**Egzamin z Matematyki Dyskretnej**

**26 czerwca 2019**

**część zadaniowa**

Każde zadanie należy oddać na **oddzielnej**, czytelnie podpisanej kartce.

***1.*** Dany jest $n$-elementowy zbiór $X$, przy czym $n > 0$. Wykaż, że

$$\sum_{A,B \subseteq X} |A \cup B| = 3n \cdot 4^{n-1}.$$

***2.*** W klasie jest $n$ uczniów. Stoją oni w jednym szeregu przed wychowawcą, który ma ich podzielić na dowolną liczbę niepustych zespołów (w szczególności zespołów może być 1 lub $n$) i w każdym z zespołów wyznaczyć szefa. Zespół może składać się wyłącznie z uczniów stojących kolejno w szeregu. Na ile różnych sposobów wychowawca może tego dokonać? Ułóż odpowiednie równanie lub układ równań rekurencyjnych i wyznacz wzór ogólny.

***3.*** Dany jest klocek w kształcie graniastosłupa trójkątnego prawidłowego. Na ile istotnie różnych sposobów (uwzględniamy tylko obroty) można pomalować jednocześnie jego wierzchołki i ściany, mając do dyspozycji 5 kolorów?

Uwaga. Graniastosłup trójkątny *prawidłowy* ma podstawy będące trójkątami równobocznymi oraz krawędzie boczne prostopadłe do nich.

***4.*** Siedmiokąt podzielono na wypukłe pięciokąty i sześciokąty w taki sposób, że każdy wierzchołek siedmiokąta jest wierzchołkiem co najmniej trzech wielokątów podziału. Udowodnij, że w tym podziale jest co najmniej 27 pięciokątów.

***5.*** Załóżmy, ze $m$ i $k$ są takimi dodatnimi liczbami całkowitymi, że $m \geqslant k + 1$. Definiujemy graf dwudzielny $G = (V_1, V_2, E)$, którego wierzchołkami są pewne podzbiory zbioru $[2m]$, w następujący sposób:

— $V_1 = \{A \subseteq [2m] \colon |A| = k\}$,

— $V_2 = \{B \subseteq [2m] \colon |B| = k + 1\}$,

— dla $A \in V_1$ oraz $B \in V_2$

$$\{A, B\} \in E \iff A \subseteq B.$$

Udowodnij, że w grafie $G$ istnieje skojarzenie pełne z $V_1$ do $V_2$.

....................................................................

imię, nazwisko, nr indeksu

# Egzamin z Matematyki Dyskretnej
## 26 czerwca 2019, część teoretyczna

***1.*** Podaj wzór (w postaci odpowiedniej sumy) na liczbę $s_{n,k}$ funkcji ze zbioru $[n]$ na zbiór $[k]$.

***2.*** Zdefiniuj liczbę Stirlinga drugiego rodzaju $\left\{ {n \atop k} \right\}$ i **uzasadnij** kombinatorycznie tożsamość $\left\{ {n \atop k} \right\} = \frac{s_{n,k}}{k!}$.

***3.*** Podaj wzór na liczbę rozmieszczeń $n$ nierozróżnialnych kul w $k$ rozróżnialnych urnach, z których żadna nie może być pusta.

***4.*** Zdefiniuj wykładniczą funkcję tworzącą ciągu liczbowego $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ i **wyznacz** ją (w postaci zwartej — bez sumowania) dla ciągu $a_n = t^n$, gdzie $t$ jest ustaloną liczbą dodatnią.

zadania 5-7 ↪

***5.*** Podaj (wraz z **uzasadnieniem**) przykład grafu, który nie spełnia założeń twierdzenia Orego, ale posiada cykl Hamiltona.

***6.*** Narysuj drzewo o zbiorze wierzchołków [7] i kodzie Prüfera $(1, 2, 1, 4, 2)$.

***7.*** **Wyznacz** liczbę chromatyczną grafu ostrosłupa $n$-kątnego (wierzchołki ostrosłupa są wierzchołkami grafu, a krawędzie ostrosłupa — krawędziami grafu).