(0, 1)$. Znaleźć rozkład zmiennej $Y = -\ln X$.

4. Zmienna losowa X ma rozkład $\mathcal{N}(0, 1)$. Wyznaczyć dystrybuanty i gęstości (o ile istnieją) dla a) $Y = e^X$, b) $Y = X^2$.

5. Zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy z parametrem λ. Znaleźć rozkład zmiennych a) $Y = 1/(X + 1)$, b) $Y = \sqrt{X}$.

6. Wykazać, że funkcja $g(x) = 3x^2 e^{-x^3} 1_{(0,\infty)}(x)$ jest gęstościa prawdopodobieństwa. Niech X będzie zmienną losową o tej gęstości. Wyznaczyć rozkład zmiennej $\max(x^2, 3x)$.

7. Losujemy punkt z okręgu o promieniu 1 i środku w punkcie $(0, 0)$. Niech (X, Y) oznaczają współrzędne wylosowanego punktu. Znaleźć dystrybuantę i gęstość (jeśli istnieje) zmiennej X.

8. Rozwiązać poprzednie zadanie, jeśli punkt (X, Y) losujemy nie z okręgu, a z koła o promieniu 1 i środku w punkcie $(0, 0)$.

9. Niech zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na przedziale $(-\pi/2, \pi)$. Znaleźć gęstość zmiennej losowej $Y = \sin x$.

10. Udowodnić, że funkcja $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dana wzorem $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$ jest gęstością prawdopodobieństwa.

11. Losujemy punkt P z kuli o środku O i promieniu 1. Niech X będzie odległością między punktami O i P. Znaleźć gęstość zmiennej losowej X.

12. Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie wykładniczym z parametrem λ. Znaleźć $\mathbb{P}(X > t + s | X > s)$. Rozwiązać analogiczny problem dla rozkładu geometrycznego.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - seria 7

1. Podać przykład trzech zmiennych losowych, niezależnych parami, ale nie łącznie.

2. Niech X_i, $i = 1, \dots, n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach odp. $Exp(\lambda_i)$. Wyznaczyć rozkład zmiennej $Y = \min(X_1, \dots, X_n)$

3. Bolek, Lolek rzucają symetryczną monetą, każdy z nich wykonuje serię rzutów do momentu wyrzucenia orła. Niech T_B (odp. T_L) oznacza numer rzutu w którym Bolek (odp. Lolek) wyrzucił po raz pierwszy orła. Znaleźć rozkłady zmiennych a) $\min(T_B, T_L)$, b) $T_B + T_L$.

4. Zmienne losowe X, Y są niezależne i mają gęstości odp. f_1, f_2. Znaleźć rozkład zmiennej losowej $Z = X/Y$.

5. Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi o rozkladach

   a) Bernoulliego z parametrami odp. p, n i p, m
   b) Poissona z parametrami odp. λ_1, λ_2.
   c) normalnych z parametrami a_1, σ_1^2 i a_2, σ_2^2.
   d) jednostajnych na $[0, 1]$
   e) wykładniczych z parametrem λ

   Znaleźć rozkład zmiennej $Z = X + Y$.

6. Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na $[0, 1]$, zaś Y, zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na zbiorze $0, 1, 2, \dots, n$. Znaleźć rozkład zmiennej $X + Y$.

7. Zmienne X, Y sa niezależne, o rozkładzie wykładniczym z parameterem 1. Znaleźć rozkład zmiennej $X - Y$.

8. Niech $r_i \colon [0, 1] \to \{-1, 1\}$ będą funkcjami zdefiniowanymi wzorem $r_i(t) = \operatorname{sgn} \sin(2^i \pi t)$, $i = 0, 1, 2, \dots$. Wykazać, że funkcje r_i traktowane jako zmienne losowe na przestrzeni $\Omega = [0, 1]$ z σ-ciałem borelowskim i miarą Lebesgue'a sa niezależne.

9. Niech ε_i, $i = 1, 2, \dots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $\mathbb{P}(\varepsilon_i = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon_i = -1) = 1/2$. Niech $Z = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i / 2^i$. Wykazać, że Z ma rozkład jednostajny na odcinku $[-1, 1]$.

10. Niech $U = \min(X, Y)$, $V = \max(X, Y) - \min(X, Y)$, gdzie X, Y są niezależne i mają ten sam rozkład wykładniczy z parametrem λ. Wykazać, że U i V są niezależne.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - seria 8

1. Zmienna X ma rozkład
$$\mathbb{P}(X=1)=\mathbb{P}(X=-1)=1/4,\ \mathbb{P}(X=0)=1/2.$$
Wyznaczyć wartości oczekiwane zmiennych $\sin(\pi X)$, 2^X, $X(X-1)$.

2. Znaleźć wartości oczekiwane i wariancje rozkładów
   a) jednostajnego na odcinku $[a,b]$,
   b) Bernoulliego z parametrami n,p,
   c) wykładniczego z parametrem λ,
   d) geometrycznego z parametrem p.
   e) Poissona z parametrem λ.

3. Roztrzepana sekretarka umieściła n listów w n uprzednio zaadresowanych kopertach. Niech X oznacza liczbę listów, które trafiły do właściwych kopert. Znaleźć wartość oczekiwaną i wariancję X.

4. Urna zawiera N kul w tym b kul białych. Losujemy bez zwracania n kul ($n \leqslant N$) i definiujemy zmienną losową X jako liczbę wylosowanych kul białych. Znaleźć wartość oczekiwaną i wariancję X.

5. Zmienna X ma rozkład jednostajny na odcinku $[0,2\pi]$. Znaleźć wartość oczekiwaną zmiennej $Y=f(X)$, jeśli
   a) $f(x)=\sin x$,
   b) $f(x)=\cos^2 x$.
   c) $f(x)=-\ln x$
   d)
$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{dla } x\in[0,\pi/2] \\ \sin x & \text{dla } x\in(\pi/2,3\pi/2] \\ 1 & \text{dla } x\in(3\pi/2,2\pi] \end{cases}$$

6. Wykazać, że jeżeli $X \geqslant 0$ oraz $p>0$, to
$$\mathbb{E}X^p = p\int_0^\infty t^{p-1}\mathbb{P}(X\geqslant t)dt$$

7. Niech X,Y będa ograniczonymi zmiennymi losowymi, takimi że dla $k\in\mathbb{N}$, $\mathbb{E}X^k=\mathbb{E}Y^k$. Wykazać, że X i Y mają ten sam rozkład. Co się zmieni jeśli odrzucimy założenie o ograniczoności zmiennych X,Y?

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - seria 9

1. Wykazać, że jeśli dla $p \geqslant 1$, $\|X\|_p \leqslant M$, to $\|X\|_\infty \leqslant M$.

2. Wykazać, że jeśli $X \in L_\infty$, to $\lim_{p\to\infty} \|X\|_p = \|X\|_\infty$.

3. **(Nierówność Bernsteina)** Wykazać, że jeśli $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ to niezależne zmienne Rademachera, zaś $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, to
$$\mathbb{P}(|\sum_{i=1}^n a_i\varepsilon_i| \geqslant t) \leqslant 2\exp\Big(-\frac{t^2}{2\sum_{i=1}^n a_i^2}\Big).$$

4. **(Nierówność Chinczyna)** W sytuacji z poprzedniego zadania, wykazać, że dla $p > 0$ istnieją stałe C_p, takie że
$$\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i a_i\|_p \leqslant C_p \|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i a_i\|_2$$

5. **(Wielomiany Bernsteina)** Niech f będzie funkcją ciągłą określoną na przedziale $[0, 1]$. Określmy ciąg wielomianów
$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}.$$
Wykazać, że B_n zbiegają jednostajnie do funkcji f.

6. Niech $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ będą niezależnymi zmiennymi Rademachera, zaś $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ spełniają $|a_i| \leqslant |b_i|$. Wykazać, że wówczas
$$\|a_1\varepsilon_1 + \ldots + a_n\varepsilon_n\|_p \leqslant \|b_1\varepsilon_1 + \ldots + b_n\varepsilon_n\|_p$$
dla $p \geqslant 1$.

7. Niech F będzie dystrybuantą rozkładu μ. Zdefiniujmy $F^{-1}\colon (0, 1) \to \mathbb{R}$, uogólnioną funkcję odwrotną do F, wzorem
$$F^{-1}(r) = \inf\{t \in \mathbb{R}\colon F(t) \geqslant r\}.$$
Niech X ma rozkład jednostajny na $(0, 1)$. Znaleźć rozkład $F^{-1}(X)$.

8. Niech $X_1, \ldots, X_n$ oraz $Y_1, \ldots, Y_n$ będą ciągami niezależnych zmiennych losowych, takimi że dla $t \geqslant 0$, $\mathbb{P}(|X_i| \geqslant t) \leqslant \mathbb{P}(|Y_i| \geqslant t)$. Wykazać, że wówczas
$$\|X_1 + \ldots + X_n\|_p \leqslant \|Y_1 + \ldots + Y_n\|_p.$$

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - seria 10

1. Wektor losowy (X, Y) ma gęstość $g(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2}$. Wyznaczyć rozkład i średnią zmiennej losowej $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$.

2. Wektor X, Y ma gęstość $g(x, y) = Ce^{-|x|-2|y|}$. Wyznaczyć C oraz gęstości zmiennych X, Y. Czy zmienne X, Y są niezależne?

3. (X, Y) ma rozkład o gęstości $g(x, y) = 8xy1_{\{x^2+y^2 \leqslant 1\}}1_{\{x,y \geqslant 0\}}$ Wyznaczyć $\mathbb{E}X$, $\mathbb{E}XY^2$.

4. Zmienna dwuwymiarowa $X = (X_1, X_2)$ ma rozkład jednostajny na trójkącie o wierzchołkach $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$. Wyznaczyć średnią i macierz kowariancji wektora X oraz współczynnik korelacji między zmiennymi X_1 i X_2.

5. Rozwiązać zagadnienie regresji liniowej dla wektora z poprzedniego zadania.

6. Niech wektor losowy (X, Y) ma rozkład

   a) jednostajny na kole o środku w $(0, 0)$ i promieniu 1,

   b) jednostajny na kwadracie o wierzchołkach $(\pm 1, \pm 1)$,

   c) o gęstości $g(x, y) = e^{-x-y}1_{\{x,y \geqslant 0\}}(x, y)$.

   Wyznaczyć $\mathbb{P}(X - Y \in [-1, 1])$.

7. Niech (X, Y) będzie wektorem gaussowskim o średniej 0 i macierzy kowariancji $Q = Id$. Udowodnić, że zmienne $X + Y, X - Y$ są niezależne. Znaleźć gęstość wektora $(X + Y, X - Y)$.

8. Rzucamy dwa razy kostką. Niech X_1, X_2 oznacza liczbę oczek wyrzuconą odp. w pierwszym i drugim rzucie. Obliczyć

   a) $\mathbb{E}(X|X + Y)$,

   b) $\mathbb{E}(X|XY = 3)$, $\mathbb{E}(X|XY = 8)$, $\mathbb{E}(X|XY = 36)$.

9. Wektor losowy (X, Y) ma rozkład jednostajny na kole o środku $(0, 0)$ i promieniu 1. Obliczyć $\mathbb{E}(X^2|Y = y)$, $\mathbb{E}(X^2 + Y^2 + 2Y|X = y)$,

10. Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na $[0, 1]$. Niech $U = \min(X, Y)$, $V = \max(X, Y)$. Wyznaczyć rozkłady warunkowe U względem V i V względem U.

11. Niech X_k oznacza liczbę sukcesów w pierwszych k próbach nieskończonego schematu Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu równym p. Wyznaczyć $\mathbb{E}(X_k|X_l)$ dla $k, l \geqslant 1$

12. Znaleźć rozkład warunkowy X po warunkiem $X + Y = t$, gdzie X, Y są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie a) $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, b) $Exp(\lambda)$, c) $Poiss(\lambda)$.

13. Niech (X, Y) bedzie wektorem losowym o gęstości $g(x, y) = 8xy1_{\{x,y \geqslant 0, x^2+y^2 \leqslant 1\}}(x, y)$. Znaleźć $\mathbb{E}(X|Y = y)$.

14. Niech (X, Y) będzie wektorem gaussowskim o macierzy kowariancji Q. Załóżmy, że $\det Q \neq 0$. Wyznaczyć $\mathbb{E}(Y|X)$.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - seria 11

1. Skonstruować ciąg zmiennych losowych, który zbiega w L^p, ale nie zbiega p.n.
2. Skonstruować ciąg zmiennych losowych, który jest zbieżny według prawdopodobieństwa, ale nie zbiega w L^p dla żadnego p.
3. Dana jest przestrzeń probabilistyczna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Wykazać, że jeśli $\mathbb{P}$ jest rozkładem dyskretnym to zbieżność według prawdopodobieństwa na Ω jest równoważna zbieżności p.n.
4. Udowodnić, że granica względem prawdopodobieństwa jest wyznaczona jednoznacznie.
5. Wykazać, że jeśli dla pewnego ciągu ε_n o wyrazach dodatnich, zbiegającego monotonicznie do 0 mamy
$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon_n) < \infty,$$
to $X_n \to X$ p.n.
6. Niech $L^0 = L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią wszystkich zmiennych losowych (utożsamiamy zmienne równe p.n.) Zdefiniujmy
$$\rho(X, Y) = \mathbb{E}\left(\frac{|X - Y|}{1 + |X - Y|}\right).$$
Wykazać, że (L^0, ρ) jest przestrzenią metryczną zupełną, w której zbieżność jest równoważna zbieżności według prawdopodobieństwa. Wykazać, że jeśli zbieżność według prawdopodobieństwa na Ω nie jest równoważna zbieżności p.n., to zbieżność p.n. nie jest metryzowalna.
7. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi całkowalnymi zmiennymi losowymi o wspólnym rozkładzie. Wykazać, że $\frac{1}{n}\max_{i \leqslant n} |X_i|$ zbiega do 0 prawie na pewno.