

## Egzamin z Matematyki Dyskretnej

18 czerwca 2021, godz. 10:30-13:55 (w tym 25 minut na przygotowanie i wgranie plików itp.)

Każde rozwiązanie należy napisać na osobnej kartce (zadanie 6 może być całe na jednej, z jasnym oznaczeniem poszczególnych podpunktów). Prosimy pisać wyraźnie, dużymi literami, ciemnym długopisem.

Za każde z sześciu zadań można uzyskać od 0 do 10 punktów (a więc za cały egzamin od 0 do 60).

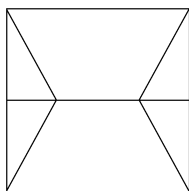
W zadaniach 1 i 6 (b) wyniki należy podać w postaci zwartej (bez wielokropka, znaku sumowania itp.) i zawierającej tylko liczby, zmienne, symbole podstawowych działań oraz symbol silni, np. odpowiedź  $2019^{2020} + 175 \cdot n! - k^7$  jest OK, natomiast odpowiedzi  $1 + 2 + \dots + 2020$  lub  $\binom{n}{7}$  nie są.

**1.** Rzucamy 6 razy z rzędu (kolejność rzutów jest istotna) dwiema monetami jednocześnie: 1 zł i 5 zł. Wyznacz prawdopodobieństwo tego, że co najmniej raz pojawi się każdy z czterech możliwych wyników (orzeł-orzeł, orzeł-reszka, reszka-orzeł, reszka-reszka).

**2.** Rozważmy wszystkie  $k$ -wyrazowe ciągi o wyrazach ze zbioru  $[n]$ . Dla każdego takiego ciągu wyznaczamy jego najmniejszy wyraz, a następnie sumujemy wybrane w ten sposób wyrazy. Wykaż, że uzyskana suma równa jest

$$1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k.$$

**3.** Z czterech przystających płytek trójkątnych oraz dwóch przystających płytek w kształcie trapezów chcemy zbudować kwadratowy witraż w następujący sposób:



Na ile geometrycznie rozróżnialnych sposobów można to zrobić, jeśli każda z płytek może być w dowolnym z czterech kolorów? Płytki są szklane i przezroczyste, więc np. witraż jednobarwny wygląda identycznie z obu stron (innymi słowy: uwzględniamy wszystkie izometrie powyższej figury). Wynik należy podać w postaci konkretnej liczby.

**4.** Wielościan wypukły ma ściany co najwyżej pięciokątne i w każdym jego wierzchołku schodzi się dokładnie pięć ścian. Dla  $i = 3, 4, 5$  niech  $s_i$  oznacza liczbę ścian  $i$ -kątnych. Wykaż, że

$$s_3 = 2s_4 + 5s_5 + 20.$$

**5.** W międzynarodowym przyjęciu uczestniczy 55 dyplomatów, reprezentujących 11 krajów, po pięciu dyplomatów z każdego kraju. Czy można usadzić ich wszystkich przy okrągłym stole tak, by dla każdego dwóch krajów pewni dwaj ich dyplomaci siedzieli obok siebie?

**6.** (a) Dane są dwie proste równoległe, na każdej z nich zaznaczono 100 punktów. Ile jest trójkątów o wierzchołkach w tych 200 punktach? Wystarczy podać wynik (w postaci konkretnej liczby).

(b) Ile jest liczb  $k$ -cyfrowych o sumie cyfr równej 9? Wystarczy podać wynik.

(c) Wyznacz (w postaci funkcji wymiernej) funkcję tworzącą ciągu  $a_n = n$ .

(d) Niech  $X = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ ,  $Y = \sum_{k=0}^n \lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ ,  $Z = \sum_{k=0}^n \left\{ \frac{n}{k} \right\}$ . Rozstrzygnij, czy dla każdego  $n$  spełniającego warunki  $10 < n < 1000$  zachodzi:

$$(1) X < 1000, \quad (2) X < \left\{ \frac{n}{2} \right\}, \quad (3) Y < 1000!, \quad (4) Y < Z.$$

(e) Czy istnieje graf spójny o co najmniej 3 wierzchołkach i o liczbie chromatycznej większej niż największy stopień wierzchołka w tym grafie? Należy podać przykład z uzasadnieniem, jeśli tak lub dowód, jeśli nie.