$$A \rightsquigarrow e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots$$

$$y' = Ay$$

$$\rightsquigarrow y(t) = e^{tA} \cdot y_0.$$

/ dlaczego to jest rozwiązanie!

musimy sprawdzić, że

$$\frac{d}{dt} y(t) = A \cdot y.$$

/ a mogłoby być $y \cdot A$??

$$\frac{d}{dt} e^{tA} \cdot y_0 \Big|_{t=t_0} = \lim_{h \to t_0} \frac{e^{(t+h)A} y_0 - e^{tA} y_0}{h} =$$

$$= \lim_{h \to t_0} \frac{e^{tA + hA} - e^{tA}}{h} y_0 =$$

$$e^{tA + hA} = e^{tA} e^{hA}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{e^{hA} - Id}{h} e^{tA} y_0$$

Musimy sprawdzić, że

$$\frac{e^{hA} - Id}{h} \xrightarrow{h\to 0} A.$$

W tym celu korzystamy z definicji e^{hA}:

$$e^{hA} = Id + hA + \frac{h^2A^2}{2!} + \dots$$

dalej postępujemy tak samo, jak na AM I.

tzn. pokazujemy, że

$$\lim_{h\to 0} \frac{hA^2}{2!} + \frac{h^2A^3}{3!} + \dots = 0$$

$$\left\| \frac{hA^2}{2!} + \frac{h^3A^3}{3!} + \dots \right\| \leq$$

$$\leq h\left(\frac{\|A^2\|}{2!} + \frac{\|A^3\|}{3!} + \frac{\|A^4\|}{4!} + \dots \right) \leq$$

$$\leq \left\{ \begin{array}{l} \|A^j\| \leq \|A\|^j \\ a = \|A\| \end{array} \right\} \leq$$

$$h\left(\frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \dots \right) \leq e^a h. \xrightarrow{h \to 0} 0$$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, hladký C^∞. $\quad f \in C^\infty(\mathbb{R})$

$D : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$

$Df = f'$

~~Co to test~~. Co to może być

$$e^{hD} : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$$

$$e^{hD} f(x) =$$

$$= \left(I + hD + \frac{h^2}{2!}D^2 + \frac{h^3}{3!}D^3 + \dots\right) f(x) =$$

$$= f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \dots$$

$$\text{"}=\text{"}\ f(x+h)$$

$$\text{"}\ e^{hD} f(x) = f(x+h)\ \text{"}$$

pracując na potęgach szeregów...

$$1+2+3+4+\dots = -\frac{1}{12}$$

$a_0 = 0, \; a_1 = 1, \; a_2 = 1, \; a_3 = 2 \ldots$

$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$

$x_n = a_{n+1}$

$y_n = a_n$

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \quad \Big\{ \; y' = Ay$$

macierz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ma wartości własne

$$\underbrace{\tfrac{1}{2}(\sqrt{5}+1)}_{\lambda_1}, \quad \underbrace{\tfrac{1}{2}(\sqrt{5}-1)}_{\lambda_2}.$$

sagemath.org $\qquad CAC^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

to $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} C \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

To oznacza, że

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\lambda_1^n + b\lambda_2^n \\ c\lambda_1^n + d\lambda_2^n \end{pmatrix}.$$

a zatem

$$a_n = \alpha\lambda_1^n + \beta\lambda_2^n$$ dla pewnych α, β.

$$a_0 = 0$$
$$a_1 = 1$$
$$\Downarrow$$
$$\alpha + \beta = 0$$

$$\alpha(\sqrt{5}+1) + \beta(\sqrt{5}-1) = 2$$

$y' = Ay$,

$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$

wymiar największej klatki Jordana odpowiadającej λ_i jest równy m_i.

Wtedy każda współrzędna y jest liniową kombinacją funkcji:

$$
\begin{array}{l}
e^{\lambda_1 t}, \; te^{\lambda_1 t}, \; \ldots, \; t^{m_1-1} e^{\lambda_1 t}, \\
e^{\lambda_2 t}, \; \ldots, \; t^{m_2-1} e^{\lambda_2 t} \\
\vdots \\
e^{\lambda_n t}, \; \ldots, \; t^{m_n-1} e^{\lambda_n t}
\end{array}
$$

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + a_2 x^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} x' + a_n x = 0$$

/ równanie liniowe wyższych rzędów o stałych współczynnikach /.

używając metody z pierwszych zajęć.

$$x = x_1$$

$$x' = x_2$$

$$x'' = x_3$$

$$\vdots$$

$$x^{(n-1)} = x_n$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \vdots & & \\ 0 & \dots & & 0 & 1 \\ a_n & a_{n-1} & \dots & & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Przypadek pierwszy:

$n = 1$

$$x' + ax = 0 \implies x = e^{-at} x_0$$

$x' + ax = (D + aI)x$, gdzie

D jest różniczkowaniem.

Kluczowa uwaga: rozwiązanie równania

$x' + ax = 0$ to to samo, co szukanie

jądra operatora (przekształcenia liniowego)

$D + aI$.

Jeśli, że zależy nam na ścisłości, musimy ustalić przestrzeń, na której ten operator działa.