WYKŁAD 3. 10 marca 2020

RRZ

Próbowaliśmy udowodnić tw. o rozwiązaniu nasyconym:

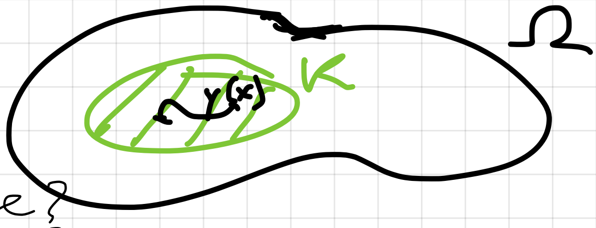
Jeśli $y' = F(x,y)$, $F: (a,b) \times \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

oraz rozwiązanie $y(x)$ jest określone na

$(a', b') \subsetneq (a,b)$ i $\forall x \in (a', b')$ $y(x) \in K$

K-zwarty

to y nie jest nasycone.



rozwiązanie, które siedzi w zbiorze zwartym, jest określone na całym przedziale, w którym jest F.

Głęboka konsekwencja: jeśli mamy rozw., które są ograniczone, to są określone na całej prostej.

Lepszy dowód (już jest w poprzednim wykładzie)

$$Ty(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(s, y(s))\, ds$$

Jak ktoś nie może zaakceptować tego dowodu, bo jest np. kluską albo pierogiem, to proszę zaświadczenie z Zaorecha.

$$X = \{ y : [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \to \bar{B}(y_0, \delta) \}$$

$\varepsilon < \frac{\delta}{M}$ gdzie $M = \sup\limits_{\substack{x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \\ \|y - y_0\| \leq \varepsilon}} |F(x,y)|$

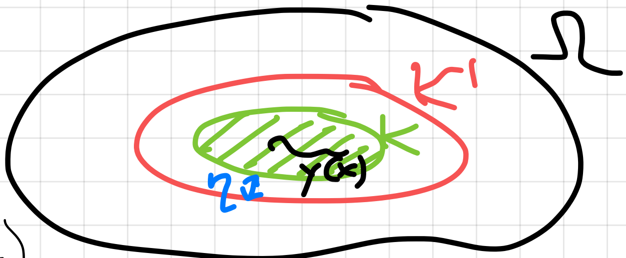
$2\delta\varepsilon L < 1$ gdzie L jest stałą Lipschitza dla F (względem drugiej zmiennej) na zbiorze $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \times \bar{B}(y_0, \delta)$.

Uwaga. ε i δ dobieramy do y_0, L i M, a nie do konkretnej f-cji F.

$K' \subset \Omega$, K' zwarty,

$K \subset \operatorname{Int} K'$

(istnienie tego zbioru - topologia)

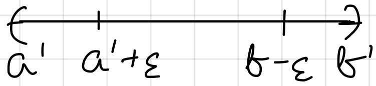


Weźmy „$\eta = \operatorname{dist}(\Omega \setminus K', K)$" $K + B(0,\eta) \subset K'$ ← suma algebraiczna dwóch zbiorów

$$\eta < \inf_{\substack{x \in K \\ x' \notin K'}} \|x - x'\|$$

Przypuśćmy (jak wcześniej) że $a' \neq a$

$\varepsilon_0 > 0$ tż. $a + \varepsilon_0 < a'$, $b - \varepsilon_0 > a'$



⊛ $[a+\varepsilon_0, b' - \varepsilon_0] \times K'$ ← to jest zwarte

Ustalmy $\varepsilon < \varepsilon_0$.

Wybieramy $M' = \sup_{⊛} |F(x,y)|$

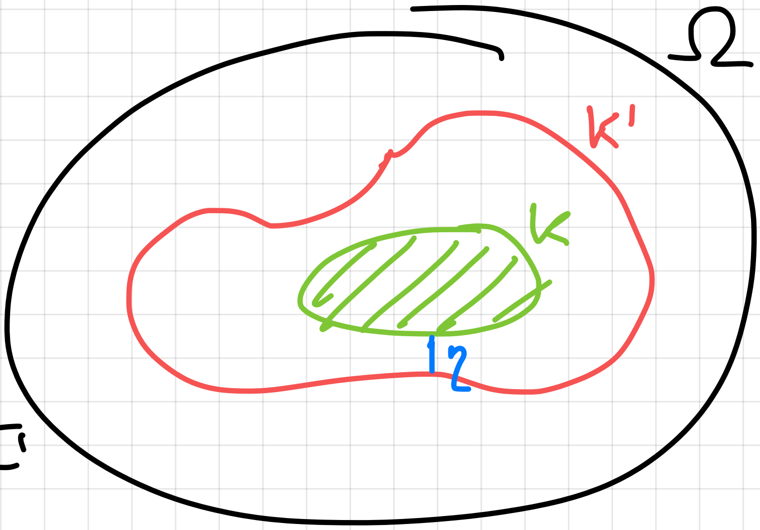
W zeszłym tygodniu starałam się pisać wyraźnie i limit wyraźnego pisania na ten semestr został wyczerpany.

L' - stała Lipschitza na ⊛

Dobieramy $\delta < \eta$.

Zmniejszając ε (jeśli trzeba) możemy zagwarantować, że $\varepsilon < \frac{\delta}{M'}$, $2\varepsilon\delta L' < 1$

$$\varepsilon < \frac{1}{2\delta L'}$$



To nam mówi, że dla dowolnego $y_0 \in K$

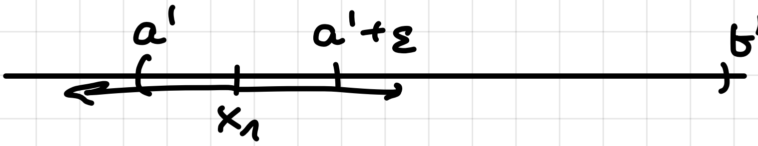
$x_0 \in [a+\varepsilon_0+\varepsilon, b-\varepsilon_0-\varepsilon]$ rozwiązanie z warunkiem początkowym $y(x_0) = y_0$ jest określone na $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$.

Weźmy sobie punkt

$$x_1 \in (a', a'+\varepsilon) \cap [a+\varepsilon_0+\varepsilon, b-\varepsilon-\varepsilon_0]$$

$b-\varepsilon-\varepsilon_0 > a'+\varepsilon$ dla d. małego ε.

$a'+\varepsilon > a+\varepsilon_0+\varepsilon$



↓

mogę rozszerzyć rozw. o ε w prawo i w lewo.
Idąc w lewo wychodzimy z przedziału.

Rozszerzamy rozw. do $(x_1-\varepsilon, b')$

∎

Twierdzenie o ciągłej zależności

$y' = F(x,y)$ $\quad F: (a,b)\times\Omega \to \mathbb{R}^n$

$y(x_0) = y_0$ $\quad F$ ograniczona na $(a,b)\times\Omega$

i lipschitzowska ze stałą L względem 2. zmiennej.

$\delta: \ B(y_0, \varepsilon) \subset \Omega$

$\varepsilon: \ (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \subset (a,b)$

$\varepsilon < \frac{\delta}{M} \qquad 2\varepsilon\delta L < 1$

małe theta :)

Wtedy $\forall \theta > 0 \ \exists \eta > 0$ t.ż. jeśli

1° $\|y_1 - y_0\| < \eta$

2° $\|F_1(x,y) - F_0(x,y)\| < \eta \quad \forall x,y \in (a,b)\times\Omega$

ciągła

to DOWOLNE rozwiązanie równania $\begin{cases} y'(x) = F_1(x, y_1(x)) \\ y_1(x_0) = y_1 \end{cases}$

spełnia:

$$\|y_1(x) - y_0(x)\| < \delta \quad \forall x \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$$

Dowód

część łatwa, którą próbujemy zrozumieć

$$X = \{ y : (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \longrightarrow \overline{B(y_0, \delta)} \}$$

$T : X \to X$

$Ty(x) \sim T(y)(x)$

$$Ty(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(s, y(s))\, ds$$

$$T_1 y_1(x) = y_1 + \int_{x_0}^{x} F_1(s, y(s))\, ds$$

PLAN

1. Musimy pokazać, że $T_1 : X \to X$ (nie wystaje z X)
2. Następnie, że $\| T_1 y(x) - Ty(x) \| < \xi$ ← kr

$\rho(T_1 y, Ty)_{sup} < \xi$ dla pewnego ξ i dla wszystkich $y \in X$ i $\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$

1 i 2 ⇒

$T : X \to X$ T jest kontrakcją o współczynniku R

$R = 2\varepsilon\delta L$

$T_1 : X \to X$ T_1 jest bliski T, odległy o ξ.

Przypuśćmy, że $Ty = y$ $T_1 y_1 = y_1$

$$\rho(T^k y_1, T^{k-1} y_1) \leq R^{k-1} \rho(Ty, Ty_1) = R^{k-1} \rho(Ty_1, T_1 y_1) <$$

$$< R^{k-1} \xi$$

$$\rho(T^k y, y_1) < (R^{k-1} + R^{k-2} + \ldots + R + 1)\, \xi$$

$$\downarrow{\scriptstyle k \to \infty} \qquad \downarrow{\scriptstyle k \to \infty}$$

$$\rho(y, y_1) \qquad \frac{\xi}{1 - R}$$

$$\rho(y, y_1) < \frac{\xi}{1-R}$$

i... ~~Dobieramy~~ dobierzemy takie η, żeby $\frac{\xi}{1-R} < \theta$.

$$\| T_1 y_1(x) - y_0 \| \overset{!}{<} \delta$$ musimy to mieć

(1)

$$\| y_1 - y_0 + \int_{x_0}^{x} F_1(x, y_1(x)) \| \overset{!}{<} \delta$$

$$\wedge|$$

$$\eta + \| \int_{x_0}^{x} F_1(x, y_1(x)) \| \leqslant \eta + \varepsilon(M + \eta)$$

ta sama eta

dł. przedziału

sup F

Wiem, że $\varepsilon M < \delta$

to $\varepsilon M + \eta(1+\varepsilon) < \delta$ jeśli η odpowiednio małe.

(2) $y : (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \longrightarrow \overline{B(y_0, \delta)}$

$$\| Ty(x) - T_1 y(x) \| = \| y_0 + \int_{x_0}^{x} F(s, y(s)) ds - \int_{x_0}^{x} F_1(s, y(s)) ds - y_1 \|$$

$$\leqslant \| y_0 - y_1 \| + \| \int_{x_0}^{x} F(s, y(s)) ds - \int_{x_0}^{x} F_1(s, y(s)) ds \|$$

$$\leqslant \eta + \varepsilon \eta$$

$$\xi = \eta(1+\varepsilon)$$

Korzystamy z zał. 1° i 2° z twierdzenia

musi być $\frac{\eta(1+\varepsilon)}{1-R} < \theta$

Uwaga. F zazwyczaj przyjmuje wartości wektorowe, więc jak ją całkujemy to całkujemy funkcję wektorową.

Do pełni szczęścia brakuje nam:

Twierdzenie

$y' = F(x,y)$

Jeśli F jest klasy C^k ze względu na obie zmienne, to y jest klasy C^{k-1}.

Podejście 1: dowód tw. o jednoznaczności, tylko zmieniamy def. przestrzeni X
(np. zamiast fcje ciągłe, to C^1)
będą inne oszacowania, ale ogólnie pracuje.

Dowód: TO BĘDZIE ZA TYDZIEŃ

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(s, y(s))\, ds$$ ~~to~~ to $y' = F(x,y)$ i y jest klasy C^1.

Ogłoszenie techniczne:
SZUKAMY GWIAZDY SOCJOMETRYCZNEJ :D
która będzie zbierała pytania od osób nieobecnych w sali na wykładzie.