# I. zestaw zadań z RRZ.

Maciej Borodzik mcboro@mimuw.edu.pl

*Termin oddania: 11 marca godzina 14. Sala 2200.*

*Zadania z gwiazdką są nieobowiązkowe i trochę trudniejsze. Punktowane będą odwrotnie proporcjonalnie do liczby osób, które je oddadzą.*

**1.** Niech $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, będzie odwzorowaniem klasy $C^r$. Niech $0 \in U$ oraz $f(0) = 0$. Sformułuj i udowodnij $n-$wymiarowy analog lematu Hadamarda.

Uwaga: Prawdziwy jest także i $n-$wymiarowy analog lematu Morse'a. Aby o nim przeczytać, możesz sięgnąć np. do II rozdziału "Morse theory" J. Milnora.

**2.** Narysuj poziomice energii dla potencjału $U(x) = x^3$. Zbadaj zachowanie się rozwiązań równania $x'' = -\frac{dU}{dx}$. Wykaż później, uogólniając odpowiednio lemat Morse'a, że zachowanie się poziomic energii w otoczeniu punktu osobliwego $U'(x_0) = U''(x_0) = 0$, ale $U'''(x_0) \neq 0$, jest takie jak w przypadku poprzedniego zadania.

Uwaga: Takie uogólnienie pracuje wyłącznie w przypadku 1-wymiarowym. Nie jest to to samo, o czym mowa w uwadze do zad. 1.

(*) Uogólnij powyższy wynik na sytuację, gdy $U = x^{2n+1}$.

**3.** Niemiecki skoczek Sven Hannawald startuje w konkursie skoków na księżycu. Wyskakuje pionowo w kierunku ziemi. Jaką musi mieć prędkość wyjścia z progu, aby wylądował na ziemi, z jaką prędkością uderzy w ziemię? Pomijamy opór powietrza i ruch księżyca wokół ziemi.

Potencjał grawitacyjny:$V = \frac{GM}{r}$, $G = 6.6 \cdot 10^{-11}$, $M_{ziemia} = 6 \cdot 10^{24} kg$, $M_{ks} = 7.3 \cdot 10^{22} kg$, $R_{ziemia} = 6.4 \cdot 10^6 m$, $R_{ks} = 3.4 \cdot 10^6 m$. Odległość od ziemi do księżyca wynosi $3.8 \cdot 10^8 m$.

**4.** Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} x' = -y(\sqrt{x^2+y^2}) \\ y' = x(\sqrt{x^2+y^2}). \end{cases}$$

Wskazówka: wprowadź zmienne biegunowe.

(*) Rozważmy wahadło fizyczne $x'' = -\sin x$. Rozwiązanie z energią $E < \pi$ jest okresowe. Udowodnij, że okres $T(E)$ dąży — gdy $E \to \pi$ — do nieskończoności tak, jak $\ln|E-\pi|$. Inaczej mówiąc, $\frac{T(E)}{\ln|E-\pi|}$ pozostaje oddzielone od zera i nieskończoności.