III. zestaw zadań z RRZ.

Maciej Borodzik mcboro@mimuw.edu.pl

Termin oddania: 16 kwietnia, godzina 15.30. Sala 2200.

Zadania z gwiazdką są nieobowiązkowe i trochę trudniejsze. Punktowane będą odwrotnie proporcjonalnie do liczby osób, które je oddadzą.

1. Niech $a(x) \geq c > 0$ będzie funkcją klasy C^1. Niech też $f(x)$ będzie gładkie oraz $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Rozpatrzmy układ:

$$\frac{dy}{dx} + a(x)y = f(x).$$

Wykaż, że każde jego rozwiązanie $y(x)$ zbiega do zera przy $x \to \infty$.

2. „Słupki” z podstawianiem (tzn. trzeba znaleźć podstawienie, wtedy się uprości). Spośród podanych równań należy wybrać dwa i je rozwiązać.

a) $y' = \sqrt{4x + 2y - 1}$.
b) $y^3 y'' = 1$. Tutaj podstaw $y' = p(y)$ i wylicz y'' w terminach $\frac{dp}{dy}$ oraz $\frac{dy}{dx}$.
c) $xyy' - x^2\sqrt{y^2 + 1} = (x + 1)(y^2 + 1)$.

3. Rozpatrzmy układ:

$$xy' + ay = f(x),$$

gdzie a =const oraz $\lim_{x\to 0} f(x) = b$.

a) Wykaż, że jeśli $a > 0$ to tylko jedno rozwiązanie $y(x)$ jest ograniczone przy $x \to 0$ oraz znajdź jego granicę.
b) Pokaż, dla odmiany, że gdy $a < 0$ to każde rozwiązanie ma tę samą granicę przy $x \to 0$ i oblicz ją.

4. Niech $f(x, y)$ będzie gładką funkcją, taką, że $f(0, 0) < 0$ oraz $f(x, y) > 0$ dla $x^2 + y^2 > b$, gdzie b jest stałą, przy czym mamy globalne ograniczenie z góry: $f(x, y) \leq c < 2$. Wykaż, że równanie

$$x'' + f(x, x')x' + x = 0$$

ma rozwiązanie okresowe nierówne tożsamościowo zeru.

Wskazówka: wprowadź zmienne biegunowe i popatrz na odwzorowanie Poicaré.

Uwaga: Za to zadanie najlepiej zabrać się po poniedziałkowych (6.04) ćwiczeniach.

(*) Znajdź przykład funkcji U, która będzie klasy C^2, nie będzie ograniczona od dołu, o tej własności,że każde rozwiązanie równania:

$$x'' = -\frac{dU}{dx}$$

można przedłużyć na całą prostą rzeczywistą.