Trzeci zestaw zadań z równań różniczkowych zwyczajnych

Maciej Borodzik

Termin oddania: 21 maja 2007, godzina 12:00.

Zadania można oddawać elektronicznie (pdf), lub na kartkach.

Zadanie 1. Rozpatrzmy równanie

$$\ddot{x} = -\omega^2 \sin x.$$

z warunkiem początkowym $x(0) = A$, $\dot{x}(0) = 0$. Równanie to, poprzez przybliżenie $\sin x \sim x$ dla małych A ma rozwiązanie okresowe o okresie $P(A) \sim 2\pi\omega$. Znajdź następny wyraz rozwinięcia $P(A)$, czyli $P'(0)$.

Zadanie 2. Rozpatrzmy układ jak w Zadaniu 1. Udowodnij, że jeśli $A \to \pi$, to $\frac{P(A)}{\log(\pi - A)}$ pozostaje ograniczone i oddzielone od zera.

Zadanie 3. Zając (Z) w chwili $t_0 = 0$ znajduje się w punkcie $(x, y) = (0, 0)$. Widząc wilka (W) w punkcie $(-A, 0)$ zaczyna biec z prędkością stałą v_Z w kierunku pionowym. Wilk goni zająca z prędkością $v_W > v_Z$ w kierunku, w którym w danej chwili widzi zająca. Po jakim czasie wilk dogoni zająca?

Zadanie 4. Niech $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $v = (v_1(x, y), v_2(x, y))$ będzie polem wektorowym klasy C^1, takim, że dla $x \geq 0$, $y = 1$ mamy $v_2 > 0$, dla $x \geq 0$, $y = -1$ mamy $v_2 < 0$ a dla $x = 0$, $|y| < 1$ mamy $v_1 > 0$. Wykaż, że istnieje rozwiązanie równania

$$\begin{cases} \dot{x} &= v_1(x, y) \\ \dot{y} &= v_2(x, y), \end{cases}$$

które przez nieskończenie długi czas przebywa w cylindrze $C = \{(x, y) : x > 0, |y| < 1\}$.

Zadanie 5. Rozpatrzmy równanie $xy' + ay = f(x)$, gdzie $a > 0$, a $\lim_{x\to 0} f(x) = b$. Wykaż, że równanie to ma dokładnie jedno rozwiązanie, $y(x)$, które jest ograniczone gdy $x \to 0$ i znajdź $\lim_{x\to 0} y(x)$.

Zadanie 6. Wykaż, że dowolne rozwiązanie równania $y'' + xy = 0$ ma na przedziale $-25 \leq x \leq 25$ co najmniej piętnaście miejsc zerowych (tzn. takich, że $y(x) = 0$.)