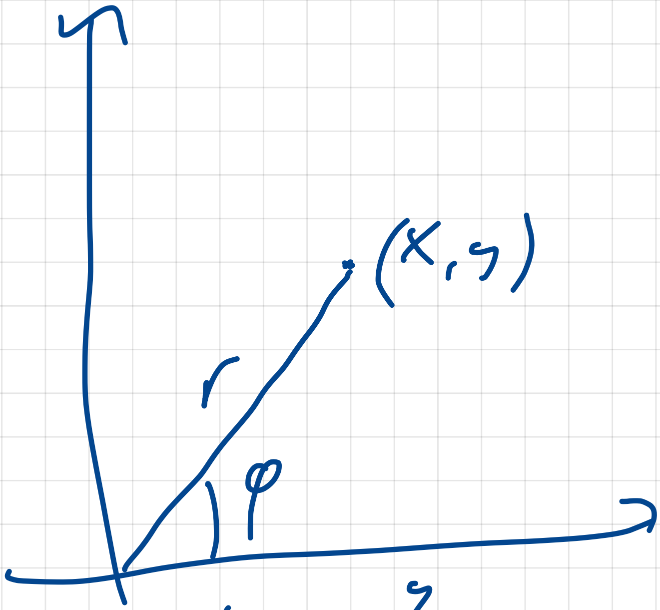
$$\dot{x} = -y + x(x^2+y^2-1)$$
$$\dot{y} = x + y(x^2+y^2-1)$$

współrzędne biegunowe:

$$r = (x^2+y^2)^{1/2}$$
$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$



$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}.$$

$$\dot{r} = \frac{d}{dt}(x^2+y^2)^{1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}(2x\dot{x} + 2y\dot{y}) =$$

$$= \frac{x\dot{x}+y\dot{y}}{r} = \frac{(x,y)\cdot(\dot{x},\dot{y})}{r}$$

$$\frac{d}{dt} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} =$$

$$\boxed{(\operatorname{arctg} z)' = \frac{1}{1+z^2}}$$

$$= \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{y}{x}\right) =$$

$$= \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{\dot{y}\cdot \cancel{x}}{\cancel{x}x} - \frac{y\dot{x}}{x^2}\right) =$$

$$= \frac{\dot{y}x - \dot{x}y}{x^2+y^2} = \frac{1}{r^2}(\dot{y}x - \dot{x}y)$$

$$\dot{x} = -y + x(x^2+y^2-1)$$
$$\dot{y} = x + y(x^2+y^2-1)$$

$$\dot{r} = \frac{1}{r}(x\dot{x} + y\dot{y}) = \frac{1}{r}(x^2+y^2)(x^2+y^2-1)$$

$$= r(r^2-1)$$

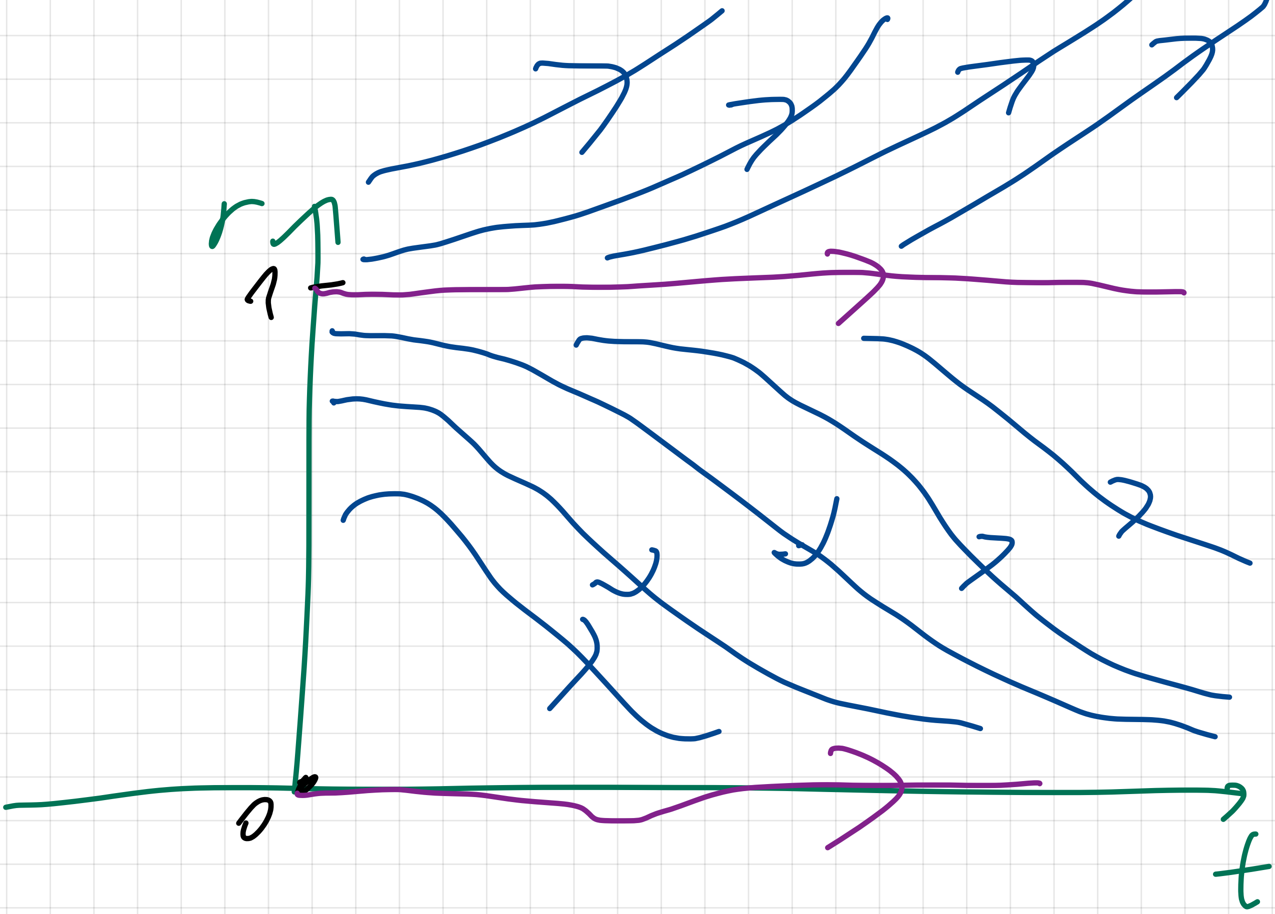
$$\dot{\varphi} = \frac{1}{r^2}(\dot{y}x - \dot{x}y) = \frac{1}{r^2}(x^2+y^2) =$$

$$= \underline{1}.$$

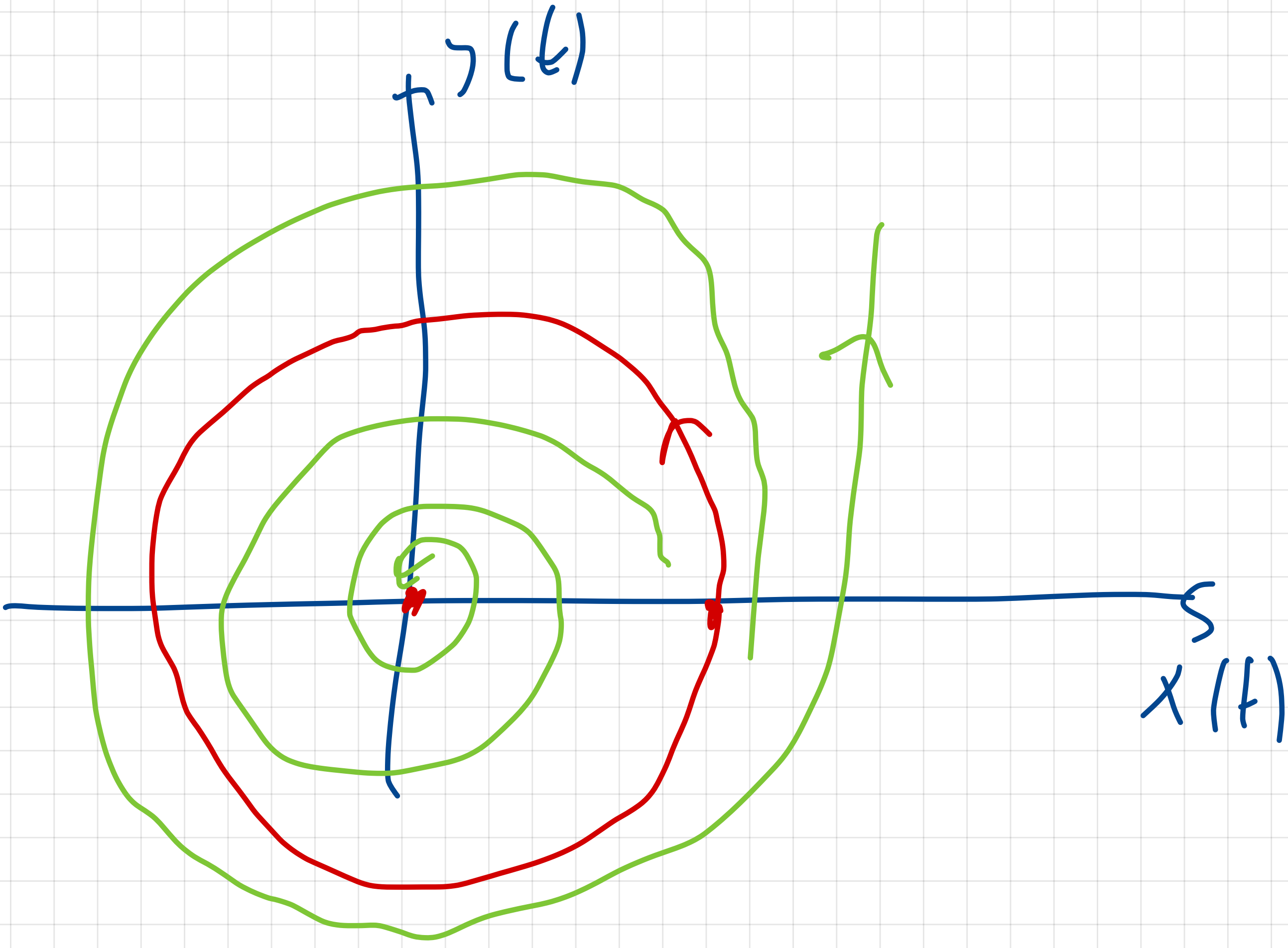
$$\dot{r} = r(r^2-1)$$

$$\dot{\varphi} = \underline{1}.$$

$$\dot{r} = r(r^2-1) \qquad r \geq 0$$



$$\dot{\varphi} = 1$$



$$\dot{x} = -y + x \sin(x^2+y^2)$$
$$\dot{y} = x + y \sin(x^2+y^2)$$

$$\dot{\varphi} \neq 1, \text{ale } \dot{\varphi} \in \left(\frac{1}{2}, 2\right)$$

Koniec testu!

Twierdzenie: Jeśli $F(x,y)$ jest klasy C^k, $k \geq 1$, oraz

$$\begin{cases} y' = F(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$y : (a, b) \to \Omega$

$F : (a, b) \times \Omega \to \mathbb{R}^n$

wtedy y jest klasy C^{k+1}.

Dowód (1).

Wiadomo, że y jest klasy C^{k+1}, jeśli:

- y jest różniczkowalna
- y' jest klasy C^k.

W związku z tym jeśli

pokażemy, że y jest klasy C^1

to otrzymamy teze, dlatego, że

złożenie funkcji dwóch klasy C^k daje

jest klasy C^k.

$$y' = F(x, y(x))$$

y jest klasy $C^1 \Rightarrow F(x,y(x))$ jest klasy C^1

$\Rightarrow$ y' jest klasy C^1 $\Rightarrow$ y jest klasy C^2. $\Rightarrow$ $F(x,y(x))$ $\{k \geq 2\}$ jest klasy C^2 $\Rightarrow$ y jest klasy C^3 $\Rightarrow$

$\Rightarrow F(x, y(x))$ (o ile $k \geq 3$) jest klasy C^3

$\ldots$ $F(x, y(x))$ jest klasy C^k $\Rightarrow$

y' jest klasy C^k $\Rightarrow$ y jest klasy C^{k+1} $\square$

Uwaga:

jeśli $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(s, y(s))\,ds$

oraz F jest ciągła, to y jest klasy C^1.

Drugi dowód:

Niech $T: X \to X$ będzie zadany wzorem

$$Ty(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(s, y(s))\,ds$$

$T(y)$

$$X = \{ y : (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \to \Omega \} :$$

$$\| y(x) - y_0 - xF(x_0, y_0) \|_{C^1}$$

$$\|f(x)\|_{C^0(A)} = \|f(x)\|_{\sup} =$$

$$= \sup_{x \in A} |f(x)| .$$

$A \subset \mathbb{R}^n.$

$$\|f(x)\|_{C^1} = \|f(x)\|_{\sup} + \|Df(x)\|_{\sup} =$$

$$A \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$$

$$A \xrightarrow{Df} L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

$$= \|f(x)\|_{\sup} + \left\|\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\right\|_{\sup} +$$

$$\dots + \left\|\frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right\|_{\sup}$$

Jeśli pokażemy, że T jest kontrakcją, oraz $T: X \to X$, to będziemy mieli dokładnie 1 punkt stały i ten punkt stały będzie w C^k.

Spróbujmy pokazać, że $T: X \to X$ oraz T jest kontrakcją dla $k=1$.

$$Ty = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(s, y(s))\, ds.$$

$$\| Ty - y_0 - (x-x_0) F(x_0, y_0) \| \leq \delta.$$

$$y(x) = y_0 + (x-x_0) F(x_0, y_0) + x^2 \ldots$$

$$Ty(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(s, y(s))\,ds$$

$$\| Ty(x) - y_0 - (x-x_0)F(x_0, y_0) \|$$

szacujemy sup funkcji:

$$\sup_{x \in [x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]} \| Ty(x) - y_0 - (x-x_0)F(x_0, y_0) \|$$

$$\leq \sup \left\| \int_{x_0}^{x} F(s, y(s)) - \underbrace{(x-x_0)}_{\leq \varepsilon} \underbrace{F(x_0, y_0)}_{\leq M} \right\| \leq$$

$$\leq \varepsilon M + \varepsilon M \leq 2\varepsilon M.$$

szacujemy pochodną:

$$\frac{d}{dx}\left(Ty(x) - y_0 - (x-x_0)F(x_0,y_0)\right) =$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\int_{x_0}^{x} F(s,y(s))\,ds - (x-x_0)F(x_0,y_0)\right)$$

$$= F(x,y(x)) - F(x_0,y_0)$$

$$\sup \left\| \frac{d}{dx} Ty(x) - y_0 - (x-x_0)F(x_0,y_0)\right\|$$

$$= \sup_{x\in[x_0-\varepsilon,\, x_0+\varepsilon]} \left\| F(x,y(x)) - F(x_0,y_0)\right\|$$

Tę wielkość, na mocy ciągłości funkcji F można uczynić dowolnie małą.

Pokażemy, że T jest kontrakcją:

$$T_{y_1}(x) - T_{y_2}(x) =$$

$$= \int_{x_0}^{x} F(s, y_1(s)) - F(s, y_2(s))\, ds$$

Norma $\| T_{y_1}(x) - T_{y_2}(x) \|_{sup}$ szacujemy

tak jak poprzednio.

Natomiast, co z $\frac{d}{dx}$?

$$\frac{d}{dx}\left(T_{y_1}(x) - T_{y_2}(x) \right) =$$

$$= \frac{d}{dx} \int_{x_0}^{x} F(s, y_1(s)) - F(s, y_2(s))\, ds =$$

$$= F(x, y_1(x)) - F(x, y_2(x)) \leq \|.\|$$

... zostawiony na następny raz...

Wniosek: rozwiązania równania

$$y' = F(x, y, \mu) \quad \text{gdzie}$$

μ jest parametrem z warunkiem

początkowym $y(x_0) = x_0(\mu)$

zależą w sposób klasy C^k od μ,

jeśli F jest klasy C^k.

Rozpatrujemy dwa operatory

$T_1 : X \to X$

$T_2 : X \to X$

jeśli T_1 jest kontrakcją, oraz T_2

jest bliski T_1, to punkty stałe są

bliskie

Przykład:

$$y' = \mu x + y^2$$

$$y(0) = \mu.$$

Zadanie: Znaleźć $\frac{\partial}{\partial \mu} y(1) \Big|_{\mu=0}$.

Rozwiązanie:

$$y_\mu' = \mu x + y_\mu^2$$

$$y_\mu(0) = \mu$$

przepisujemy z jawną zależnością.

(*) $y_\mu(x) = y_0(x) + \mu y_1(x) + \mu^2 y_2(x) \ldots$

rozwinięcie y w szereg potęgowy względem parametru.

$$y_0'(x) + \mu y_1'(x) = \mu x + (y_0(x) + \mu y_1(x) + \dots)^2$$

$$y_0(0) + \mu y_1(0) + \dots = \mu$$

$$\begin{cases} y_0'(x) + \mu y_1'(x) + \dots = \mu x + y_0^2(x) + 2\mu y_0 y_1 + \dots \\ y_0(0) + \mu y_1(0) + \dots = \mu \end{cases}$$

Wyrazy przy μ^0: przy μ^1

$$\begin{cases} y_0' = y_0^2 \\ y_0(0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1'(x) = x + 2 y_0 y_1 \\ y_1(0) = 1 \end{cases}$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$y_0(x) = 0 \implies \begin{aligned} & y_1'(x) = x \\ & y_1(0) = 1 \end{aligned}$$

$$y_1(x) = \frac{x^2}{2} + 1$$

Obliczyć $\frac{\partial}{\partial \mu} y(1). \Big|_{\mu=0}$

$$y(1) - y_\mu(1) = y_0(1) + \mu y_1(1) + \dots$$

$$\frac{\partial}{\partial \mu} y_\mu(1)\Big|_{\mu=0} = y_1(1)$$

$$y_1(x) = 1 + \frac{x^2}{2}$$

$$y_1(1) = \frac{3}{2}$$

$$y' = \mu x + y^2$$

$\mu = 0$ — umiemy

$\mu \neq 0$

$F: \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}^n$

F jest klasy C^k $k \geq 1$

oraz

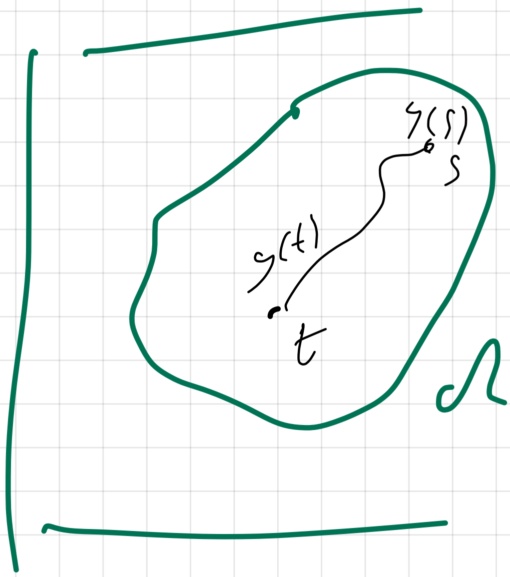
każde rozwiązanie wysycone jest określone na całej prostej

założenia

$\varphi: \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \Omega.$

$(y_0, t, s).$

$$\left.\begin{aligned} y' &= F(x, y) \\ y(t) &= y_0 \end{aligned}\right\}$$



$$\varphi(y_0, t, s) = y(s)$$

φ ma następujące własności:

1) $\varphi(y_0, t, s)$ jest dobrze określone, gdy:

a) rozwiązanie $y' = F(x, s)$
$y(t) = y_0$

jest jednoznaczne i określone na całej prostej

2) φ jest klasy C^k (wniosek z tw. o gładkiej zależności).

3) $\varphi(\varphi(y_0, t_0, t_1), t_1, t_2)) =$
$\varphi(y_0, t_0, t_2))$

4) $\varphi(y_0, t, t) = y_0$

Gdyby napisać nieco bardziej

ściśle: $\varphi(y, t, s) = \varphi_{s,t}(y)$.

$$\varphi_{t_2,t_1} \circ \varphi_{t_1,t_0} = \varphi_{t_2,t_0}.$$

$$\varphi_{t,t} = id.$$

$$\varphi_{t_2,t_1} = \varphi_{t_1,t_2}^{-1}$$

Uproszczenie: (niewielkie)

$y' = F(y)$ (układ autonomiczny, to znaczy taki, że F nie zależy jawnie od x.

wtedy $\varphi_{t_2,t_1} = \varphi_{t_2+s,\, t_1+s}$

$y' = F(y)$ $\quad$ $y_1' = F(y_1)$

$y(x_0) = y_0$ $\quad$ $y_1(x_1) = y_0$

wtedy $y_1(x + (x_0 - x_1)) = y(x)$

istotnie: $y_2(x) = y_1(x + (x_0 - x_1))$ spełnia

równanie $y_2' = F(y_2)$

z warunkiem początkowym

$y_2(x_0) = y_0$.

z jednoznaczności wynika, iż $y_2 = y$.

$\varphi(y_0, t, s) = \varphi(y_0, t-s, 0)$.

dokładniej $\varphi_t(y_0) = \varphi(y_0, t, 0)$.

zachodzi $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$.

Def: φ_t nazywamy potokiem (flow) układu.