Wykład 2

Dokończenie dowodu tw.

Cauchy'ego - Picarda - Lindelöfa

$$T : X \to X$$

$$Ty(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(s, y(s))\, ds$$

$$y' = F(x, y(x)) \qquad y'(x_0) = y_0$$

$$F : (a,b) \times \Omega \to \mathbb{R}$$

F ciągła i lokalnie lipschitzowska ze względu na drugą zmienną

$$(x_0, y_0) \in (a,b) \times \Omega$$

$$X = \{ y : [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \to \Omega :$$

$\forall x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ zachodzi $\| y(x) - y_0 \| \leq \delta \}$

$$Ty(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(s, y(s))\, ds$$

Pokażemy, że T jest kontrakcją.

czyli $\exists\, L < 1$:

$$\|Ty_1 - Ty_2\|_{sup} \leq L \cdot \|y_1 - y_2\|_{sup}$$

$$\|Ty_1 - Ty_2\|_{sup} =$$

$$= \left\| \int_{x_0}^{x} F(s, y_1(s)) - F(s, y_2(s))\, ds \right\|_{sup}$$

$$= \sup_{x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]} \left| \int_{x_0}^{x} F(s, y_1(s)) - F(s, y_2(s))\, ds \right|$$

$$\leq \sup_{x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]} \int_{x_0}^{x} \left| F(s, y_1(s)) - F(s, y_2(s)) \right| ds$$

$$\sup_{x\in[x_0-\varepsilon,\, x_0+\varepsilon]} \int_{x_0}^{x} \| F(s, y_1(s)) - F(s, y_2(s)) \| ds \leq \ldots$$

Przypuśćmy, że na zbiorze

$[x_0-\varepsilon,\, x_0+\varepsilon] \times [y_0-\delta,\, y_0+\delta]$

funkcja F spełnia warunek

$\| F(x, y_1) - F(x, y_2) \| \leq L' \| y_1 - y_2 \|$.

to jest wniosek z założeń.

$$\leq \ldots \sup_{x\in[x_0-\varepsilon,\, x_0+\varepsilon]} \int_{x_0}^{x} L' \| y_1 - y_2 \| \leq$$

ale $\| y_1(x) - y_0 \| < \delta$

$\| y_2(x) - y_0 \| < \delta$

czyli $\| y_1(x) - y_2(x) \| \leq 2\delta$

$$\leq \sup_{x\in[x_0-\varepsilon,\, x_0+\varepsilon]} \int_{x_0}^{x} 2L'\delta$$

$$\leq \sup_{x\in[x_0-\varepsilon,\, x_0+\varepsilon]} \int_{x_0}^{x} 2L'\delta =$$

$$2L'\delta\varepsilon.$$

T jest kontrakcją, jeśli $2L'\delta_\varepsilon < 1$.

Zmniejszając ε, jeśli to konieczne możemy zagwarantować, że T jest kontrakcją $\square$.

Rozwiązanie to jest para: funkcja + zbiór na którym jest określona

<u>Uwaga</u>: Zakładamy, że ten zbiór jest spójny.

Inaczej:

$$y' = y$$

$$y(x) = \begin{cases} e^x & x \in [-1,1] \\ 2e^x & x \in [2,3] \end{cases}$$

Rozpatrzmy równanie

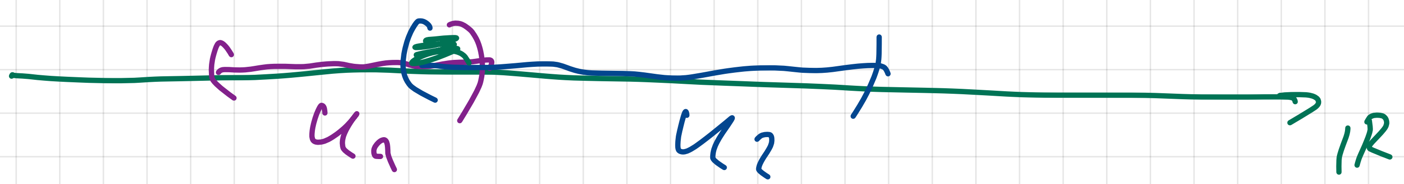
$$y' = F(x, y(x))$$

przypuśćmy, że równanie ma lokalnie jednoznaczne rozwiązanie.

Stwierdzenie: dwa rozwiązania

$y_1 : U_1 \to \mathbb{R}$, $y_2 : U_2 \to \mathbb{R}$ $\quad U_1, U_2$ otwarte

* albo pokrywają się na $U_1 \cap U_2$
* albo są różne na całym $U_1 \cap U_2$.



Dowód

$V = \{x \in U_1 \cap U_2 : y_1(x) = y_2(x)\}$.

Teza stwierdzenia można przeformułować na:

V jest albo równy $U_1 \cap U_2$, albo jest pusty.

V jest domknięty.

V jest otwarty.

przypuśćmy, że $x_0 \in V$, dobieramy $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ jak w twierdzeniu o lokalnej jednoznaczności. Zmniejszając ε możemy zagwarantować, że $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset U_1 \cap U_2$

$$\left.\begin{array}{l} y_1 |_{(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)} \\ y_2 |_{(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)} \end{array}\right\}$$

oba są rozwiązaniami z warunkiem $y_1(x_0) = y_2(x_0)$

V jest otwarty, V jest domknięty

$V \subset U_1 \cap U_2$, a $U_1 \cap U_2$ jest spójny

to znaczy, że albo $V = U_1 \cap U_2$, albo

$V = \emptyset$.

$$z' = \frac{1}{2z} \qquad z \neq 0.$$

$$z = c\sqrt{t}$$

w dziedzinie zespolonej

funkcja $\sqrt{t}$ nie jest określona

na całym $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

$$y' = F(x, y)$$

y_1 określone na U_1

y_2 określone na U_2.

założmy, że

$y_1 = y_2$ na $U_1 \cap U_2$

wtedy funkcja

$$y_3(x) = \begin{cases} y_1(x) & x \in U_1 \\ y_2(x) & x \in U_2 \end{cases}$$

jest rozwiązaniem na $U_1 \cup U_2$

Dla warunku $y(x_0) = y_0$

rozpatrujemy rodzinę $\mathcal{Y}$ wszystkich

par (y, U) : y jest rozwiązaniem

$y' = F(x, y(x))$ $y(x_0) = y_0$ y określone

na U. , $x_0 \in U$

Mamy częściowy porządek zadany

przez inkluzję.

istnieje element maksymalny (y, U)

Definicja: Ten element maksymalny nazywamy

rozwiązaniem wysyconym
(ang. saturated solution)

Przykład:
$$y' = y^2+1 \quad /: y^2+1$$

$$(\operatorname{arctg} y)' = 1$$

$$y = \operatorname{tg}(x+c)$$

dla warunku początkowego $y(x_0)=0$

rozwiązanie jest $y = \operatorname{tg}(x-x_0)$

określone na $\left(x_0-\frac{\pi}{2}, x_0+\frac{\pi}{2}\right)$

rozwiązanie wysycone jest

$y' = F(x, y(x))$

$F : (a, b) \times \Omega \to \mathbb{R}$

ciągła i lok. lip. względem drugiej zmiennej.

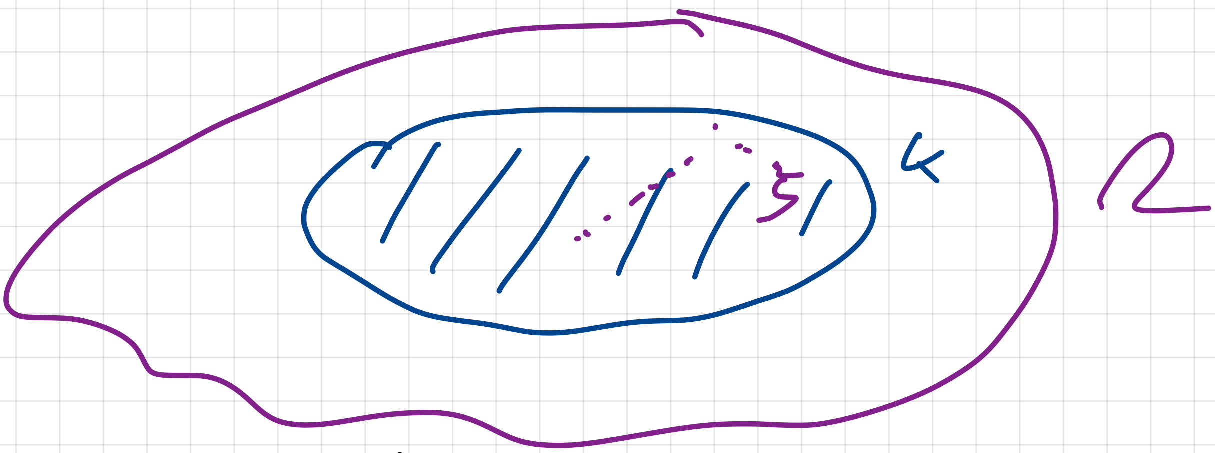
Dowód znajduje się na ostatniej stronie

Przypuśćmy, że para (y, U), $U \in (a, b)$ jest rozwiązaniem równania z warunkiem początkowym $y(x_0) = y_0$

oraz:

1) $U \neq (a, b)$

2) $\exists K \subset \Omega$, K zwarty, t. że $y(x) \in K$ dla wszystkich $x \in U$.



Wtedy (y, U) <u>nie jest</u> rozwiązaniem wysycanym.

Zarys schematu idei dowodu:

U jest przedziałem (a', b')

Przypuśćmy, że $a' \neq a$. (może być, że $b' \neq b$)

weźmy ciąg $x_n = a' + \frac{1}{n}$.

$y_n = y(x_n) \in K$.

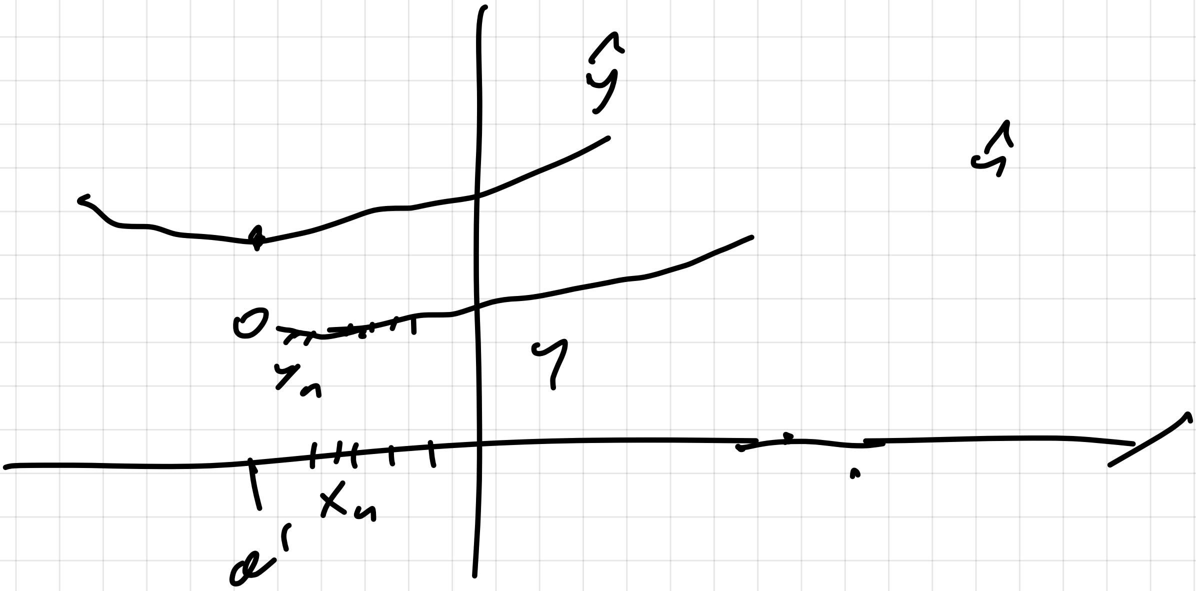
przechodząc, jeśli trzeba, do podciągu możemy przyjąć, że $y_n \longrightarrow \bar{y} \in K$.

Rozpatrujemy $\hat{y}(x)$ jako rozwiązanie z warunkiem początkowym $\hat{y}(a') = \bar{y}$

$\hat{y}(x)$ jest określone na pewnym przedziale $(a'-\varepsilon, a'+\varepsilon)$

Jeśli $x_n \in (a'-\varepsilon, a'+\varepsilon)$, to

$\hat{y}(x_n) = y(x_n)$. / tu się zacięliśmy! /

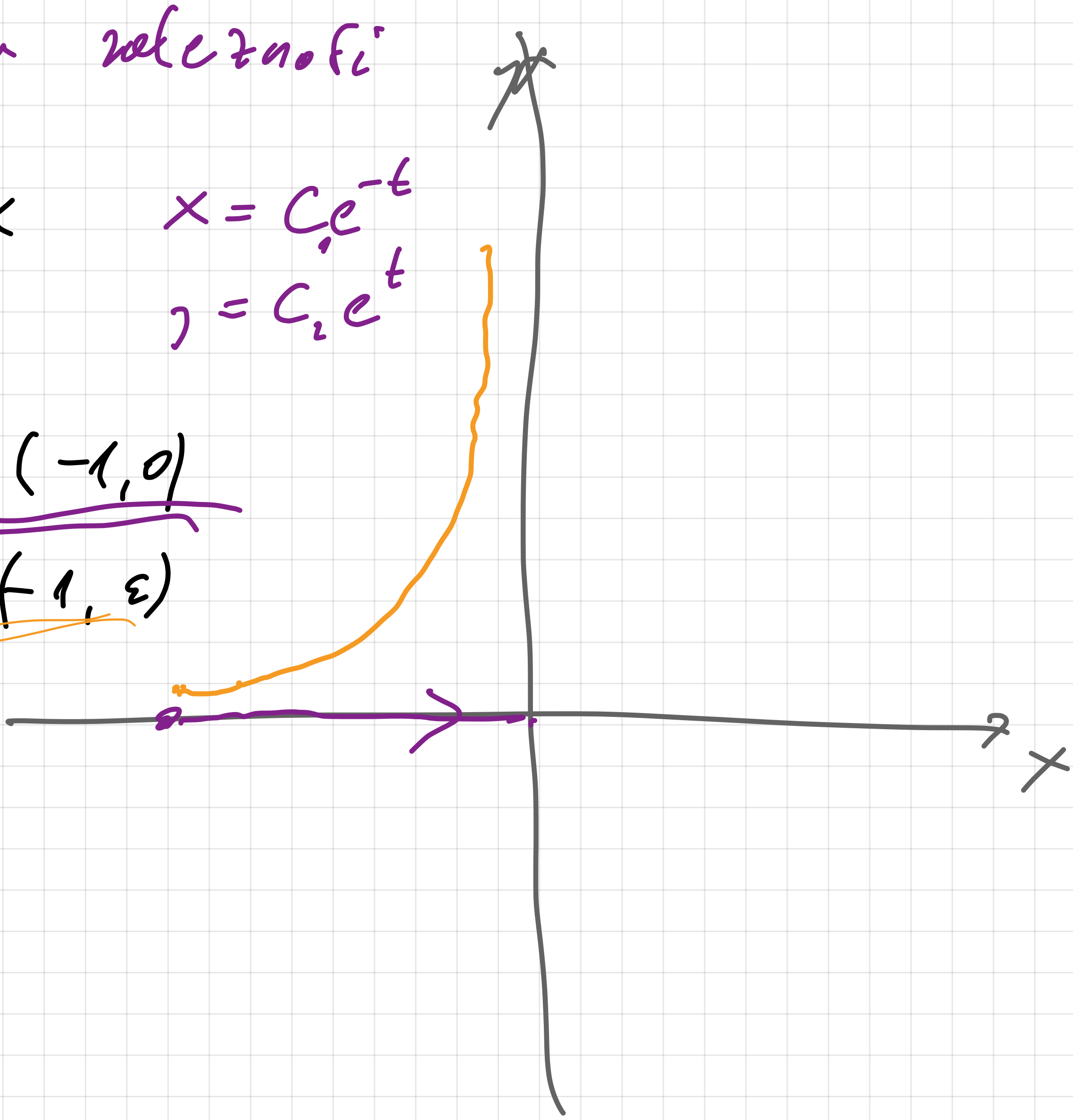


Ciągłość zależności

$$\dot{x} = -x \qquad x = C_1 e^{-t}$$
$$\dot{y} = y \qquad y = C_2 e^{t}$$

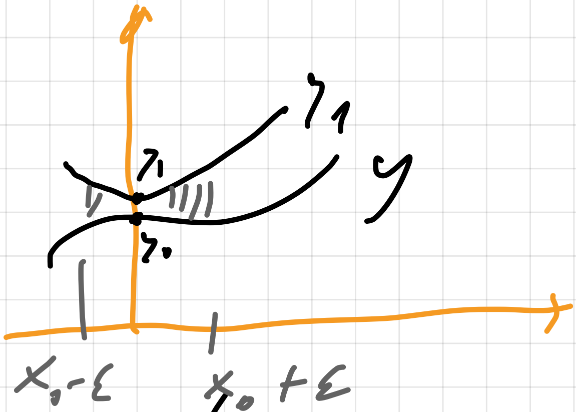
$(x_0, y_0) = (-1, 0)$

$(x_0, y_0) = (-1, \varepsilon)$



Twierdzenie o ciągłej zależności od warunku początkowego.

Niech
$$y' = F(x, y)$$
$$y(x_0) = y_0$$



F ciągła i lokalnie lipschitzowska ze względu na y.

Niech też $\varepsilon > 0$ będzie taki, jak w dowodzie twierdzenia o istnieniu i jedn.

Przy tych założeniach dla dowolnego $\vartheta > 0$ $\exists \eta > 0$, że jeśli

$\|y_1 - y_0\| < \eta$ to dla rozwiązania

$$y_1' = F(x, y_1)$$
$$y_1(x_0) = y_1$$

zachodzi

$\|y_1(x) - y(x)\| < \vartheta$ dla $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$

Alternatywny dowód stwierdzenia z wykładu.

Oprzemy się o następującą obserwację:

Jeśli $y' = F(x,y)$, $F: (a,b) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

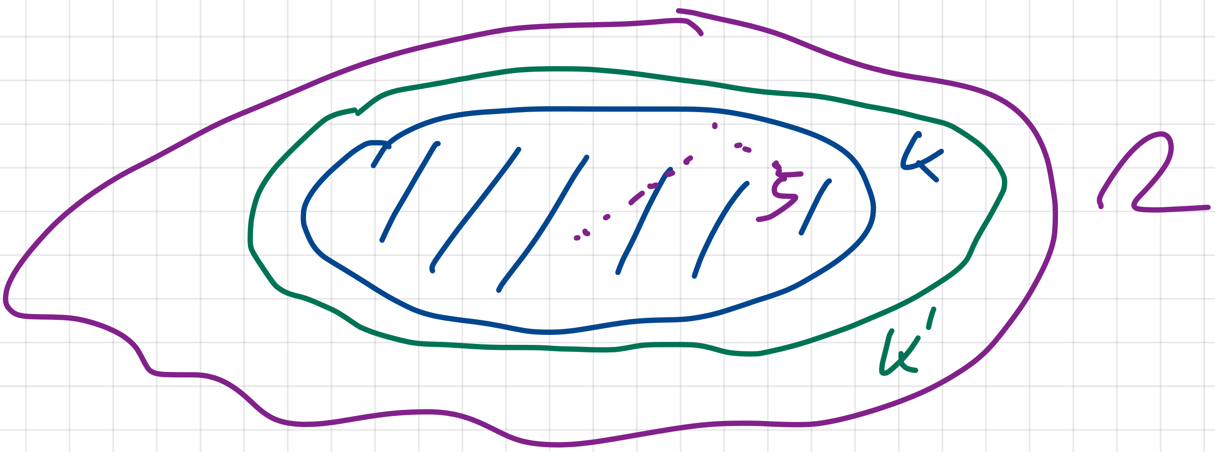
jest ograniczona przez M, oraz spełnia warunek Lipschitza na całym zbiorze $(a,b) \times \mathbb{R}$ ze względu na drugą zmienną ze stałą L, to

operator $T: X \to X$ jest kontrakcją, gdy $X = \{ y : [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \to B(y_0, \delta) \}$

oraz: $\varepsilon < \frac{\delta}{M}$ $2\delta\varepsilon L < 1$.

To oznacza, że długości przedziału, na którym rozwiązanie jest określone zależy od L, M, ale nie zależy od wyboru punktu..

Po tej obserwacji dowodzimy twierdzenia o rozwiązaniu wysyconym



Niech K' będzie pewnym zbiorem zwartym, takim, że $\mathrm{Int}\, K' \supset K$ oraz $K' \subset \Omega$. Istnienie takiego zbioru pozostawiamy jako ćwiczenie.

Zbiór K' jest zwarty, więc F ma stałą Lipschitza L' na F względem drugiej zmiennej. Niech też M' będzie maksimum F na L'. Przypuśćmy też, że $\delta << 1$ jest taki, że $B(0,\delta) + K \subset K'$; ten ostatni napis rozumiemy, że dowolna kula o środku w pewnym $x_0 \in K$ i promieniu δ jest zawarta w K'.

Dobierzmy ε taki, aby:

$$\varepsilon < \frac{\delta}{M'}, \quad 2L'\varepsilon\delta < 1.$$

Wtedy, dowolne rozwiązanie startujące z punktu $x_1 \in [a,b]$ i $y_1 \in K$ jest jednoznaczne na $[x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon]$.

Weźmy do naszego rozwiązania:

$y : (a', b') \to K$

Przypuśćmy, że $a' \neq a$,
oraz weźmy punkt $x_2 \in (a', b')$ taki, że
$x_2 > a + \varepsilon$, $x_2 < a + \varepsilon$. Niech $y(x_2) = y_2$.
Rozwiązanie równania startujące z
punktu (x_2, y_2) przedłuża się na
cały przedział $(x_2 - \varepsilon, x_2 + \varepsilon)$.
Ale to oznacza, że $y : (a', b') \to \mathbb{R}$
przedłuża się do przedziału $(x_2 - \varepsilon, b')$.
Sprzeczność z założeniem, że y było
rozwiązaniem wysycającym.