

IV zestaw zadań z RRZ.

Maciej Borodzik mcboro@mimuw.edu.pl

Termin oddania: 16 maja, do 15.30. Sala 2200.

Zadania z gwiazdką są nieobowiązkowe i trochę trudniejsze. Punktowane będą odwrotnie proporcjonalnie do liczby osób, które je oddadzą.

1. Niech A będzie macierzą $n \times n$ o stałych współczynnikach, której żadna wartość własna nie leży na prostej $\operatorname{Re} z = 0$. Rozpatrujemy równanie:

$$\dot{x} = Ax.$$

Niech n_1 będzie wymiarem przestrzeni rozwiązań ograniczonych przy $t \rightarrow \infty$, zaś n_2 wymiarem przestrzeni rozwiązań ograniczonych przy $t \rightarrow -\infty$. Wykaż, że $n_1 + n_2 = n$.

2. Niech dane będą dwa punkty $A = (0, 1)$ i $B = (1, 0) \in \mathbb{R}^2$. Znajdź krzywą $(x, y(x))$, o tej własności, że czas zjazdu od A do B jest najkrótszy, jeśli działa tylko siła grawitacyjna.

Wskazówka: Czas zjazdu zadaje się wzorem:

$$T = \int \frac{\sqrt{1-y}}{\sqrt{1+(y')^2}}.$$

Uwaga. Dodatkowy punkt można uzyskać za uzasadnienie wskazówki. Jeśli jest to zbyt trudne, możesz sięgnąć do Elsgolca.

3. Słupki. Z podanych niżej czterech zadań należy wybrać trzy i je rozwiązać. Uwaga. Trzy jest liczbą zadań, które trzeba rozwiązać. I nie jest to ani jedno zadanie, ani dwa ani też cztery, lecz trzy będzie liczbą zadań do rozwiązania.

a) $\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \cos 4t \\ 1 \end{pmatrix}.$

b) $\dot{x} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} t^2 e^{-2t} \\ t^3 \end{pmatrix}.$

c) $x^{(3)} + 3\ddot{x} + 3\dot{x} + x = \sin 2t + t.$

d) $x^{(2)} - 2\dot{x} + x = t^2 e^t, x(0) = \dot{x}(0) = 0.$

4. Niech $f(x, y)$ będzie gładką funkcją, taką, że $f(0, 0) < 0$ oraz $f(x, y) > 0$ dla $x^2 + y^2 > b$, gdzie b jest stałą, przy czym mamy globalne ograniczenie z góry: $f(x, y) \leq c < 2$. Wykaż, że równanie

$$x'' + f(x, x')x' + x = 0$$

ma rozwiązanie okresowe nierówne tożsamościowo zeru.

Wskazówka: wprowadź zmienne biegunowe i popatrz na odwzorowanie Poicaré. Możesz też narysować sobie pola kierunków na okręgu o b. małym i b. dużym promieniu.