Wyjaśnienie:

$y' = F(x, y) \rightsquigarrow T: X \to X$ $\left.\right\}$ zeszły tydzień

F ciągłe

obraz $T(X)$ jest prezwarty, tzn.

z dowolnego ciągu $y_i \in T(X)$ można wybrać podciąg zbieżny.

—

$y_0 = \text{const.}$ $\quad y_{i+1} = T y_i$

z ciągu y_i wybieraliśmy podciąg zbieżny y_{n_i}. Niech $u = \lim y_{n_i}$.

Pytanie z sali: dlaczego $u = Tu$.

Odpowiedź

$y_{n_i} \to u$.

rozpatrzmy ciąg $Ty_{n_i} = y_{n_i+1}$

Przechodząc do podciągu zbieżnego z y_{1+n_i} dostajemy granicę

$y_{n_i} \to u$

$y_{1+n_i} \to u'$

dostajemy tylko, że

$Tu = u'$. Jeszcze nie wiemy, że

$u' = u$.

zostawiamy na za 2 tygodnie.

$y' = Ay$ A macierz $n \times n$.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sin x + \cos y \\ \dot{y} &= e^{x+y} - 1. \end{aligned}$$
dziwny układ.

$x(0) = 0,\ y(0) = 0 \implies x(t), y(t) \equiv 0.$

$$\sin x + \cos y = 0 + x + 0y \ldots$$
$$e^{x+y} - 1 = 0 + x + y + \ldots$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \ldots$$

$$y' = Ay$$
$$y(0) = y_0$$

$$y(t) = e^{tA} y_0$$

$$e^B = I + B + \frac{B^2}{2!} + \frac{B^3}{3!} + \dots \qquad (**)$$

$$e^{A+B} \neq e^A e^B.$$

Ale:

Jeśli $AB = BA$, to
$$e^{A+B} = e^A e^B. \qquad (*)$$

Dowód (ćwiczenie): Wziąć dowolną

książkę do analizy z wyprowadzeniem

$(*)$ z $(**)$ i sprawdzić, że

Działa dla macierzy przemiennych.

$$e^{CAC^{-1}} = Ce^{A}C^{-1} \quad \text{o ile}$$

C jest odwracalna.

sprowadźmy A do postaci Jordana.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & 0 & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & \\ 0 & & \lambda_1 & & & & \\ & & & \lambda_2 & 1 & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$$

Jak policzyć $e^{\text{klatka Jordana}}$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & a & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & a \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$$

Można to zrobić np. bezpośrednio z definicji. Dla macierzy 2×2:

$$\begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = A$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2a\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2a\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 a \\ 0 & \lambda^3 \end{pmatrix},$$

$$A^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} a \\ 0 & \lambda^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \dots =$$

$$\begin{pmatrix} 1+\lambda+\frac{\lambda^2}{2!}+\frac{\lambda^3}{3!}+\dots & 0+a+\frac{2a\lambda}{2!}+\frac{3a\lambda^2}{3!}+\frac{4a\lambda^3}{4!}+\dots \\ 0 & 1+\lambda+\frac{\lambda^2}{2!}+\frac{\lambda^3}{3!}+\dots \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{\lambda} & a e^{\lambda} \\ 0 & e^{\lambda} \end{pmatrix}$$

$$[A,B]=0 \Rightarrow e^{A+B} = e^{A} e^{B}$$

Dla dowolnej klatki Jordana:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & a & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & a \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}}_{A_1} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & a & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & a \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}}_{A_2}.$$

$$e^{A} = e^{A_1} \cdot e^{A_2} = e^{\lambda} e^{A_2}$$

$$e^{A_2} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & a & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & a \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2 & & 0 \\ & 0 & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & a^2 \\ 0 & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$A_2^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a^3 & \ddots & 0 \\ & & 0 & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$e^{A_2} = \begin{pmatrix} 1 & a & \frac{a^2}{2!} & \cdots & \frac{a^k}{k!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & 0 & & \ddots & a \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

k wymiar macierzy

$$e^{A} = \begin{pmatrix} e^{\lambda} & a e^{\lambda} & \frac{a^2}{2!} e^{\lambda} & \cdots \\ & e^{\lambda} & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & a e^{\lambda} \\ & 0 & & e^{\lambda} \end{pmatrix}$$

Dla równania $y' = Ay$ obliczamy

e^{tA} i dostajemy rozwiązanie.

Uwaga: Nasze $\varphi_t = e^{tA}$ to jest to potok układu $y' = Ay$.

$A = \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ ma wartości własne λ i λ.

$$e^{\lambda} = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda$$
$$e^{\lambda} = \alpha_1$$

traktujemy to jako równanie ze zmienną wartością λ i niewiadomymi α_1, α_0.

$$\alpha_1 = e^{\lambda}$$
$$e^{\lambda} = \alpha_0 + \lambda e^{\lambda}$$
$$\alpha_0 = e^{\lambda}(1-\lambda)$$ jeśli $\lambda \neq 1$.

$$e^{A} = \alpha_0 I + \alpha_1 A =$$
$$= \begin{pmatrix} e^{\lambda}(1-\lambda) & 0 \\ 0 & e^{\lambda}(1-\lambda) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{\lambda}\lambda & a e^{\lambda} \\ 0 & \lambda e^{\lambda} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} e^{\lambda} & a e^{\lambda} \\ 0 & e^{\lambda} \end{pmatrix}.$$

$$y' = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} y \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

$$y_1'(x) = \lambda y_1(x) + y_2(x)$$
$$y_2'(x) = \lambda y_2(x)$$

$$y_2(x) = e^{\lambda x} y_2(0) \qquad u = y_2(0)$$

$$y_1'(x) = \lambda y_1(x) + e^{\lambda x} u$$

$$y_1' = \lambda y_1 \Rightarrow y_1(x) = C e^{\lambda x}.$$

wstawiamy $y_1(x) = C(x) e^{\lambda x}$

$$c' e^{\lambda x} + \lambda c e^{\lambda x} = \lambda c e^{\lambda x} + e^{\lambda x} u \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c'(x) = u$$

$$C(x) = ux + w.$$

Ostatecznie:

$$y_1(x) = u x e^{\lambda x} + w e^{\lambda x}$$

$$y_2(x) = e^{\lambda x} u$$

$$=$$

$$= \begin{pmatrix} e^{\lambda x} & x e^{\lambda x} \\ 0 & e^{\lambda x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ u \end{pmatrix}$$

$$\parallel$$

$$e^{x\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}}$$

Uwaga: λ - zespolona wartość własna

$\bar{\lambda}$ - sprzężona

$$V = \begin{pmatrix} \begin{matrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{matrix} & \\ & \begin{matrix} \bar{\lambda} & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \bar{\lambda} \end{matrix} \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ sprzężone klatki;

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \bar\lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \bar\lambda \end{pmatrix}$$

$\lambda = a + bi$

$\downarrow$ $\mathbb{C}$ de $\mathbb{R}$

lelutha
Jordan
med $\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix}
\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & & & & 0 \\
& \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & & & \\
& & \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & & \\
& 0 & & \ddots & \ddots & \\
& & & & \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
& & & & & \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}
\end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix}$$

$$\dot{x} = -y \qquad \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{\begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix}.$$
$$\dot{y} = x$$

macierz $\begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix}$ ma wartości własne $\pm it$.

$$e^{\begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix}} = \text{klatki Jordana } e^{it}, e^{-it}$$

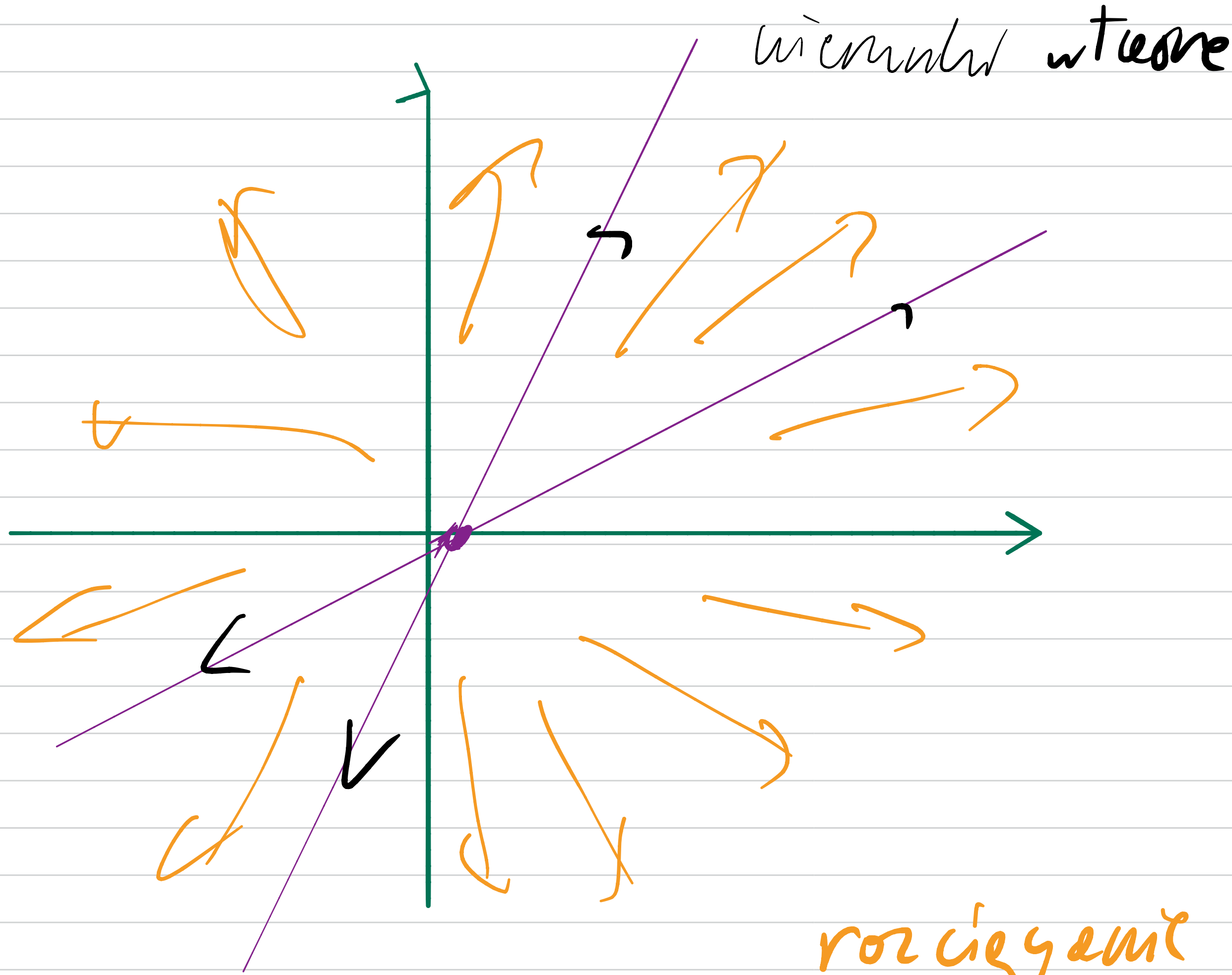
$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

$$e^{\begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} x(t) \\ y(t) \end{matrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix}$$

Przypuśćmy że A jest macierzą 2×2.

1) Dwie wartości własne rzeczywiste dodatnie.

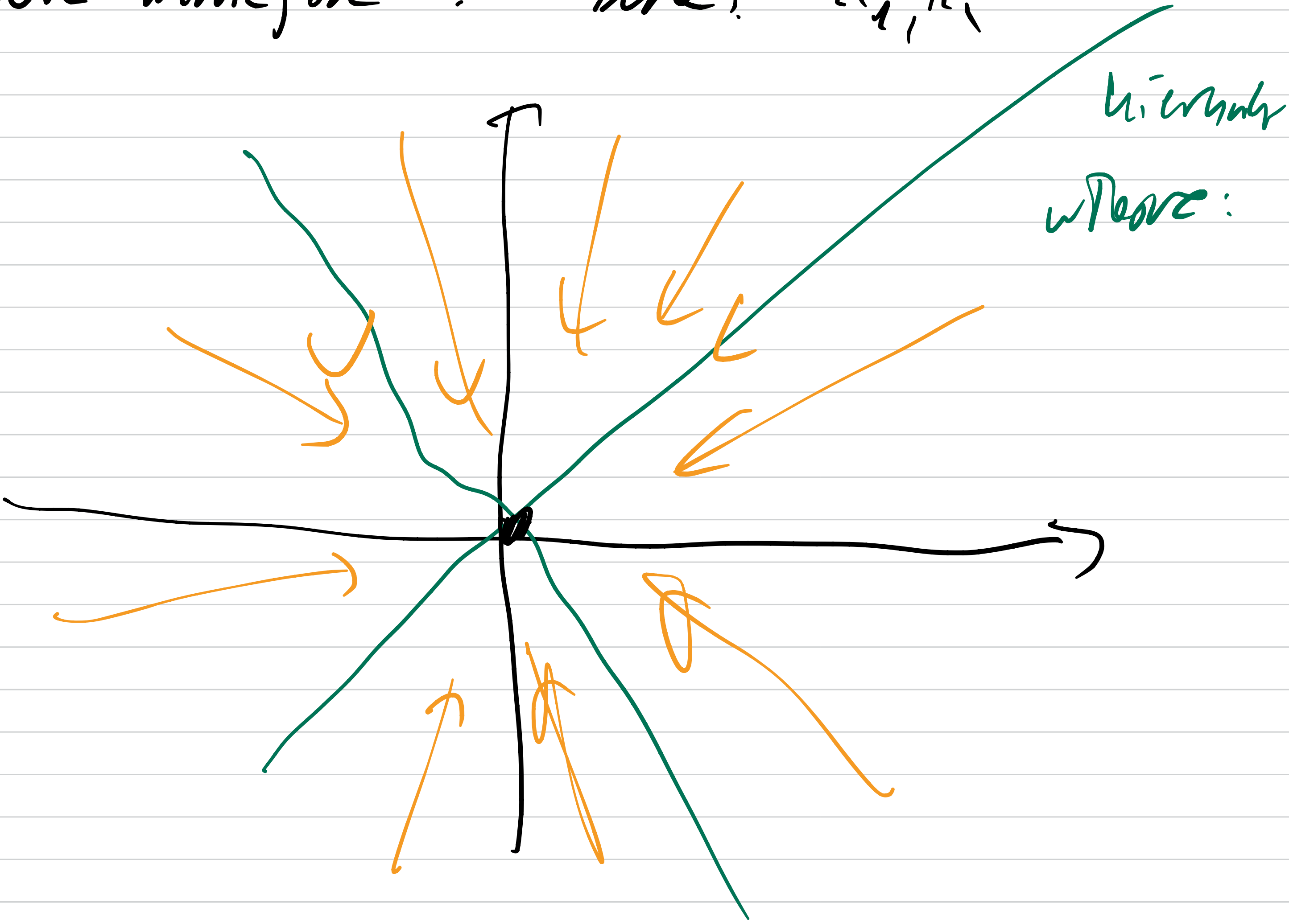


rozciąganie we wszystkich kierunkach.

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix} \qquad \lambda_1,\lambda_2>0$$

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda} & 0\\ 0 & e^{t\lambda}\end{pmatrix}$$

2) Dwie wartości własne rzeczywiste, obie mniejsze od zera. $\lambda_1, \lambda_2 < 0$

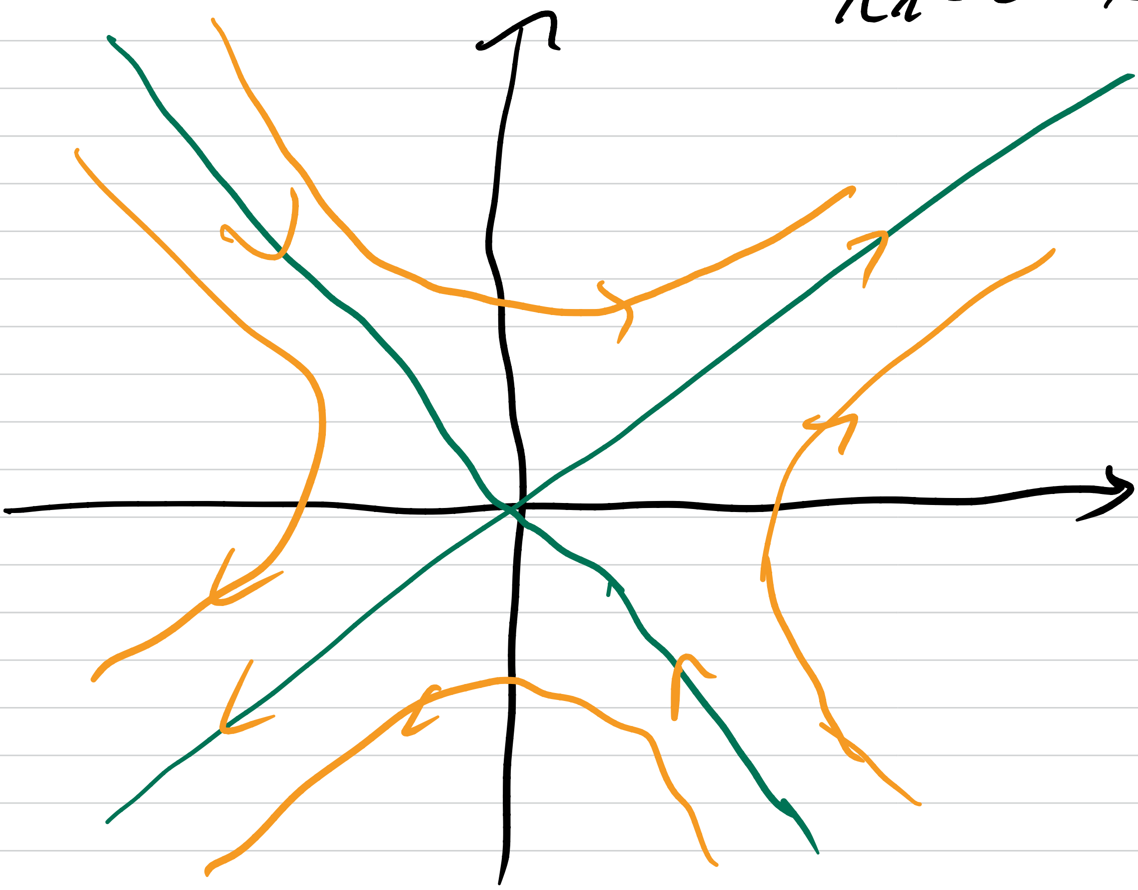


$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$$

3) mieszany. dwie rzeczywiste w.w.
jedna dodatnia, druga ujemna.

$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$



$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{t\lambda_2} \end{pmatrix}$$

$|x|^{\lambda_2}|y|^{\lambda_1}$ const

całka pierwsza

4) Wartości własne zespolone $\lambda, \bar{\lambda}$,

$Re\, \lambda > 0$.

5) $Re\, \lambda < 0$

6) $Re\, \lambda = 0$

$$\lambda = a + bi$$

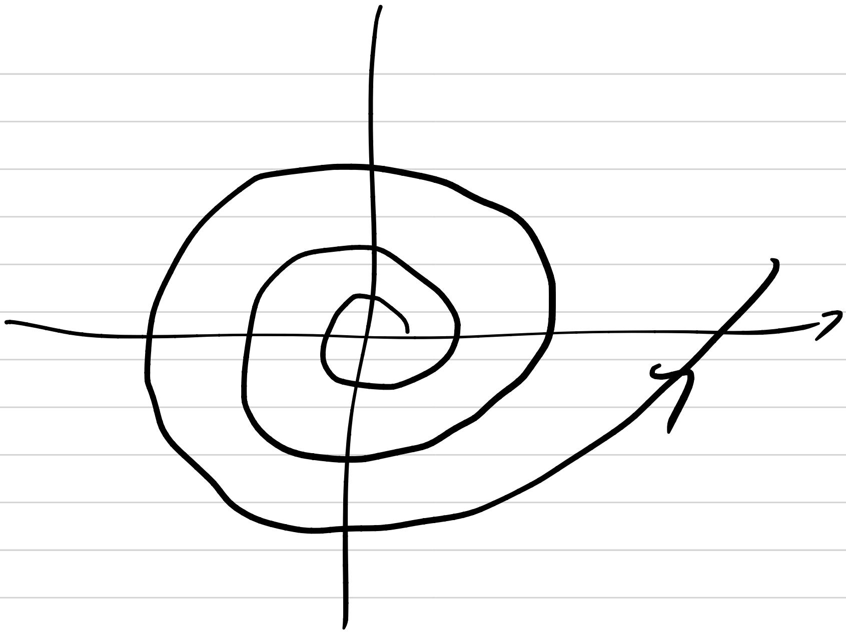
$$e^{t\lambda} = e^{ta}(\cos bti + i \sin bti).$$

w pewnej bazie niecajświtej mamy

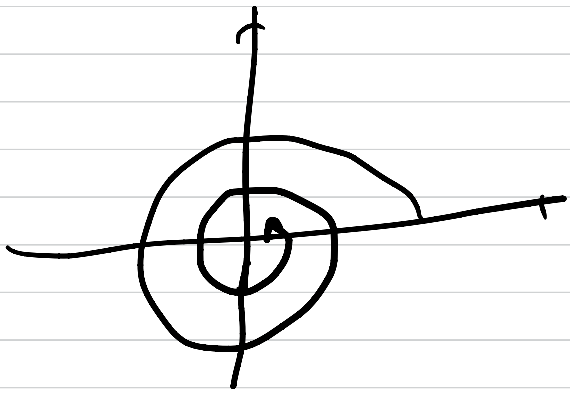
$$e^{A} = \begin{pmatrix} e^{ta}\cos bt & e^{ta}\sin bt \\ -e^{ta}\sin bt & e^{ta}\cos bt \end{pmatrix} =$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} e^{ta} & 0 \\ 0 & e^{ta} \end{pmatrix}}_{\text{jednokładność}} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos bt & \sin bt \\ -\sin bt & \cos bt \end{pmatrix}}_{\text{obrót}}$$

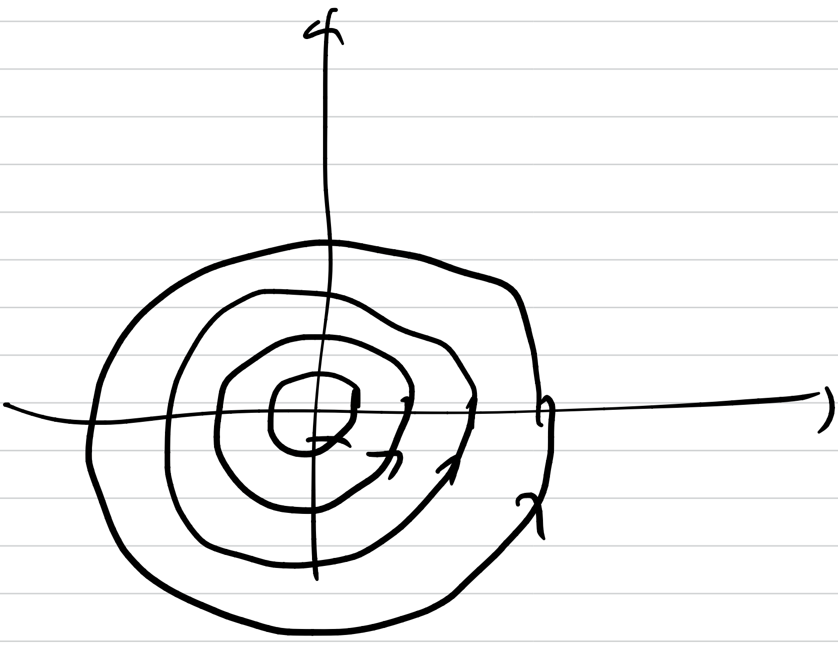
$Re\lambda > 0$



$Re\lambda < 0$



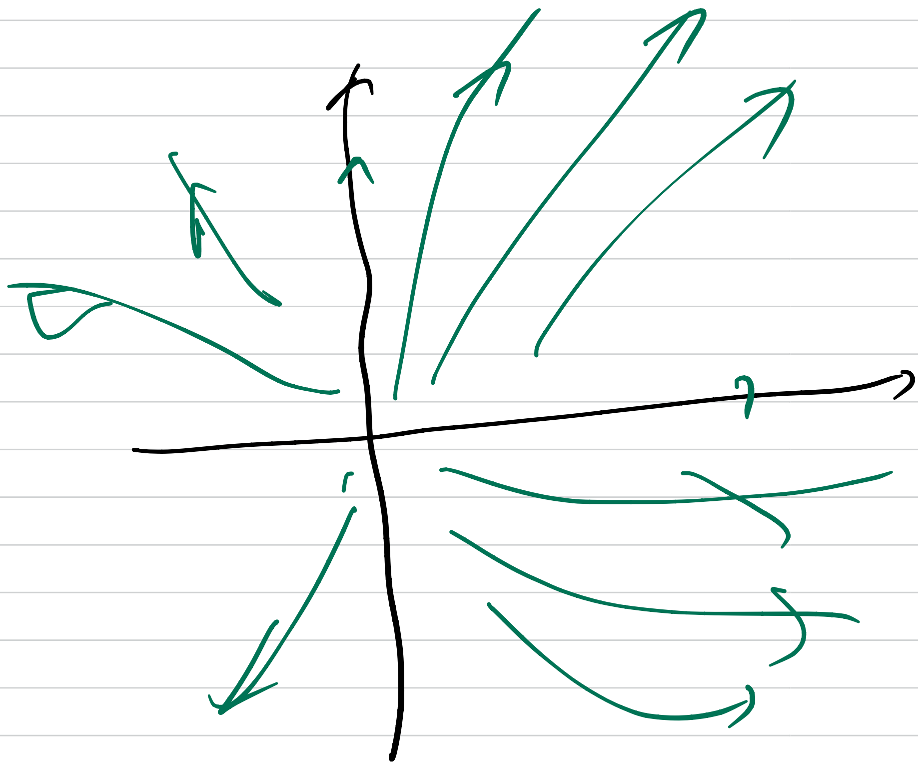
$Re\lambda = 0$



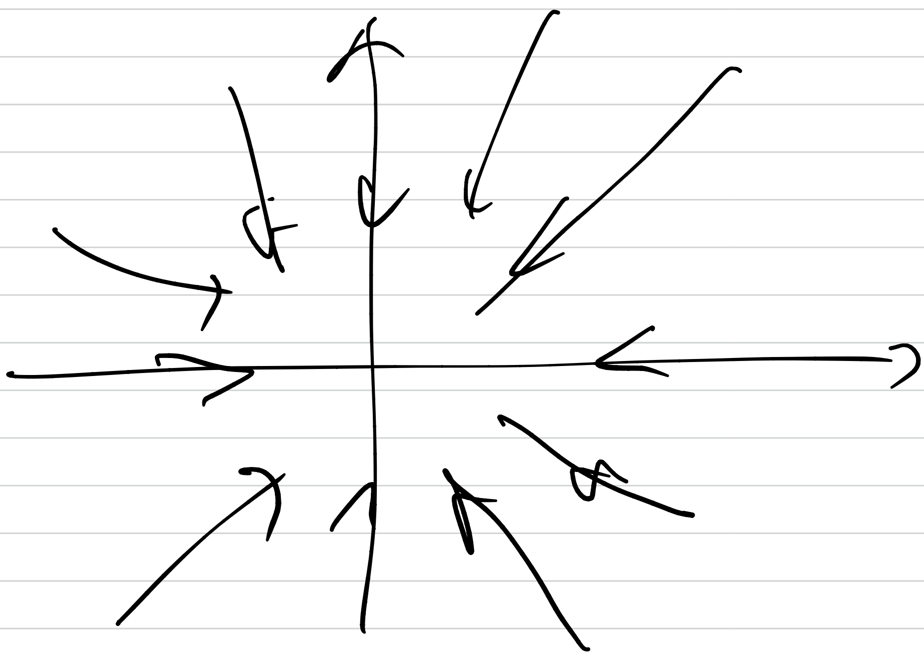
Weiter: Jordan!

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \to \quad e^{At} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & t e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

$\lambda > 0$



$\lambda < 0$

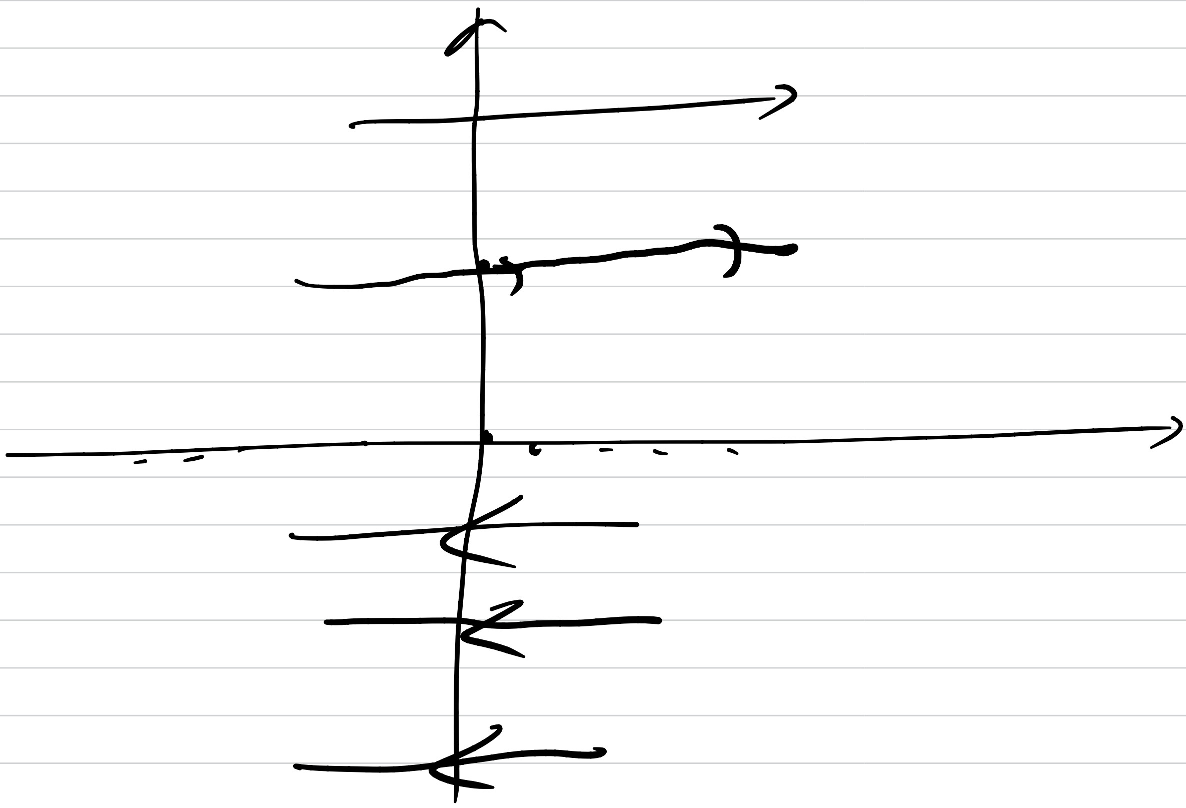


$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{matrix} y(t) \\ 0 \end{matrix} . \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dot{y}(t) = 0. \Rightarrow \quad y(t) = y_0$

$\dot{x}(t) = \quad y_0 t + x_0$



Klatka Jordana z wartością własną

$a\bar{\iota}$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 & 0 \\ -a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & -a & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos at & \sin ta \\ -\sin at & \cos ta \end{pmatrix} & ? \\ 0 & \begin{pmatrix} \cos ta & \sin ta \\ -\sin ta & \cos ta \end{pmatrix} \end{pmatrix} = e^{At}.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{\begin{pmatrix} 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & t \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{\begin{pmatrix} 0 & a & & 0 \\ -a & 0 & & \\ & & 0 & a \\ 0 & & -a & 0 \end{pmatrix} t} = \begin{pmatrix} \cos ta & \sin ta & & 0 \\ -\sin ta & \cos ta & & \\ & & \cos ta & \sin ta \\ 0 & & -\sin ta & \cos ta \end{pmatrix}$$

$$e^{t \begin{pmatrix} 0 & a & 1 & 0 \\ -a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & -a & 0 \end{pmatrix}} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos ta & \sin ta & t\cos ta & t\sin ta \\ -\sin ta & \cos ta & -t\sin ta & t\cos ta \\ & & \cos ta & \sin ta \\ & 0 & -\sin ta & \cos ta \end{pmatrix}$$

$$\det e^{A} = e^{\operatorname{Tr} A}.$$

Dowód: Obie strony są niezmiennicze względem sprzężeń.

Dla macierzy w postaci Jordana (nad $\mathbb{C}$), teza jest oczywista.

Jeśli A spełnia $\operatorname{Tr} A = 0$, to $\det e^{A} = 1$

$\operatorname{Tr} A = 0 \Rightarrow e^{A} \in SL(\mathbb{R}^n), SL(\mathbb{C}^n)$.

$A + A^T = 0$, to $(e^{A})(e^{A})^T = Id.$

$e^{A} \in O(\mathbb{R}^n)$.

$e^{(A^T)} = (e^{A})^T$

$$A + \bar{A}^T = 0, \text{ to } (e^A)(e^A)^* = Id$$

$$e^A \in U(n)$$

Lie groups (Grupy Liego)

Uwaga post mortem:

Nie musi zachodzić, że $AA^T = A^T A$, ne przykład $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ i $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

ale mimo to, jeśli $A + A^T = 0$, to $e^A \cdot e^{A^T} = Id$. Istotnie:

$$e^A e^{A^T} = \left(I + A + \frac{A^2}{2!} + \dots\right)\left(I + A^T + \frac{(A^T)^2}{2!} + \dots\right) =$$

$$= I + (A + A^T) + \left[\frac{1}{2!}A^2 + AA^T + \frac{1}{2!}(A^T)^2\right] + \dots$$

W tym ostatnim wyrażeniu, wyrazy jednorodne stopnia k są postaci:

$$\frac{1}{k!}A^k + \frac{1}{(k-1)!}A^{k-1}A^T + \frac{1}{(k-2)!}A^{k-2}\left(A^T\right)^2 + \ldots + \frac{1}{k!}\left(A^T\right)^k =$$

$$= \frac{1}{k!}\left(A^k + \binom{k}{1}A^{k-1}A^T + \binom{k}{2}A^{k-2}\left(A^T\right)^2 + \ldots + \left(A^T\right)^k\right) =$$

$$= \frac{1}{k!}\left(A^k + \left(\binom{k-1}{0} + \binom{k-1}{1}\right)A^{k-1}A^T + \left(\binom{k-1}{1} + \binom{k-1}{2}\right)A^{k-2}\left(A^T\right)^2 + \ldots + \left(A^T\right)^k\right) =$$

$$= \frac{1}{k!}\left(A^k(A+A^T) + \binom{k-1}{1}A^{k-1}(A+A^T)A^T + \binom{k-1}{2}A^{k-2}(A+A^T)\left(A^T\right)^2 + \ldots + (A+A^T)\left(A^T\right)^{k-1}\right)$$

Jako, że $A+A^T=0$, wyrazy stopnia $k>0$ się kasują.