Drugi zestaw zadań z równań różniczkowych zwyczajnych

Wersja jednokolorowa do druku

Maciej Borodzik

Termin oddania: 23 kwietnia 2007, godzina 12:00.

Zadania można oddawać elektronicznie (pdf), lub na kartkach.

Zadanie 1. Narysuj portret fazowy układu

$$\begin{cases} \dot{x} &= x^2 - y^2 \\ \dot{y} &= 2xy. \end{cases}$$

Opisz zachowanie się rozwiązań $x(t), y(t)$ przy $t \to \pm\infty$.

Zadanie 2. Rozpatrzmy równanie

$$y' = y^3 + \varepsilon x, \quad y(0) = 0.$$

(a) Oblicz $y(x)$ z dokładnością do wyrazów ε^3.

(b) Rozwiązanie możemy zapisać w postaci szeregu

$$y(x) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \dots + \varepsilon^n y_n(x) + \dots$$

Wykaż, że dla dużych x, ε ten szereg będzie rozbieżny.

(c)* Znajdź jak najlepsze oszacowanie promienia zbieżności w zależności od x.

Zadanie 3. Wykaż, że każde rozwiązanie równania

$$y' = \sqrt[3]{\frac{y^2+1}{x^4+1}}$$

ma dwie asymptoty poziome.

Zadanie 4. Dany jest ciąg $a_0 = 0$, $a_1 = a$, $a_{n+2} = a_{n+1} - \frac{1}{n+1} a_n$. Rozpatrzmy

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

— Spróbuj znaleźć bezpośrednio wzór ogólny na a_n (ale ta część jest opcjonalna i proszę jej nie oddawać).

— Znajdź równanie różniczkowe pierwszego rzędu, które spełnia f i rozwiąż je.

— Rozwiń f w szereg Taylora w zerze i znajdź wzór ogólny na a_n.

Zadanie 5. Niech $f(x,y)$ będzie funkcją gładką oraz $f(0,0) < 0$ i dla $x^2+y^2 > R$ mamy $f(x,y) > 0$. Ponadto załóżmy, że $|f(x,y)| \le c < 2$ dla wszystkich (x,y). Rozważmy układ

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} + f(x,y)y + x = 0. \end{cases}$$

Wykaż, że układ ten ma rozwiązanie okresowe różne od stałego.