Reguły gry:

- Zadania proszę oddawać na osobnych kartkach;
- Najlepiej numerowane: login students_zadanie.pdf (to znaczy Jan Kowalski o numerze indeksu 123456 oddaje zadanie 5 to jest jk123456_5.pdf). To nie jest konieczne, ale jeśli większość tak zrobi, prace będą sprawdzone *wyraźnie szybciej.*
- Jeśli przy zadaniu jest '+' to znaczy, że rozwiązanie może być dłuższe niż jedna strona A4. Rozwiązania pozostałych zadań, jeśli są dłuższe niż jedna strona *będą ocenione według wzoru* $p = 1 - \min(\textit{liczba stron}, 0)$. To jest również wskazówka do zadań: jeśli rozwiązanie jest wyraźnie dłuższe niż 1 strona, to znaczy, że jest prawdopodobnie złe.
- Nie trzeba podawać oczywistych rachunków, na przykład jak ktoś policzył $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$, bo mu to jest potrzebne, to nie musi tego pokazywać.

Zadanie 1. Dla jakich parametrów y_0 równanie $y' = xe^{-x^4}y^2$ z warunkiem początkowym $y(0) = y_0$ ma rozwiązanie określone na $[0, \infty)$? Dla jakich na $(-\infty, \infty)$?

Zadanie 2. Dla równania $y' = (x^2+1)y \ln y$ odpowiedz, przy jakich warunkach początkowych rozwiązanie jest jednoznaczne?

Zadanie 3. Rozpatrujemy układ

$$\begin{cases} \dot{x} &= -y + x\sin(x^2+y^2-1) \\ \dot{y} &= x + y\sin(x^2+y^2-1). \end{cases}$$

Dla jakich warunków początkowych x_0, y_0 rozwiązanie trafia (w przyszłości) do koła o środku w $(0,0)$ i promieniu $1/2$?

Zadanie 4 (+)**.** Rozpatrujemy układ $y' = -x^2 + y^2$. Rozstrzygnij, czy istnieje $y_0 > 0$ takie, że rozwiązanie z warunkiem początkowym $y(0) = y_0$ jest określone na całej półprostej dodatniej.

Zadanie 5 (+)**.** Rozważamy układ $\ddot{x} = -\sin x$ z warunkami początkowymi $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = x_1 \geq 0$. Znajdź y_1 takie, że jeśli $x_1 < y_1$, rozwiązanie jest okresowe a jeśli $x_1 > y_1$, rozwiązanie nie jest okresowe. Dla $x_1 < y_1$ niech $T(x_1)$ oznacza okres rozwiązania. Oblicz

$$\lim_{y \to y_1^-} \frac{T(y)}{\ln|y_1 - y|}.$$

Zadanie 6. Przypuśćmy, że $y(t)$, $t \in [0, \infty)$ jest gładka i spełnia $y(0) = 1$ oraz

$$y(t) \leq y(0) + 2\int_0^t \sqrt{y(s)}\mathrm{d}s.$$

Wykaż, że $y(2) \leq 9$. Jeśli zachodzi równość, ile wynosi $y(1)$?

Zadanie 7 (+)**.** Dla jakich punktów początkowych x_0, y_0 rozwiązania równania

$$\dot{x} = -x + 2x^2y,$$
$$\dot{y} = -y$$

zbiegają do punktu $(0,0)$?

Zadanie 8. Ustalamy $\ell > 0$. Znajdź wartości λ, dla których równanie

$$\ddot{x} + \lambda x = 0$$

ma niezerowe rozwiązania, spełniające

$$x(0) = 0,\ x(\ell) = 0.$$

Zadanie 9 (+)**.** Znajdź wszystkie $a \in \mathbb{R}$ takie, że wysycone rozwiązanie równania $\ddot{x} = x^3 - x$ z warunkami początkowymi $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = a$ istnieje globalnie.

Zadanie 10. Przypuśćmy, że A jest symetryczną, dodatnio określoną macierzą $n \times n$ o rzeczywistych współczynnikach. Wykaż, że wszystkie rozwiązania układu równań $\ddot{x} + Ax = 0$ są ograniczone.

Zadanie 11. Dla $a, b, c \in \mathbb{R}$, niech A będzie macierzą postaci

$$A = \begin{bmatrix} a & b & 0 & c \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}.$$

Znajdź wszystkie trójki a, b, c takie, że wszystkie rozwiązania układu równań $\dot{x} = Ax$ są ograniczone na $[0, +\infty)$.

Zadanie 12 (+)**.** Rozważmy zagadnienie początkowe

$$\begin{cases} \dot{x} = xy + t^2, \\ 2\dot{y} = -y^2, \\ (x, y)(1) = (3, \mu). \end{cases}$$

Wyznacz $\left.\frac{\partial x}{\partial \mu}\right|_{\mu=2}$.

Zadanie 13. Przypuśćmy, że funkcje $t^2 e^{-t}$, $e^{-3t}\cos t$ i t^4 spełniają równanie $x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + a_2 x^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1}\dot{x} + a_n x = 0$.

Jakie jest najmniejsze n przy którym jest to możliwe? Dla najmniejszego możliwego n wyznacz współczynniki $a_1, \ldots, a_n$.

Zadanie 14 (+)**.** Niech $f(x, y)$ będzie gładką funkcją taką, że $f(0, 0) < 0$, $f(x, y) > 0$ jeśli $x^2 + y^2 > b$ i $|f(x, y)| < c < 2$, gdzie b i c są stałymi. Uzasadnij, że równanie

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + x = 0$$

ma rozwiązanie okresowe.

Wskazówka: rozpatrz współrzędne biegunowe.

Zadanie 15 (+)**.** Rozpatrujemy układ $\dot{x} = f(x, y)$, $\dot{y} = g(x, y)$. Przypuśćmy, że rozwiązanie startujące z punktu $(0, 0)$ dochodzi do punktu $(1, 0)$ w skończonym czasie i po drodze nie przecina prostej $\{x = 1\}$. Załóżmy dodatkowo, że $f(0, 0), f(1, 0) \neq 0$.

Wykaż, że istnieje $\varepsilon > 0$ takie, że jeśli $|y_0| < \varepsilon$, to rozwiązanie startujące z punktu $(0, y_0)$ dochodzi do prostej $\{x = 1\}$ w skończonym czasie. Niech $(1, y_1)$ będzie punktem pierwszego dojścia do prostej. Udowodnij, że przyporządkowanie $y_0 \mapsto y_1$ jest różniczkowalne.

Wskazówka: Użyj TFU.

Uwaga: to jest zadanie, które każdy ambitny student powinien umieć rozwiązać, nie chodzi o oddanie zadania, ale o rozumieniu, o co chodzi w zadaniu.

Zadanie 16. Dany jest ciąg $a_0 = 0$, $a_1 = a$ (a jest parametrem), $a_{n+2} = a_{n+1} - \frac{1}{n+1}a_n$. Rozważ szereg

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Znajdź równanie różniczkowe, które spełnia f, rozwiąż i rozwiń w szereg Taylora otrzymując jawny wzór na a_n.

Zadanie 17 (+)**.** Wykaż, że dowolne rozwiązanie równania $y'' + xy = 0$ ma na przedziale $[-25, 25]$ co najmniej 15 miejsc zerowych.

Zadanie 18. Przypuśćmy, że funkcja $x(t) = \cos t$ i $y(t) = \sin(t)$ spełnia równanie $\dot{x} = f(x, y)$, $\dot{y} = g(x, y)$ dla pewnych funkcji gładkich f i g. Wykaż, że istnieje punkt (x_0, y_0) taki, że $x_0^2 + y_0^2 < 1$ oraz $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$.

Zadanie 19. Niech g i h będą ciągłe a równanie $y' = g(x)h(y)$ z warunkiem początkowym $y(0) = 0$ ma dwa różne rozwiązania. Wykaż, że ma nieskończenie wiele parami różnych rozwiązań.

Uwaga: mówiąc o różnych rozwiązaniach mówimy tutaj o rozwiązaniach *istotnie różnych* to znaczy takich, że w pewnym punkcie x zachodzi $y_1(x) \neq y_2(x)$.

Zadanie 20 (+)**.** Ustalamy ciąg liczb dodatnich $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots)$. W przestrzeni funkcji $C^\infty([-1,1])$ określamy $||f||_{\mathbf{a}} = \sum_{j=0}^{\infty} a_j ||f^{(j)}||_{\sup}$, gdzie sup oznacza normę sup na $[-1,1]$. Niech $V_{\mathbf{a}}$ będzie podprzestrzenią funkcji z $C^\infty([-1,1])$ na których ta norma jest skończona.

Rozpatrujemy dwa warunki na ciąg $\mathbf{a}$:

(a) funkcja $f = e^{-1/x^2}$ należy do $V_{\mathbf{a}}$.

(b) przekształcenie liniowe $D\colon V_{\mathbf{a}} \to C^\infty([-1,1])$ ma obraz w $V_{\mathbf{a}}$ i skończoną normę.

Uzasadnij, że warunki (a) i (b) są sprzeczne.

Zadanie 21. Niech $n > 1$. Uzasadnij, że istnieje takie $\varepsilon > 0$, że jeśli macierz A o wymiarach $n \times n$ spełnia $A \cdot A^T = I$ oraz $||A - I|| < \varepsilon$, to istnieje macierz B taka, że $B + B^T = 0$ oraz $\exp(B) = A$.

Czy taka macierz B jest wyznaczona jednoznacznie?

Zadanie 22 (+)**.** Rozważmy równanie $\mu\ddot{x}+\dot{x}+4x = 0$ zależny od parametru $\mu \in (0, \frac{1}{16})$. Niech $x_\mu(t)$ oznacza rozwiązanie z warunkiem początkowym $x_\mu(0) = 2$, $x'_\mu(0) = -8$. Rozstrzygnij, czy zachodzi:

$$\lim_{\mu \to 0^+} x_\mu = x_0, \quad \lim_{\mu \to \frac{1}{16}^-} = x_{1/16},$$

a jeśli tak, to czy zbieżność jest jednostajna na zbiorach zwartych.

Zadanie 23 (+)**.** Rozważmy układ:

$$\begin{cases} \dot{x} &= \mu\left(x - \frac{1}{3}x^3 - y\right) \\ \dot{y} &= \frac{1}{\mu}x \end{cases} \tag{1}$$

z parametrem $\mu \neq 0$. Zbadaj stabilność rozwiązania $x \equiv y \equiv 0$ w zależności od parametru μ.

Zadanie 24 (+)**.** Udowodnij, że układ (1) ma nietrywialne rozwiązanie okresowe.

Zadanie 25. Podaj przykład funkcji $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, takiej, że równanie $y' = h(y)$ nie ma rozwiązań dla żadnego warunku początkowego typu $y(0) = y_0$. Uzasadnij odpowiedź.

Zadanie 26 (+)**.** Rozpatrujemy układ $\dot{x} = \lambda$, $\dot{y} = \mu$, gdzie $\lambda, \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ są liniowo niezależne nad $\mathbb{Q}$. Udowodnij że dla dowolnego warunku początkowego $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, zbiór $(x(t) \bmod 1, y(t) \bmod 1)$, $t \in \mathbb{R}$, jest gęsty w $[0,1] \times [0,1]$.

Uwaga! Zadanie zostało uproszczone. Stara wersja zadania $\dot{x} = \lambda x$, $\dot{y} = \lambda y$, przy dodatkowym założeniu, że $x_0, y_0 \notin \mathbb{Z}$ jest również prawdziwa, można ją oddać, będzie dodatkowo oceniona.

Zadanie 27. Dla równania $y' = \sin y$ znajdź $\lim_{x\to\pm\infty} y(x)$ w zależności od warunku początkowego $y(0) = y_0$.

Zadanie 28 (+)**.** Zbadaj stabilność rozwiązania zerowego równania

$$\dot{x} + \begin{pmatrix} e^{-t} & t^3 \\ -t^3 & 3 \end{pmatrix} x = 0,$$

gdzie $x(t) \in \mathbb{R}^2$.

Zadanie 29 (+)**.** Niech A będzie macierzą $n \times n$. Niech γ będzie krzywą zamkniętą w $\mathbb{C}$ obchodzącą wszystkie wartości własne dokładnie raz. Wykaż, że

$$e^{tA} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma e^{t\lambda}(\lambda I - A)^{-1} d\lambda.$$

Całkę w powyższym wzorze interpretujemy jako albo całkę z 1-formy, albo całkę w sensie zespolonym, albo całkę tzw. II. rodzaju.

Zadanie 30. Rozważamy układ $x' = f(x,y)$, $y' = g(x,y)$, gdzie f i g są gładkie. Niech P oznacza pasek $[0,\infty] \times [-1,1]$. Załóżmy, że:

- Dla $y \in [-1,1]$ zachodzi $f(0,y) > 0$;

- Dla $x \in [0, \infty)$ zachodzi $g(x, 1) > 0$ oraz $g(x, -1) < 0$.

Uzasadnij, że istnieje rozwiązanie, które pozostaje w P przez nieskończenie długi czas.

Wskazówka: można powołać się na Zadanie 15.