

II. zestaw zadań z RRZ.

Maciej Borodzik mcboro@mimuw.edu.pl

Termin oddania: 31 marca godzina 14. Sala 2200.

Zadania z gwiazdką są nieobowiązkowe i trochę trudniejsze. Punktowane będą odwrotnie proporcjonalnie do liczby osób, które je oddadzą. Zadania oddane po terminie nie będą punktowane w ogóle.

1. Niech $f(x) = 1 - \cos x$. Wykaż, że f ma w punkcie $x = 0$ osobliwość niezdegenerowaną. Znajdź *explicite* (jawnie) zamianę zmiennych $y = h(x)$ w otoczeniu 0 tak, że $f(y) = y^2$.

2. Rozpatrzmy następujące pole wektorowe na \mathbb{R}^2 :

$$\begin{cases} x' = x^2 - y^2 \\ y' = 2xy. \end{cases}$$

a) Narysuj pole kierunków dla tego pola..

b) Posługując się intuicjami wynikającymi z punktu a) wykaż, że pole to nie ma żadnych cykli (tzn. trajektorii okresowych o okresie > 0).

c) Narysuj przybliżony portret fazowy tego pola. Portret fazowy składa się z krzywych fazowych (inaczej mówiąc z trajektorii, albo z rozwiązań).

(*) Wykaż ściśle, że jedyne trajektorie nieograniczone to te, dla których $y = 0, x \neq 0$.

Wskazówka (szczególnie do *): pokaż, że jednokładność o środku w zerze przeprowadza trajektorie na trajektorie.

3. Szafa zsuwa się z punktu $(0, 1)$ do punktu $(1, 0)$ po radzieckiej równi pochyłej, będącej łukiem koła o promieniu $R > 1$. (Koło takie ma środek w punkcie (r, r) , gdzie r i R są ze sobą oczywiście powiązane).

a) Znajdź czas zjazdu szafy w zależności od parametru r .

b) Znajdź przybliżone r , dla którego czas zjazdu jest najkrótszy.

c) Rozwiąż równanie ruchu szafy dla $r = 1$.

W chwili $t = 0$ szafa jest w położeniu $x = 0, y = 1$ i ma zerową prędkość. Przyjmij, że masa szafy wynosi 1 (w dowolnych jednostkach, np. kwintalach), a przyspieszenie grawitacyjne również wynosi 1 i jest skierowane w dół, wzdłuż osi OY .

4. Iracka bomba o masie $m = 100kg$ wypada z lecącego na wysokości $h = 16,000m$ bombowca. Prędkość początkowa bomby wynosi $v_0 = 2\frac{m}{s}$ i jest skierowana w dół (ruchu poziomego samolotu nie uwzględniamy). Przyciąganie ziemskie wynosi $g \simeq 10\frac{m}{s^2}$, zaś opór powietrza wynosi Cv^2 , gdzie v jest prędkością, a C współczynnikiem oporu powietrza. Z jaką prędkością bomba uderzy w ziemię, jeśli $C = 0.1\frac{kg}{m}$? Jak zależy prędkość graniczna ($\lim_{t \rightarrow \infty} v(t)$) od masy bomby m i jej współczynnika oporu C ?

Wskazówka: W równaniu ruchu podstaw $v = x'$.