IV ZESTAW ZADAŃ Z RRZ. *Maciej Borodzik, 8 maja 2004*

Zadanie 1. *To jest zadanie w stylu Vademecum, składające się z serii krótkich zadanek, dających w sumie opis zagadnienia ruchu planet itp. wokół słońca. Za każdy podpunkt jest przewidzianych* 0.5 *punkta, suma zaokrąglana w górę. Za zrobienie co najmniej sześciu podpunktów dodatkowy punkt.*

Wstęp. Dany jest układ dwuwymiarowy:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -F(r)x \\ \ddot{y} = -F(r)y, \end{cases} \tag{1}$$

gdzie F jest, jak na razie gładką funkcją promienia $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. (r, ϕ) będą oznaczały zwykłe współrzędne biegunowe. W tych współrzędnych będziemy pracować.

(a) Wykaż, że jeśli spełnione jest równanie (1) to zachodzi:

$$\ddot{\phi} = -2\frac{\dot{r}}{r}\dot{\phi} \tag{2}$$

i w związku z tym wielkość $M = r^2\dot{\phi}$ jest całką pierwszą układu (1).

(b) Oblicz $\ddot{r}$. Wykaż, korzystając z (1), że

$$\ddot{r} = \frac{M^2}{r^3} - F(r)r \tag{3}$$

Znajdź całkę pierwszą energii układu (3), dla $F(r) = \frac{k}{r^3}$, gdzie k jest pewną stałą dodatnią. *(mamy wtedy oddziaływanie grawitacyjne.)* Narysuj przybliżony portret fazowy układu (3).

(c) Wyznacz $\dot{r}$ z całki pierwszej energii ($\dot{r}$ będzie zależał od E — wartość energii, M, k i r). Korzystając z punktu (b) wykaż, że

$$\dot{r} = -M\frac{d}{d\phi}\left(\frac{1}{r}\right).$$

Używając wypisanych w tym podpunkcie równań, dojdź do tego, że

$$\frac{d}{d\phi}\left(\frac{1}{r}\right) = \sqrt{E - \frac{M}{2r^2} + \frac{k}{r}} \tag{4}$$

(d) Podstawiając $w = \frac{1}{r}$ rozwiąż równanie (4) i wyznacz $r(\phi)$. Teraz pora na wyciągnięcie wniosków.

Wskazówka: Wygodnie jest oznaczyć $p = \frac{M^2}{k}$ *i* $e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{k^2}}$.

(e) Wykaż, że jeśli punkt (planeta) znajduje się w punkcie (x_0, y_0) w chwili t, a w punkcie (x_1, y_1) w chwili $t+\Delta t$, to pole trójkąta wyznaczonego przez punkty $(0, 0)$, (x_0, y_0) i (x_1, y_1) jest równe $\frac{1}{2}r^2\dot{\phi}\Delta t + O(\Delta t^2)$. Oznacza to, że prędkość polowa jest stała. *Jest to drugie prawo Keplera, zauważ, że jest ono prawdziwe, niezależnie od postaci funkcji* $F(r)$.

(f) Wykaż, że każde rozwiązanie (4) opisuje pewną stożkową, w zależności od parametrów E, M i k, której punkt $(0, 0)$ jest ogniskiem. *(Drugie prawo Keplera stanowi, iż planety poruszają się po elipsach, a słońce leży w jednym z ognisk).*

(g) Dla tych parametrów, dla których rozwiązanie jest elipsą, oblicz (korzystając z punktu (e)), czas obiegu punktu po tej elipsie w zależności od długości jej dłuższej osi. *(Jest to, też z grubsza, trzecie prawo Keplera: czas obiegu zależy tylko od długości dłuższej osi elipsy, a dokładniej $T \sim a^{3/2}$.)*

Uwaga, w razie jakichś wątpliwości proszę pytać.

Zadanie 2. Z poniższych równań wybierz 3 i je rozwiąż.

$$(1) \begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z \\ \dot{y} = 2x - y - 2z \\ \dot{z} = 2z - x + y \end{cases} \qquad (2) \begin{cases} \dot{x} = 4x - y \\ \dot{y} = 3x + y - z \\ \dot{z} = x + z \end{cases} \quad (3) \begin{cases} \dot{x} = x - y + \frac{1}{\cos t} \\ \dot{y} = 2x - y \end{cases}$$

Zadanie 3. Znajdź wszystkie położenia równowagi (punkty stałe) układu:

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x^2 - x \\ \dot{y} = 3x - x^2 - y \end{cases}$$

i określ ich stabilność.

Zadanie 4. Zbadaj, czy rozwiązanie $x = -t^2$, $y = t$ równania:

$$\begin{cases} \dot{x} = y^2 - 2ty - 2y - x \\ \dot{y} = 2x + 2t^2 + e^{2t-2y} \end{cases}$$

jest stabilne.

Rozwiązania proszę oddawać do wtorku przed ostatnimi ćwiczeniami w semestrze.