III ZESTAW ZADAŃ Z RRZ. *7 kwietnia 2004*

Wprawka 1. Znajdź całkę pierwszą układów
(a) $\dot{x} = \sqrt{x^2 - y}$, $\dot{y} = 2x(1 + \sqrt{x^2 - y})$, tam gdzie $x^2 > y$.
(b) $(1 + y^2 \sin 2x)dx - 2y \cos^2 x dy = 0$
(c) $\dot{x} = y - e^x$, $\dot{y} = y^2$. Tu znajdź czynnik całkujący.

Wprawka 2. Rozwiąż równanie Ricatti $y' - 2xy + y^2 = 5 - x^2$.

Zadanie 1. Niech dany będzie układ na płaszczyźnie $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$. Załóżmy, że $F(\mathbf{x})$ jest całką pierwszą, taką, że nie istnieje żaden zbiór otwarty U taki, że $F|_U \equiv$ const. Przypuśćmy także, że $\forall c \in \mathbb{R}$ zbiór $F^{-1}(c) \subset \mathbb{R}^2$ jest ograniczony i gładki. Wykaż, że każda trajektoria $\mathbf{x}$ jest albo okresowa, albo ma granicę $\mathbf{x}(t) \to \mathbf{x_0}$, która jest punktem stałym (tzn. $\mathbf{v}(\mathbf{x_0}) = \mathbf{0}$).

***** Czy założenie gładkości można opuścić?

Zadanie 2. Dany jest układ:

$$\begin{cases} \dot{x} &= \frac{x}{x^2+y^2} \\ \dot{y} &= \frac{y}{x^2+y^2} \end{cases}$$

w $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Wykaż, że choć spełniony jest warunek zupełności, nie istnieje taka funkcja F, że $F_x\dot{x} + F_y\dot{y} \equiv 0$, ale dla każdej półprostej D zaczynającej się w zerze, istnieje taka funkcja na $\mathbb{R}^2 \setminus D$.

Zadanie 3. Narysuj portret fazowy układu $\ddot{x} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dx} U(x)$, gdzie $U(x) = xe^x$.

Zadanie 4. Niech dana będzie gładka funkcja $H(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n)$. Rozpatrujemy równanie różniczkowe zwyczajne w $\mathbb{R}^{2n}$:

$$\begin{cases} \dot{p}_1 &= \frac{\partial H}{\partial q_1} \\ \dot{q}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial p_1} \\ \ldots & \\ \dot{p}_n &= \frac{\partial H}{\partial q_n} \\ \dot{q}_n &= -\frac{\partial H}{\partial p_n} \end{cases} \tag{*}$$

Wykaż, że H jest całką pierwszą układu i to zupełną ($m = 1$). Ponadto $F(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n)$ jest całką pierwszą (*) wtedy i tylko wtedy, gdy $\{H, F\} \equiv 0$, gdzie:

$$\{H, F\} \stackrel{def}{=} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} - \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} \right)$$

(*) Udowodnij, że dla dowolnych funkcji F_1, F_2 i F_3 zachodzi $\{F_1, F_2\} = -\{F_2, F_1\}$, oraz:

$$\{F_1, \{F_2, F_3\}\} + \{F_2, \{F_3, F_1\}\} + \{F_3, \{F_1, F_2\}\} \equiv 0$$

i wywnioskuj, że jeśli F_1 i F_2 są całkami pierwszymi (*), to $\{F_1, F_2\}$ też.

Uwaga. $\{H, F\}$ jest oczywiście funkcją od $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$ o wartościach rzeczywistych.

ROZWIĄZANIA PROSZĘ ODDAWAĆ DO 4 MAJA WŁĄCZNIE. MACIEJ BORODZIK