Zliczanie

1. Podaj interpretację kombinatoryczną wzoru

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}.$$

2. Na płaszczyźnie mamy n prostych takich, że żadne dwie nie są równoległe i żadne trzy nie przecinają się w jednym punkcie.
a) Ile jest punktów przecięcia tych prostych?
b) Na ile części te proste dzielą płaszczyznę?

3. Ile elementów ma zbiór

$$\{(x, y, z) : \ 1 \le x, y, z \le n+1, \ z > \max\{x, y\}\}?$$

Wyprowadź stąd wzór

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Wyprowadź w podobny sposób wzory na sumę

$$1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k$$

dla k równego 3 i 4 (a może i większych...).

4. Ile jest ciągów zerojedynkowych długości n, w których jest dokładnie m par 01? Dokładniej, ile jest ciągów $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ takich, że $a_i \in \{0, 1\}$ oraz

$$|\{i : \ a_i = 0, a_{i+1} = 1\}| = m?$$

5. Na ile sposobów można podzielić zbiór $2n$-elementowy na n zbiorów dwuelementowych? Dokładniej, ile elementów ma zbiór

$$\{\{w_1, \ldots, w_n\} : \ |w_1| = \ldots = |w_n| = 2, w_1 \cup \ldots \cup w_n = \{1, 2, \ldots, 2n\}\}?$$

6. * Na okręgu rozmieszczono n punktów i poprowadzono wszystkie cięciwy, których końcami są te punkty. Zakładamy, że żadne trzy cięciwy nie przecinają się w jednym punkcie.

a) Na ile części te cięciwy dzielą koło?

b) Ile powstało trójkątów, których boki są tymi cięciwami lub ich fragmentami?

Podaj dowody kombinatoryczne następujących tożsamości:

7. $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \cdot \binom{n-1}{k-1}$;

8. $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$;

9. $\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$;

10. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$;

11. $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$;

12. $\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}$;

13. $\sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}$;

14. $\sum_{k=0}^{m} \binom{n+k}{k} = \binom{n+m+1}{m}$;

15. $\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$.

16. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{m} \cdot \binom{k}{m} = \binom{n+1}{2m+1}$;

17. $\sum_{k=0}^{n} \binom{2n-k}{n} \cdot 2^k = 4^n$.

18. Niech
$$P_r(n) = \{A \subseteq \{1, 2, \ldots, n\} : \ |A| = r\}.$$
Oblicz
$$\sum_{A \in P_r(n)} \min(A)$$
dla r równego 2 i 3. Spróbuj znaleźć wzór ogólny dla dowolnego r.

19. Losujemy 6 liczb spośród liczb od 1 do 49. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że nie wylosujemy dwóch liczb sąsiednich?

20. Zbiór X ma $3n$ elementów. Ile ma on podzbiorów A takich, że liczba $|A|$ dzieli się przez 3?

21. * W kolejce do kina stoi $2n$ osób. Bilet kosztuje 1 dukata. Każda osoba ma jedną monetę: n osób ma monetę jednodukatową i n osób ma monetę dwudukatową. W kasie nie ma pieniędzy. Ile jest sposobów ustawienia osób w tej kolejce tak, by każda kupiła bilet?

22. Dana jest liczba całkowita dodatnia n. Niech $A = \{1, 2, \ldots, n\}$. Wyznacz liczbę funkcji niemalejących $f : A \to A$ takich, że $f(i) \leq i$ dla każdego i.

23. * Wzdłuż ulicy jednokierunkowej znajduje się n miejsc parkingowych ponumerowanych liczbami od 1 do n. Przez ulicę przejeżdża kolejno n samochodów, ponumerowanych liczbami od 1 do n. Kierowca i-tego samochodu ma ulubione miejsce do zaparkowania; jest to miejsce o numerze a_i. Ten kierowca jedzie bez zatrzymania do swojego ulubionego miejsca i zajmuje je, jeśli jest ono wolne. Jeśli jest zajęte, to zajmuje pierwsze wolne miejsce. Jeśli natomiast wszystkie następne miejsca są zajęte, to odjeżdża. Wyznacz liczbę ciągów $(a_1, \ldots, a_n)$ takich, że wszyscy kierowcy mogą zaparkować swoje samochody.

24. W pewnej szkole 64 uczniów bierze udział w pięciu olimpiadach przedmiotowych. W każdej z tych olimpiad uczestniczy co najmniej 19 uczniów tej szkoły; żaden z nich nie jest uczestnikiem więcej niż trzech olimpiad. Udowodnij, że jeśli każde trzy olimpiady mają wspólnego uczestnika, to pewne dwie mają ich co najmniej pięciu.

25. Ile liczb z przedziału od 1 do 250 jest podzielnych przez co najmniej jedną z liczb 2, 3, 5, 7?

26. Ile jest liczb z przedziału od 1 do n względnie pierwszych z n?

27. Ile ciągów długości n o wyrazach ze zbioru $\{0, 1, 2\}$ zawiera co najmniej jedno zero, co najmniej jedną jedynkę i co najmniej jedną dwójkę?

28. Pewien człowiek ma siedmiu przyjaciół. Na ile sposobów może on zapraszać po trzech spośród nich na kolację przez siedem kolejnych dni tak, by każdy z nich był zaproszony co najmniej jeden raz?

29. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że rzucając 10 razy dwiema kostkami do gry wyrzucimy wszystkie pary (i, i), gdzie $i = 1, \ldots, 6$.

30. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że po rozdaniu kart do brydża ustalony gracz otrzyma cztery karty tej samej wysokości (tzn. 4 dwójki lub 4 trójki lub ... lub 4 asy)?

31. Ile jest ciągów zerojedynkowych długości n zawierających k jedynek i takich, że dwie jedynki nie występują obok siebie?

32. Ile jest ciągów zerojedynkowych długości n zawierających k jedynek i takich, że dwie jedynki nie występują obok siebie oraz że jedynka nie występuje jednocześnie na pierwszym i ostatnim miejscu?

33. * Na ile sposobów można posadzić przy okrągłym stole n par małżeńskich tak, by dwie kobiety nie siedziały obok siebie i by mężowie nie siedzieli obok swoich żon?

34. Permutację $(x_1, \ldots, x_{2n})$ liczb od 1 do $2n$ nazwiemy *przyjemną*, jeśli równość

$$|x_i - x_{i+1}| = n$$

zachodzi dla co najmniej jednej liczby $i \in \{1, \ldots, 2n - 1\}$. Udowodnij, że przyjemnych permutacji jest więcej niż nieprzyjemnych.

35. Klub alpinistyczny, liczący n członków, organizuje cztery wyprawy wysokogórskie dla swoich członków. Niech E_1, E_2, E_3, E_4 będą zespołami uczestniczącymi w tych wyprawach. Na ile sposobów można wybrać te zespoły pod warunkiem, że

$$E_1 \cap E_2 \neq \emptyset, \quad E_2 \cap E_3 \neq \emptyset, \quad E_3 \cap E_4 \neq \emptyset?$$

36. Oznaczmy

$$S_k(n) = \sum_{i=1}^{n} i^k.$$

Wyznacz $S_k(n)$ w zależności od $S_1(n), \ldots, S_{k-1}(n)$.

Rekurencje

37. Łamigłówka ,,wieże Hanoi" składa się z trzech pionowych drążków A, B i C oraz z n krążków z otworami, nadzianych na drążek A. Krążki te są ułożone w kolejności od największego do najmniejszego, licząc od dołu. Zadanie polega na przeniesieniu wszystkich krążków na drążek B, wolno przy tym korzystać z drążka C. Należy jednak przestrzegać następujących dwóch reguł:
a) wolno przenosić po jednym krążku,
b) nie wolno kłaść większego krążka na mniejszym.
Ile przeniesień należy wykonać? Ułóż odpowiednie równanie rekurencyjne i rozwiąż je.

38. Mamy 2^n kamyków i wagę szalkową bez odważników. Zadanie polega na ułożeniu tych kamyków w kolejności od najlżejszego do najcięższego, stosując tzw. algorytm sortowania przez łączenie. Na szalki wagi wolno kłaść tylko po jednym kamyku. Algorytm polega na tym, że dzielimy kamyki na dwa równe zbiory, sortujemy je (rekurencyjnie), a następnie łączymy te dwa posortowane zbiory. Łączenie polega na porównywaniu najlżejszych kamyków w obu zbiorach: lżejszy z nich jest następny w kolejności. Ile najwięcej ważeń wykonamy? Ułóż odpowiednie równanie rekurencyjne i rozwiąż je.

39. Ile jest permutacji zbioru n-elementowego bez punktów stałych? Ułóż odpowiednie równanie rekurencyjne i rozwiąż je.

40. W poprzek rzeki ułożono n kamieni. Na jednym brzegu rzeki stoi żaba, która chce przedostać się na drugi brzeg. Żaba może skoczyć zawsze na najbliższy kamień lub przeskakując nad nim skoczyć na następny. Na ile sposobów żaba może skakać, by dostać się na drugi brzeg? Ułóż odpowiednie równanie rekurencyjne i rozwiąż je.

41. Dla danej liczby całkowitej $n \geq 1$ wyznacz liczbę ciągów $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, których wyrazy a_i należą do zbioru $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ oraz spełniają warunek $|a_i - a_{i+1}| = 1$ dla $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

42. Dla danej liczby całkowitej $n \geq 1$ wyznacz liczbę ciągów $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, których wyrazy a_i należą do zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$ oraz takich, że 1 nie może stać obok 1 i 2.

43. Ile jest liczb n-cyfrowych utworzonych z cyfr 1, 2, 3, 4 i 5 w taki sposób, że każda z cyfr 3, 4 i 5 jest zawsze poprzedzona cyfrą 1?

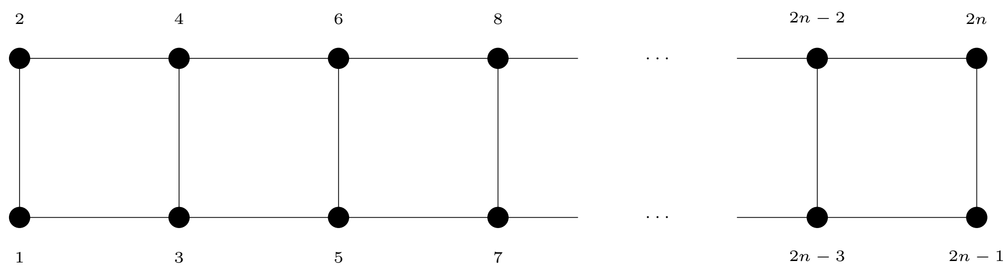
44. Ile jest liczb n-cyfrowych utworzonych z cyfr 1, 2, 3, 4 i 5 w taki sposób, że po każdej z cyfr 3, 4 i 5 zawsze następuje cyfrą 1?

45. Malujemy płot. Każdą sztachetę możemy pomalować jednym z czterech kolorów: czerwonym, zielonym, niebieskim lub żółtym. Na ile sposobów możemy pomalować płot składający się z n sztachet, jeśli kolory czerwony i zielony nie mogą wystąpić obok siebie?

46. Malujemy płot. Każdą sztachetę możemy pomalować jednym z pięciu kolorów: białym, czerwonym, zielonym, niebieskim lub żółtym. Biała sztacheta może wystąpić obok dowolnej sztachety, ale kolorowa sztacheta nie może wystąpić obok innej kolorowej sztachetu innego koloru. Na ile sposobów możemy pomalować płot składający się z n sztachet?

47. Ile jest ciągów długości n o wyrazach należących do zbioru $\{0, 1, 2, 3\}$ mających parzystą liczbę zer?

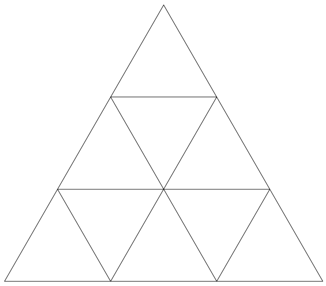
48. W pewnym państwie sieć dróg między $2n$ miastami wygląda tak jak na rysunku:



Postanowiono wyremontować jak najmniejszą liczbę dróg przy założeniu, że z każdego miasta będzie można dojechać do każdego innego. Na ile sposobów można wybrać drogi do remontu? Ułóż odpowiednie równanie rekurencyjne i rozwiąż je.

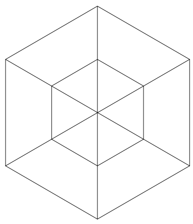
Lemat Burnside'a

49. Na ile sposobów można złożyć witraż kształtu



utworzony z 9 trójkątnych płytek szklanych, jeśli każda płytka może być zabarwiona jednym z trzech kolorów?

50. Na ile sposobów można złożyć witraż mający kształt sześciokąta foremnego



utworzony z 12 płytek szklanych (6 trójkątnych i 6 czworokątnych), jeśli każda płytka może być zabarwiona jednym z trzech kolorów?

51. Na ile geometrycznie nieodróżnialnych sposobów można pomalować ściany czworościanu foremnego dwoma kolorami?

52. Na ile geometrycznie nieodróżnialnych sposobów można pomalować krawędzie czworościanu foremnego trzema kolorami?

53. Na ile geometrycznie nieodróżnialnych sposobów można pomalować wierzchołki czworościanu foremnego pięcioma kolorami?

54. Na ile geometrycznie nieodróżnialnych sposobów można pomalować ściany sześcianu dwoma kolorami?

55. Na ile geometrycznie nieodróżnialnych sposobów można pomalować krawędzie sześcianu trzema kolorami?

56. Na ile geometrycznie nieodróżnialnych sposobów można pomalować wierzchołki sześcianu czterema kolorami?

57. Na ile geometrycznie nieodróżnialnych sposobów można pomalować ściany ośmiościanu foremnego dwoma kolorami?

58. Na ile geometrycznie nieodróżnialnych sposobów można pomalować krawędzie ośmiościanu foremnego trzema kolorami?

59. Na ile geometrycznie nieodróżnialnych sposobów można pomalować ściany dwunastościanu foremnego dwoma kolorami?

60. Na ile geometrycznie nieodróżnialnych sposobów można pomalować ściany dwudziestościanu foremnego trzema kolorami?

Grafy

61. Znajdź liczbę wszystkich grafów o danym n-elementowym ($n > 0$) zbiorze wierzchołków.

62. W pewnej grupie n osób ($n \geq 2$) są co najmniej dwie osoby, które się znają. Załóżmy ponadto, że każde dwie osoby, mające w tej grupie jakiegoś wspólnego znajomego, mają różne liczby znajomych. Udowodnij, że jest w tej grupie osoba, znająca dokładnie jedną osobę.

63. W pewnej grupie osób każda osoba zna co najmniej k innych ($k \geq 1$ - ustalona liczba naturalna). Udowodnij, że można tę grupę podzielić na dwa rozłączne zespoły w taki sposób, że każda osoba ma co najmniej $\frac{k}{2}$ znajomych w zespole, do którego *nie* należy.

64. W pewnej grupie kn osób ($k, n \geq 1$ - ustalone liczby naturalne) każda osoba zna więcej niż $(k-1)n$ innych. Udowodnij, że można z tej grupy wybrać $k+1$ osób, z których każde dwie się znają.

65. Udowodnij, że w dowolnym grafie niespójnym o n ($n \geq 2$) wierzchołkach jest co najwyżej $\binom{n-1}{2}$ krawędzi. Wykaż ponadto, że graf niespójny o n wierzchołkach ma dokładnie $\binom{n-1}{2}$ krawędzi wtedy i tylko wtedy, gdy jest postaci: klika o $n-1$ elementach i wierzchołek stopnia 0.

66. Dla grafu $G = \langle V, E\rangle$ niech G^c oznacza graf (zwany *dopełnieniem* grafu G) o zbiorze wierzchołków V i zbiorze krawędzi E^c, zdefiniowanym w sposób następujący:

$$\{v, w\} \in E^c \Leftrightarrow \{v, w\} \notin E \qquad \text{gdzie} \qquad v, w \in V, v \neq w.$$

Udowodnij, że co najmniej jeden z grafów G oraz G^c jest spójny.

67. Udowodnij, że dowolny graf o $2n$ wierzchołkach ($n \geq 1$), który nie zawiera trójkątów (tzn. nie zawiera C_3 jako podgrafu), ma co najwyżej n^2 krawędzi.

68. Udowodnij, że dowolny graf spójny o n wierzchołkach ($n \geq 1$) ma co najmniej $n - 1$ krawędzi.

69. Udowodnij, że dowolny las (graf acykliczny) o n wierzchołkach ($n \geq 1$) ma co najwyżej $n - 1$ krawędzi. Dokładniej, las o n wierzchołkach i k spójnych składowych ma $n - k$ krawędzi.

70. Udowodnij, że dowolne drzewo o n wierzchołkach ($n \geq 2$) ma co najmniej dwa wierzchołki stopnia 1.

71. Udowodnij, że dowolne drzewo o n wierzchołkach ($n \geq 3$) ma co najmniej jeden wierzchołek stopnia większego niż 1.

72. Niech T będzie dowolnym drzewem. Udowodnij, że jeśli k jest największym ze stopni wierzchołków w T, to w T jest co najmniej k wierzchołków stopnia 1.

73. Niech T będzie drzewem o k krawędziach. Udowodnij, że dowolny graf G, którego każdy wierzchołek jest stopnia co najmniej k, zawiera podgraf izomorficzny z drzewem T.

74. Udowodnij, że dowolne drzewo o parzystej liczbie krawędzi ma co najmniej jeden wierzchołek parzystego stopnia.

75. Niech T będzie drzewem o zbiorze wierzchołków $[n]$. Udowodnij, że zbiór wyrazów kodu Prüfera drzewa T jest równy zbiorowi wszystkich jego wierzchołków stopnia większego niż 1. Co więcej, każdy wierzchołek $i \in [n]$ występuje w kodzie Prüfera drzewa T dokładnie $\varrho_T(i) - 1$ razy ($\varrho_T(i)$ jest stopniem wierzchołka i w drzewie T).

76. Scharakteryzuj te drzewa o zbiorze wierzchołków $[n]$, których kody Prüfera są ciągami stałymi. Ile jest takich drzew?

77. Scharakteryzuj te drzewa o zbiorze wierzchołków $[n]$, których kody Prüfera są ciągami różnowartościowymi. Ile jest takich drzew?

78. W konferencji bierze udział $2n$ osób. Każdy uczestnik konferencji ma wśród pozostałych uczestników co najmniej n znajomych. Udowodnij, że wszystkich uczestników konferencji można zakwaterować w pokojach dwuosobowych tak, by każdy uczestnik mieszkał ze swoim znajomym.

79. Udowodnij, że wszystkie podzbiory zbioru n-elementowego ($n \geq 1$) można ustawić w ciag $\langle X_1, \ldots, X_{2^n} \rangle$ w taki sposób, że

$$\forall i < 2^n \; |X_i| \neq |X_{i+1}| \qquad \text{oraz} \qquad |X_{2^n}| \neq |X_1|.$$

80. Udowodnij, że jeśli wielościan wypukły nie ma ścian trójkątnych i czworokątnych, to $3m \leq 5n - 10$, gdzie n jest liczbą wierzchołków i m liczbą krawędzi.

81. Udowodnij, że jeśli każda ściana wielościanu wypukłego jest pięciokątem lub sześciokątem, to ten wielościan ma co najmniej 12 ścian pięciokątnych.

82. Udowodnij, że jeśli każda ściana wielościanu wypukłego jest pięciokątem lub sześciokątem i w każdym wierzchołku schodzą się dokładnie trzy ściany, to ten wielościan ma dokładnie 12 ścian pięciokątnych.

83. Dany jest graf płaski i spójny, w którym liczba wierzchołków jest podzielna przez 8 oraz:
a) 5/8 wierzchołków ma stopień 3,
b) 1/4 wierzchołków ma stopień 4,
c) 1/8 wierzchołków ma stopień 5.
Graf ten ma tylko ściany będące trójkątami lub czworokątami, przy czym są co najmniej 4 trójkąty. Ile jest ścian trójkątnych, a ile czworokątnych? Narysuj ten graf.

84. Wszystkie ściany wielościanu wypukłego są czworokątami. W każdym wierzchołku schodzą się 3 lub 4 ściany. Udowodnij, że istnieje dokładnie 8 wierzchołków, w których schodzą się dokładnie 3 ściany.

85. Wielościan wypukły ma ściany co najwyżej pięciokątne. Udowodnij, że jeśli w każdym wierzchołku schodzą się dokładnie cztery krawędzie, to liczba ścian trójkątnych jest o 8 większa od liczby ścian pięciokątnych.

86. W grafie spójnym płaskim stopień każdego wierzchołka jest równy 4 i każda ściana jest trójkątem lub czworokątem. Znajdź liczbę ścian trójkątnych.

87. Na okręgu rozmieszczono n punktów i poprowadzono wszystkie cięciwy, których końcami są te punkty. Zakładamy, że żadne trzy cięciwy nie przecinają się w jednym punkcie. Na ile części te cięciwy dzielą koło? Zastosuj wzór Eulera.