Autoreferat dla pracy doktorskiej

"Results on Modal Reasoning with Applications to Modal Deductive Databases"

autora Nguyena Anh Linha

Dedukcyjne bazy danych i programowanie w logice znajdują obszerne i ważne zastosowania. Te dziedziny są ściśle powiązane, gdyż obie używają reguł logiki klasycznej do reprezentacji wzajemnych zależności pomiędzy relacjami. Programowanie w logice jest głównie używane w systemach sztucznej inteligencji, zaś dedukcyjne bazy danych są systemami, w których ilość danych jest znacznie większa niż ilość reguł. W klasycznej teorii reguły logiczne mają postać uniwersalnie kwantyfikowanych klauzul Horna, zapisanych w języku pierwszego rzędu. Dla tak zdefiniowanego języka problem spełnialności jest rozstrzygalny w czasie wielomianowym, a rozmiar generowanego najmniejszego modelu zależy wielomianowo od długości formuły.

Rozszerzenie języka zapytań do logik modalnych prowadzi do zdefiniowania modalnego języka klauzul Horna. W tym przypadku zostało jednak udowodnione przez Chena i Lina [2], że problem spełnialności zbiorów klauzul Horna dla każdego z następujących języków K, KD, T, KB, KDB, B, $K4$, $KD4$ i $S4$ jest zupełny w klasie problemów wymagających wielomianowej pamięci, tzn. PSPACE-zupełny. Ze względu na tę trudność, programowanie w logikach modalnych nie zyskiwało dotąd pełnego uznania, jak również teoria modalnych dedukcyjnych baz danych nie była intensywnie rozwijana.

Z drugiej strony, teoria logik modalnych przyniosła wiele wyników dotyczących złożoności problemu spełnialności formuł w zdaniowych logikach modalnych. Udowodniono przez Chena i Lina [2] oraz Fariñas del Cerra i Penttonena [3], że problem spełnialności zbiorów klauzul Horna dla każdej logiki, która jest normalnym rozszerzeniem logiki $K5$, jest rozstrzygalny w wielomianowym czasie. Górne złożoności pamięciowe dla logik K, KD, T ($O(n.\log n)$), i $K4$, $KD4$, $S4$ ($O(n^2.\log n)$) zostały uzyskane przez Hudelmaiera [6] oraz Basina, Matthewsa i Viganò [1, 10].

Motywacja

Głównym celem pracy było rozszerzenie języka zapytań poprzez wybranie fragmentów logik modalnych, dla których testowanie spełnialności formuły wymaga wielomianowego czasu. Opracowano również metodę konstruowania najmniejszych modeli dla wybranych fragmentów logik modalnych. Ponadto, zbadano czy procedury decyzyjne i górne ograniczenia na złożoność pamięciową zdaniowych logik modalnych mogą być poprawione.

Definicje dotyczące zdaniowych logik modalnych

Formuły w zdaniowych logikach modalnych są zbudowane ze zmiennych zdaniowych, klasycznych spójników, unarnych spójników modalnych $\Box$ i $\Diamond$, oraz nawiasów, w zwykły sposób.

Definicja *Strukturą Kripkego* jest trójka $\langle W, \tau, R\rangle$, gdzie W jest niepustym zbiorem możliwych światów, $\tau \in W$ jest aktualnym światem, a R jest binarną relacją na W zwaną relacją dostępności. *Modelem Kripkego* (w wersji zdaniowej) jest czwórka $\langle W, \tau, R, h\rangle$, gdzie $\langle W, \tau, R\rangle$ jest strukturą Kripkego, h jest odwzorowaniem ze zbioru światów w zbiór zmiennych zdaniowych - $h(w)$ jest zbiorem zmiennych zdaniowych prawdziwych w świecie w.

Relacja spełnialności jest zdefiniowana w zwykły sposób (zobacz Definicję 2.1.4).

Najprostsza zdaniowa logika modalna (zwana K) jest zaksjomatyzowana przez aksjomaty klasycznego rachunku zdań, regułę odrywania, aksjomat zwany $K : \Box(\phi \to \psi) \to (\Box\phi \to \Box\psi)$, oraz regułę konieczności

$$\frac{\vdash \phi}{\vdash \Box\phi}$$

Udowodniono, że dowolna formuła jest twierdzeniem w tym systemie wtw, gdy jest spełniona w każdym modelu Kripkego (bez żadnych ograniczeń na R) [8]. Pewne aksjomaty dodawane do tego systemu odwzorowują właściwości relacji dostępności.

Wiele takich powiązań jest definiowalnych formułami klasycznej logiki pierwszego rzędu, jak pokazano w Tablicy 1, gdzie R reprezentuje relację dostępności. Różne logiki modalne są rozróżniane przez odpowiednie dodatkowe aksjomaty. Kilka z najbardziej popularnych logik modalnych razem z ich aksjomatami jest wymienionych w Tablicy 2. Właściwości relacji dostępności logiki modalnej L nazywamy *ograniczeniami L-struktury.*

Struktura Kripkego jest *L-strukturą* jeżeli jej relacja dostępności spełnia wszystkie ograniczenia L-struktury. Model Kripkego M jest nazwany *L-modelem* jeżeli jego struktura jest L-strukturą. Mówimy, że ϕ jest L-spełnialna jeżeli istnieje L-model dla ϕ. Przez $\phi \models_L \psi$ oznaczamy, że każdy L-model formuły ϕ jest modelem formuły ψ.

Normalnymi logikami modalnymi są logiki uzyskane przez dodawanie do logiki K nowych aksjomatów. Mówimy, że logika modalna L jest *normalnym*

Aksjomat	Schemat	Formuła pierwszego rzędu
D	$\Box\Phi \to \Diamond\Phi$	$\forall w\ \exists w'\ R(w,w')$
T	$\Box\Phi \to \Phi$	$\forall w\ R(w,w)$
B	$\Phi \to \Box\Diamond\Phi$	$\forall w,w'\ R(w,w') \to R(w',w)$
4	$\Box\Phi \to \Box\Box\Phi$	$\forall w,u,v\ R(w,u) \land R(u,v) \to R(w,v)$
5	$\Diamond\Phi \to \Box\Diamond\Phi$	$\forall w,u,v\ R(w,u) \land R(w,v) \to R(u,v)$

Table 1: Aksjomaty i powiązane ograniczenia na R

rozszerzeniem logiki modalnej L' jeżeli ograniczenia L'-struktury są także ograniczeniami L-struktury.

Mówimy, że zbiory formuł X i Y są równo-spełnialne w logice L jeżeli oba są albo L-spełnialne albo nie L-spełnialne.

Modalne formuły Horna i pozytywne programy w zdaniowych logikach modalnych

Formuła jest w *normalnej postaci negatywnej* jeżeli każda występująca w niej negacja poprzedza bezpośrednio zmienną zdaniową. Formuła jest nazwana *negatywną* jeżeli w równoważnej jej formule w normalnej postaci negatywnej każda zmienna zdaniowa jest poprzedzona przez negację. Formuła jest pozytywna jeżeli jej negacja jest negatywną formułą.

Definicja Formuła ϕ jest nazwana *formułą Horna* jeżeli przynajmniej jeden z następujących warunków zachodzi:

- ϕ jest zmienną zdaniową
- ϕ jest formułą negatywną
- $\phi = \Box\psi$, lub $\phi = \Diamond\psi$, lub $\phi = \psi \land \zeta$, gdzie ψ i ζ są formułami Horna
- ϕ jest dyzjunkcją formuły negatywnej i formuły Horna.

Definicja *Pozytywnym programem w zdaniowych logikach modalnych* jest skończony zbiór reguł następującej postaci:

$$\Box^s(B_1 \land \ldots \land B_k \to A)$$

gdzie $s \geq 0$, $k \geq 0$, a $A, B_1, \ldots, B_k$ są atomami jednej z postaci p, $\Box p$, $\Diamond p$, gdzie p jest zmienną zdaniową. Często piszemy reguły w postaci:

$$\Box^s(A \leftarrow B_1, \ldots, B_k).$$

Logika	Aksjomaty	Ograniczenia na strukturę
K	K	bez ograniczeń
KD	KD	seryjność
T	KT	zwrotność
KB	KB	symetria
KDB	KDB	seryjność i symetria
B	KTB	zwrotność i symetria
$K4$	K4	przechodniość
$KD4$	KD4	seryjność i przechodniość
$S4$	KT4	zwrotność i przechodniość
$K5$	K5	Euklidesowość
$KD5$	KD5	seryjność i Euklidesowość
$K45$	K45	przechodniość i Euklidesowość
$KD45$	KD45	seryjność, przechodniość i Euklidesowość
$KB5$	KB5	symetria i Euklidesowość
$S5$	KT5	zwrotność i Euklidesowość

Table 2: Logiki modalne i ograniczenia na strukturę

W pracy pokazałem, że można sprowadzić każdy zbiór formuł Horna X do pewnego programu P razem z pozytywną formułą Q taką, że dla dowolnej normalnej logiki modalnej L, X jest L-spełnialny wtw, gdy $P \models_L Q$.

Definicja Niech $M = \langle W, \tau, R, h \rangle$ i $N = \langle W', \tau', R', h' \rangle$ będą modelami Kripkego. Mówimy, że M jest mniejszy lub równy N względem relacji binarnej $r \subseteq W \times W'$, i piszemy $M \leq N$ wzg. r, jeżeli:

1. $r(\tau, \tau')$
2. $\forall x, x' \; r(x, x') \to (h(x) \subseteq h'(x'))$
3. $\forall x, x', y \;\; R(x, y) \land r(x, x') \to \exists y' \; R'(x', y') \land r(y, y')$
4. $\forall x, x', y' \;\; R'(x', y') \land r(x, x') \to \exists y \; R(x, y) \land r(y, y')$

Mówimy, że M jest mniejszy lub równy N i piszemy $M \leq N$ jeżeli $M \leq N$ wzg. pewnej r.

W pracy pokazałem, że relacja $\leq$ między modelami Kripkego jest częściowym porządkiem. Ponadto, jeżeli $M \leq N$, to dla dowolnej pozytywnej formuły ϕ, jeżeli $M \models \phi$, to $N \models \phi$.

Dla danego pozytywnego programu P w logice modalnej L, mówimy, że M jest najmniejszym L-modelem dla P jeżeli M jest L-modelem dla P i jest równy lub mniejszy niż każdy L-model dla P.

Klauzulowe systemy tablicowe dla zdaniowych logik modalnych

Przedstawione są w pracy klauzulowe systemy tablicowe dla zdaniowych logik modalnych K, KD, T, KB, KDB, B, $K4$, $KD4$ i $S4$ (zobacz Sekcje 2.5 i 3.1 oraz Tablice 3.1, 3.2 i 3.3). Za pomocą tych systemów skonstruowałem procedury decyzyjne dla powyższych logik z ulepszoną złożonością pamięciową.

Wspomniane systemy tablicowe są zdefiniowane tylko dla zbiorów *podstawowych klauzul*. Używając małych liter a i b do oznaczania zmiennych zdaniowych i ich negacji, podstawową klauzulą jest formuła jednej z postaci $\Box^s\neg\Box a$, $\Box^s(a_1 \vee \ldots \vee a_k)$ i $\Box^s(a \vee B)$, gdzie $s \geq 0$, $k \geq 1$, a B jest formułą postaci $\Box b$ lub $\neg\Box b$. Możemy sprowadzić dowolną formułę do równo-spełnialnego zbioru podstawowych klauzul (w każdej normalnej logice modalnej), aby była w postaci wymaganej przez wspomniane systemy (zobacz Sekcję 2.3).

Omówione systemy tablicowe są sformułowane w sposób podobny do systemów tablicowych Hintikki [5], Rautenberga [9], Gorégo [4] i Hudelmaiera [7]. Dla logik K, KD, T, KB, KDB i B, używam dodatkowego spójnika $\blacksquare$, który ma taką samą semantykę co $\Box$ lecz inną rolę syntaktyczną (formuły postaci $\blacksquare^s\phi$ nie mogą być *głównymi klauzulami* reguł). Dla logik $K4$ i $KD4$, używam nowego spójnika $\boxdot$ do symulowania spójnika $\Box$ logiki $S4$ (w taki sposób, że $M, w \models \boxdot\phi$ wtw, gdy $M, w \models (\Box\phi \wedge \phi)$). Dla logik $K4$ i $KD4$, spójnik $\blacksquare$ ma taką samą semantykę co $\boxdot$, ale formuły postaci $\blacksquare^s\phi$ nie mogą być głównymi klauzulami reguł.

Wspomniane systemy tablicowe są poprawne i zupełne (zobacz Twierdzenia 3.4.9, 3.5.9 i 3.6.9) i mają własność skończonej tablicy (zobacz Sekcję 3.3).

Definicje dotyczące logik modalnych pierwszego rzędu z stałą dziedziną nad sygnaturą bez funkcji

Formuły w takich logikach są zbudowane z symboli stałych, zmiennych, symboli relacyjnych, klasycznych spójników, unarnych spójników modalnych $\Box$ i $\Diamond$, kwantyfikatorów $\forall$ i $\exists$, oraz nawiasów, w zwykły sposób. *Termem* jest symbol stały lub zmienna. *Klasycznym atomem* nazywamy $R_i(t_1, \ldots, t_n)$, gdzie R_i jest symbolem relacyjnym arności n a $t_1, \ldots, t_n$ są termami.

Definiujemy *głębokość modalności* formuły ϕ jako maksymalne zagnieżdżenie modalności (tzn. $\Box$ i $\Diamond$) w ϕ.

Definicja *Modelem Kripkego pierwszego rzędu nad sygnaturą bez funkcji* Σ jest struktura $M = \langle D, W, \tau, R, m \rangle$, gdzie D jest zbiorem zwanym *dziedziną*, $\langle W, \tau, R \rangle$ jest strukturą Kripkego, a m jest interpretacją symboli stałych i relacyjnych. Dla symbolu c_i, $m(c_i)$ jest elementem D, oznaczonym również przez ${c_i}^M$. Dla symbolu relacyjnego R_j arności n i świata $w \in W$, $m(w)(R_j)$ jest relacją arności n na D, oznaczoną również przez ${R_j}^{M,w}$.

Relacja spełnialności jest zdefiniowana w zwykły sposób (zobacz Definicję 5.1.3).

Niech L oznacza nazwę pewnej normalnej logiki modalnej, np. KD. Logika modalna pierwszego rzędu L jest zdefiniowana przez ograniczenie jej klasy dopuszczalnych interpretacji do klasy modeli Kripkego pierwszego rzędu z L-strukturą.

Pojęcia L-spełnialność i L-model dla normalnej logiki modalnej pierwszego rzędu L są zdefiniowane w zwykły sposób.

Dla zbioru formuł X i formuły ϕ, piszemy $X \models_L \phi$ aby oznaczać, że ϕ jest spełniona w każdym L-modelu pierwszego rzędu spełniającym X.

Modalny język zapytań MDatalog

Język zapytań MDatalog jest zdefiniowany i zinterpretowany w logikach modalnych pierwszego rzędu z stałą dziedziną nad sygnaturą bez funkcji.

Definicja *Programem w języku MDatalog* jest skończony zbiór reguł postaci

$$\forall \overline{x}\ \Box^s (A \leftarrow B_1, \ldots, B_k)$$

gdzie $s \geq 0$, $k \geq 0$, oraz

- A, B_1, ..., B_k są formułami postaci $\Box\phi$, $\Diamond\phi$, lub ϕ, gdzie ϕ jest klasycznym atomem;
- $\overline{x}$ są wszystkimi zmiennymi występującymi w $(A \leftarrow B_1, \ldots, B_k)$;
- jeżeli $k = 0$, to reguła nie zawiera żadnej zmiennej ani żadnego kwantyfikatora;
- wszystkie zmienne występujące w A występują także w $(B_1, \ldots, B_k)$.

Definicja *Zapytaniem* jest formuła postaci $\exists\overline{x}\ \phi(\overline{x})$, gdzie ϕ jest pozytywną formułą bez kwantyfikatorów a $\overline{x}$ jest wektorem (możliwie pustym) wszystkich zmiennych występujących w ϕ.

Ustalmy normalną logikę pierwszego rzędu L. Dla danego programu P w języku MDatalog i danego zapytania $\exists\overline{x}\ \phi(\overline{x})$, chcemy sprawdzić czy $P \models_L \exists\overline{x}\ \phi(\overline{x})$ i znaleźć wszystkie wektory symboli stałych $\overline{c}$ takie, że $P \models_L \phi(\overline{c})$.

Modele Kripkego pierwszego rzędu mogą być uporządkowane w sposób podobny jak dla wersji zdaniowej.

Definicja Niech $M = \langle D, W, \tau, R, m\rangle$ i $N = \langle D', W', \tau', R', m'\rangle$ będą modelami Kripkego pierwszego rzędu. Mówimy, że M jest mniejszy lub równy N względem funkcji $f : D \to D'$ i relacji binarnej $r \subseteq W \times W'$ jeżeli

1. $r(\tau, \tau')$
2. $\forall x, x', y\ \ R(x, y) \wedge r(x, x') \to \exists y'\ R'(x', y') \wedge r(y, y')$
3. $\forall x, x', y'\ \ R'(x', y') \wedge r(x, x') \to \exists y\ R(x, y) \wedge r(y, y')$
4. Dla dowolnego symbolu stałego c_i, $f({c_i}^M) = {c_i}^N$.
5. Dla dowolnych $x \in W$ i $x' \in W'$ takich, że $r(x, x')$, dla dowolnego symbolu relacyjnego R_j arności n i elementów $a_1, \ldots, a_n$ dziedziny D, jeżeli ${R_j}^{M,x}(a_1, \ldots, a_n)$, to ${R_j}^{N,x'}(f(a_1), \ldots, f(a_n))$.

Mówimy, że M jest mniejszy lub równy N, i piszemy $M \leq N$, jeżeli M jest mniejszy lub równy N wzg. pewnej f i pewnej r.

W pracy pokazałem, że relacja $\leq$ między modelami Kripkego pierwszego rzędu jest porządkiem częściowym. Ponadto, jeżeli $M \leq N$, to dla dowolnej pozytywnej formuły ϕ bez zmiennych i kwantyfikatorów, jeżeli $M \models \phi$, to $N \models \phi$.

Dla danego programu P w języku MDatalog w normalnej logice modalnej pierwszego rzędu L, mówimy, że M jest najmniejszym L-modelem dla P jeżeli M jest L-modelem (pierwszego rzędu) dla P i jest równy lub mniejszy niż każdy L-model (pierwszego rzędu) dla P.

Metody

- Aby oszacować złożoność pamięciową dla zdaniowych logik modalnych, zdefiniowałem procedury decyzyjne oparte na klauzulowych systemach tablicowych, w których saturacja gra ważną rolę.

- Dla zdaniowej logiki modalnej L, aby skonstruować najmniejszy L-model dla danego pozytywnego programu P zbudowałem graf L-modelu realizujący P.

- Dla danego programu P w języku MDatalog w normalnej logice modalnej pierwszego rzędu L, aby skonstruować najmniejszy L-model (pierwszego rzędu) dla P możemy generować podstawową instancję P, traktować ją jako pozytywny program w języku zdaniowym i skonstruować dla niego najmniejszy (zdaniowy) L-model. (Ta metoda jest używana do oszacowania złożoności obliczenia. W pracy dyskutuję bardziej efektywną metodę.)

Wyniki

Głównymi wynikami mojej pracy są:

- klauzulowe systemy tablicowe i ulepszone procedury decyzyjne dla zdaniowych logik modalnych K, KD, T, KB, KDB, B, $K4$, $KD4$ i $S4$ (zobacz Rozdział 3);

- ustalenie najlepszej do tej chwili górnej złożoności pamięciowej $O(n.\log n)$ dla zdaniowych logik modalnych $K4$, $KD4$ i $S4$, oraz $O(n^2)$ dla logik KB, KDB i B (zobacz Sekcję 3.7 i Twierdzenia 3.7.2, 3.7.6 i 3.7.9);

- podanie nowego dowodu dla znanych wyników innych autorów [7, 1] stwierdzających, że zdaniowe logiki modalne K i KD są rozstrzygalne w pamięci rzędu $O(n.\log n)$ (zobacz Sekcję 3.7.1 i Twierdzenie 3.7.2);

- sformułowanie pojęć pozytywnych programów w zdaniowych logikach modalnych i w języku pierwszego rzędu MDatalog (zobacz Definicje 2.4.2 i 5.2.1);

- podanie algorytmów konstruujących najmniejsze modele dla pozytywnych programów w języku zdaniowym i w MDatalog, o ile rozważaną logiką modalną jest KD, T, KDB, B, $KD5$, $KD45$, $S5$, $KD4$ lub $S4$ (zobacz Algorytmy 4.2.1, 4.4.1 i 5.5.1); oraz warunków gwarantujących wielomianową złożoność czasową tej konstrukcji (zobacz Twierdzenia 4.2.6 i 4.4.9 oraz Wniosek 5.4.5);

- charakteryzacja pozytywnych programów (w języku zdaniowym i w MDatalog) w logikach KB, $K5$, $K45$ i $KB5$ przez jeden lub dwa modele, które mogą być efektywnie skonstruowane (zobacz Sekcję 4.3 i Wnioski 4.3.5 i 5.4.7);

- twierdzenie pokazujące wielomianową złożoność obliczenia zapytań w języku MDatalog, o ile bazową logiką modalną jest KD, T, KB, KDB, B, $K5$, $KD5$, $K45$, $KD45$, $KB5$ lub $S5$, przy założeniach, że głębokości kwantyfikatorów w zapytaniach i programie są skończenie ograniczone oraz głębokość modalności programu jest skończenie ograniczona w przypadku gdy rozważana logika nie jest normalnym rozszerzeniem logiki $K5$ (zobacz Twierdzenie 5.4.8);

- twierdzenie pokazujące, że problem sprawdzenia spełnialności formuł Horna o skończenie ograniczonej głębokości modalności w zdaniowych logikach modalnych KD, T, KB, KDB i B jest rozstrzygalny w czasie wielomianowym (zobacz Wnioski 4.2.7 i 4.3.6);

- podanie nowego dowodu dla znanych wyników innych autorów [3, 2] stwierdzających, że problem sprawdzenia spełnialności formuł Horna w zdaniowych logikach modalnych $K5$, $KD5$, $K45$, $KD45$, $KB5$ i $S5$ jest rozstrzygalny w czasie wielomianowym (zobacz Wnioski 4.2.8 i 4.3.7).

Praca zawiera również przykłady zastosowań wspomnianych technik do modalnych dedukcyjnych baz danych. Obie moje metody oszacowania złożoności pamięciowej dla zdaniowych logik modalnych i konstruowania najmniejszych modeli dla pozytywnych programów są stosowalne nie tylko dla logik rozważanych w pracy.

References

[1] D. Basin, S. Matthews, and L. Viganò. A new method for bounding the complexity of modal logics. In *G. Gottlob, A. Leitsch, and D. Mundici, editors, Proceedings of the 5th Kurt Gödel Colloquium on Computational Logic and Proof Theory (KGC'97), LNCS 1289*, pages 89–102. Springer, 1997.

[2] C.C. Chen and I.P. Lin. The computational complexity of the satisfiability of modal Horn clauses for modal propositional logics. *Theoretical Computer Science*, 129:95–121, 1994.

[3] L. Fariñas del Cerro and M. Penttonen. A note on the complexity of the satisfiability of modal Horn clauses. *Logic Programming*, 4:1–10, 1987.

[4] R. Goré. Tableau methods for modal and temporal logics. In D'Agostino Gabbay Hänle Posegga, editor, *Handbook of Tableau Methods*, pages 297–396. Kluwer Academic Publishers, 1999.

[5] K.J.J. Hintikka. Form and content in quantification theory. *Acta Philosophica Fennica*, 8:3–55, 1955.

[6] J. Hudelmaier. A contraction-free sequent calculus for S4. In *H. Wansing, editor, Proof Theory of Modal Logic*, pages 3–15. Kluwer, Dordrecht, 1996.

[7] J. Hudelmaier. Improved decision procedures for the modal logics K, T, S4. In *H. Kleine Büning, editor, Proceedings of CSL'95, LNCS 1092*, pages 320–334. Springer, 1996.

[8] S.A. Kripke. Semantical analysis of modal logic, i. normal modal propositional calculus. *Z. Math. Logic Grundlag*, 9:67–96, 1963.

[9] W. Rautenberg. Modal tableau calculi and interpolation. *Journal of Philosophical Logic*, 12:403–423, 1983.

[10] L. Viganò. *A framework for non-classical logics*. PhD thesis, Universität des Saarlandes, Saabrücken, Germany, 1997.