Czwarty zestaw zadań z równań różniczkowych zwyczajnych

Maciej Borodzik

Termin oddania: 6 czerwca 2007, godzina 12:00.

Zadania można oddawać elektronicznie (pdf), lub na kartkach.

Zadanie 1. Niech f ciągła. Załóżmy, że dla $t_0 \leq t < \infty$ istnieją takie dodatnie stałe a, c, że

$$|f(t)| \leq \frac{c}{t^{1+a}}.$$

Wykaż, że równanie

$$u'' + (1 + f(t))u = 0.$$

Ma liniowo niezależne rozwiązania u_1 i u_2 takie, że $u_1 = \cos t + O(t^{-a})$, $u_2 = \sin t + O(t^{-a})$. Ponadto równanie

$$u'' - (1 + f(t))u = 0.$$

Ma rozwiązania $u_1(t) = e^t(1 + O(t^{-a}))$, $u_2(t) = e^{-t}(1 + O(t^{-a}))$.

Zadanie 2. Zbadaj asymptotykę, gdy $x \to \infty$ rozwiązań równań

$$y'' + (x^4 + 1)y = 0, \quad y'' + e^{2x}y = 0.$$

Wskazówka. Zastosuj podstawienie $t = \phi(x)$ tak, aby równanie sprowadzić do postaci $\frac{d^2y}{dt^2} + b(t)\frac{dy}{dt} \pm y = 0$. Następnie podstaw $y(t) = a(t)u(t)$ tak, aby się pozbyć wyrazu z $b(t)$. Po takim przekształceniu (nazywanym w Filippowie transformacją Liouvilla) zastosuj tezę z Zadania 1.

Zadanie 3. Dla jakich wartości parametru a równanie zapisane we współrzędnych biegunowych

$$r' = (r - 1)(a + \sin^2 \phi), \quad \phi' = 1$$

ma stabilne (przyciagające) rozwiązanie okresowe, a dla jakich niestabilne?

Zadanie 4. Zbadaj charakter punktów osobliwych układu

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x^2 + y^2 - 5 \\ \dot{y} &= (x - 1)(x + 3y - 5) \end{aligned}$$

i naszkicuj jego portret fazowy.

Zadanie 5. Naszkicuj portret fazowy układu $y' = x - y^2$. Wykaż, że dowolne rozwiązanie tego równania z warunkiem początkowym $y(x_0) = y_0$ i $x_0 > 0$, $y_0 > 0$ spełnia $\lim_{x\to\infty} y(x) - \sqrt{x} = 0$.

Zadanie 6. Wykaż, że każde rozwiązanie równania

$$y' = x^3 - y^3$$

przy $x \to \infty$ rośnie co najwyżej wielomianowo, to znaczy istnieje $P(x)$ takie, że $|y(x)| \leq P(x)$ dla dostatecznie dużych x.