**Egzamin ze złożoności obliczeniowej – 3.9.2011**

1. **(1.25 pt.)** Powiemy, że obwód logiczny o $n$ bramkach wejściowych jest *nudny* jeśli dla *więcej* niż $\frac{3}{4}$ spośród wszystkich wartościowań[1] przyjmuje te samą wartość.

   (a) Dowieść, że problem, czy dany obwód jest nudny jest w klasie *PSPACE* i jest trudny w klasie *NP* w sensie Karpa.

   (b) Powiemy, że obwód jest *nudnawy*, jeśli przyjmuje te samą wartość dla *co najmniej* $\frac{3}{4}$ wartościowań. Co można powiedzieć o złożoności pytania, czy obwód jest nudnawy ?

2. **(0.75 pt.)** Wykaż, że problem, czy dany deterministyczny automat skończony akceptuje dane słowo, można rozstrzygnąć w pamięci logarytmicznej od łącznej długości obu wejść.

   Dokładniej, litery alfabetu (który nie jest ustalony) kodujemy jako słowa binarne, podobnie stany automatu. Automat kodujemy jako ciąg przejść $\langle q, a, p\rangle$ plus informacja, które stany są początkowe/akceptujące. Wolno użyć dotatkowych symboli pomocnicznych jako markerów. Kod automatu o $m$ stanach nad alfabetem o $k$ symbolach powinien być rozmiaru $\mathcal{O}(m \cdot k \cdot \log(m \cdot k))$. Ostatecznie, interesujący nas język ma postać $code(A)\, code(w)$, gdzie $A$ jest automatem rozpoznającym słowo $w$.

3. **(0.75 pt.)** Wykaż, ze klasa $P/poly$ jest zamknięta na operację $\star$.

4. **(1.25 pt.)** ($\star$) Na potrzeby tego zadania wprowadzimy pojęcie *obwodu rozmytego*. Otóż obwód rozmyty to obwód logiczny, w którym etykiety *Or* i *And* nie zostały przypisane bramkom. Tzn. dostając obwód rozmyty poznajemy jedynie topologię grafu obwodu, ale nie typy jego bramek (z wyjątkiem bramek wejściowych i zanegowanych bramek wejściowych). Powiemy, że obwód rozmyty *pokrywa* pewien obwód „prawdziwy”, gdy istnieje przypisanie jego wierzchołkom typów bramek *Or* lub *And*, po którym oba obwody obliczają tę samą funkcję (choć nie muszą być identyczne).

   Dla danych $k$ i $l$ zaproponuj możliwie mały obwód rozmyty $C_{k,l}$, który pokrywa *wszystkie* obwody logiczne o $k$ wejściach i $l$ bramkach.

   Maksymalną liczbę punktów uzyskają rozwiązania, w których rozmiar obwodu $C_{k,l}$ będzie zależał wielomianowo od $(k + l)$ (danego unarnie).

5. **(2 pt.)** *Pytania teoretyczne.* Odpowiedzi należy uzasadnić.

   (a) Podaj przykład funkcji $f(n), g(n), h(n) \geq n$, takich że klasy $DSPACE(f(n))$, $NSPACE(g(n))$ i $ASPACE(h(n))$, są parami różne[2].

   (b) Podaj przykład języka obliczalnego w $P/poly - P$.

   (c) Czy zbiór formuł spełnialnych, które *nie* są w postaci *CNF* jest *NP*-zupełny ?

   (d) Przypuśćmy, że $L, M \subseteq \Sigma^*$ są jezykami *NP*-zupełnymi i $\$ \notin \Sigma$. Czy język $\{v\$w : v \in L, w \in M\}$ jest *NP*-zupełny ?

   Jak zmieni się odpowiedź, jeśli o $M$ założymy jedynie, że należy do $P$ ?

   (e) Wykaż, że jeśli $P \neq NP$, to żaden język *NP*-zupełny nie jest dopełnieniem języka bezkontekstowego.

---

[1] A więc dla $> 3 \cdot 2^{n-2}$ wartościowań.

[2] $NSPACE(g(n))$ jest klasą języków rozpoznawalnych przez niedeterministyczną maszynę Turinga w pamięcie $g(n)$.